

Πρώτο Έτος Αρχιτεκτόνων Μηχανικών

Φυλλάδιο 2

Ασκήσεις

1) Δείξτε ότι η συνάρτηση η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$$

ικανοποιεί την σχέση

$$xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0.$$

2) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$, $t > 0$ επαληθεύει την εξίσωση

$$36 \frac{d^2 y}{dx^2} (y - \sqrt{3x}) = x + 3.$$

3) Βρείτε τις εφαπτόμενες και κάθετες γραμμές στην καμπύλη $y^2 - 6x^2 + 4y + 19 = 0$ στο σημείο $(2, 1)$.

4) Βρείτε το dy για καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις :

$$y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 3}$$

$$y = \cos^2 2x + \sin 3x$$

$$y = e^{3x} + \arcsin 2x.$$

5) Βρείτε κατά προσέγγιση τη μεταβολή του όγκου ενός κύβου πλευράς x εκ. που προκύπτει από μεταβολή της πλευράς του κατά 1%.

6) Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του αριθμού 3 με τη μέθοδο Newton-Raphson με αρχική προσέγγιση $x_0 = 1$ και ακρίβεια 8 σημαντικών ψηφίων.

7) Με τη μέθοδο N-R βρείτε που τέμνει η γραφική παράσταση του $y = x^3$ τη γραμμή $y = x + 1$.

8) Να λυθούν οι κάτωθι Διαφορικές Εξισώσεις:

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$x = \tan y'$$

$$\theta(1 + \rho^2)d\theta + \rho(1 + \theta^2)d\rho = 0$$

$$y'' + 4y = 0$$

9) Να βρεθεί η ΔΕ η οποία έχει γενική λύση την $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$.

10) Να υπολογισθούν τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\sin ax$, $\arctan x$ και $\cosh x$ γύρω από το μηδέν καθώς και του $\cos x$ γύρω από το a .

11) Δείξτε ότι αν για το πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού n , με πραγματικούς συντελεστές, οι τιμές του $f(x)$ και όλων των παραγώγων του είναι θετικές για $x = x_0$, τότε καμμιά ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ δεν ξεπερνά την x_0 . Επίσης ναδειχθεί η αλήθεια της πρότασης και για τις εξισώσεις $f^{(p)}(x) = 0$. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στο πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 15x - 3$, δείξτε ότι όλες οι ρίζες του είναι μικρότερες του 4.

12) Να λυθούν τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 + x^2}}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

13) Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει όταν περιστρέψουμε την $x^2 + y^2 = r^2$ με $x, y > 0$, γύρω από τον άξονα xx' .

14) Βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται όταν η περιοχή που περικλείεται από τις $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ και $x = 0$, περιστραφεί γύρω από τον y -άξονα.

15) Βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται όταν η περιοχή R κάτω από την $y = x^2$ και στο διάστημα $[0, 2]$, περιστραφεί γύρω από τον x -άξονα.