Πρώτο Έτος Αρχιτεκτόνων Μηχανικών

Φυλλάδιο 3

Υπολογισμός όγκου από περιστροφή.

• Περιστροφή γύρω από τον x-άξονα.

1) Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και θετική στο $[a, b]$ διάστημα. Όταν ο άξονας περιστροφής είναι τμήμα του συνόρου του επιπέδου τόπου R, τότε ο όγκος που προκύπτει από την περιστροφή του R γύρω από τον x-άξονα, δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

2) Όταν η περιοχή που περιστρέφεται ορίζεται από δύο καμπύλες $f(x)$, $g(x)$ με $f(x) > g(x)$ σε ένα διάστημα $[a, b]$, τότε ο όγκος που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον x-άξονα, δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_a^b \pi ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\, dx$$

• Περιστροφή γύρω από τον y-άξονα.

1) Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και θετική στο $[a, b]$ διάστημα. Αν R η περιοχή που ορίζεται από την καμπύλη $y = f(x)$ τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$, τότε ο όγκος V του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της περιοχής R γύρω από τον y-άξονα, δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

2) Αν η περιοχή που περιστρέφεται ορίζεται από δύο καμπύλες $f(x)$, $g(x)$ με $f(x) > g(x)$ σε ένα διάστημα $[a, b]$, τότε ο όγκος που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον y-άξονα, δίνεται από τη σχέση:

$$V = \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)]\, dx$$

Παρατήρηση. Κατά τον υπολογισμό των ανωτέρω όγκων μπορούμε να ολοκληρώνουμε με ανεξάρτητη μεταβλητή είτε το x είτε το y προσέχοντας να χρησιμοποιούμε τους σωστούς τύπους κάθε φορά. Είναι αυτονόητο ότι δεν μπορούμε να αλλάξουμε, αυθαίρετα, τον άξονα περιστροφής. Άλλο περιστρέφω περί τον άξονα x (δεσμευτικό) και άλλο ολοκληρώνω ως προς x (προαιρετικό). Τέλος προσέχουμε πάντοτε τα άκρα της ολοκλήρωσης σε συνδυασμό με τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε στους τύπους, να ορίζουν πλήρως την περιοχή που περιστρέφεται.

Υπολογισμός επιφάνειας από περιστροφή.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

1) Αν η $y = f(x)$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα x, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας που δημιουργείται, δίνεται από την σχέση:

$$E = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (1)$$

2) Αν η $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$ περιστραφεί γύρω από τον άξονα y, τότε το εμβαδόν της επιφάνειας που δημιουργείται, δίνεται από την σχέση:

$$E = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \qquad (2)$$

3) Αν η καμπύλη δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ οπότε $dx = \dot{x}(t)dt$, $dy = \dot{y}(t)dt$, οι πιο πάνω τύποι (1), (2) γίνονται:

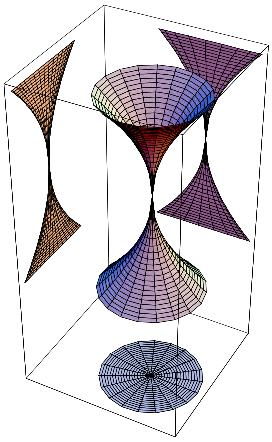
$$E = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt$$
$$E = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt$$

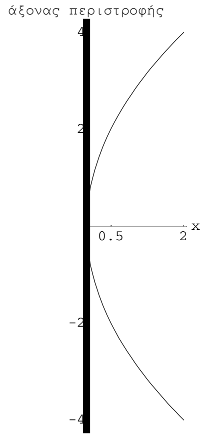
4) Αν η καμπύλη δίνεται σε πολική μορφή $r = r(\phi)$, με $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ τότε $x(\phi) = r(\phi)\cos\phi$, $y(\phi) = r(\phi)\sin\phi$ (δηλ. ουσιαστικά πάλι έχουμε παραμετρικές εξισώσεις με παράμετρο ϕ), οπότε $\frac{dx}{d\phi} = r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi$ και $\frac{dy}{d\phi} = r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi$ και οι τύποι (1), (2) τώρα γίνονται:

$$E = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |r(\phi)\sin\phi| \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |y(\phi)| \sqrt{x'^2(\phi) + y'^2(\phi)}\, d\phi$$
$$E = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |r(\phi)\cos\phi| \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |x(\phi)| \sqrt{x'^2(\phi) + y'^2(\phi)}\, d\phi$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x = 0$, γύρω από τον άξονα y όταν το $x \in [0, 2]$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



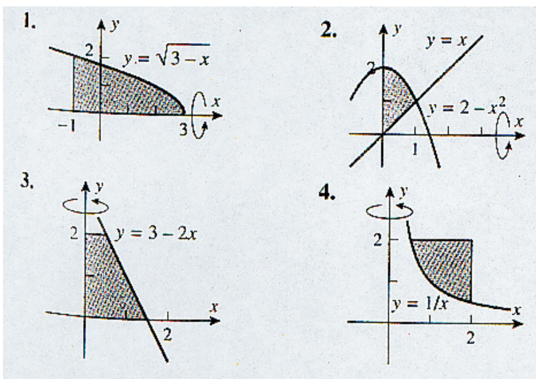


2) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x = 2$, γύρω από τον άξονα y.

3) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, της παραβολής $y^2 = 8x$ του άξονα x και της ευθείας $x = 2$, γύρω από τον άξονα x.

4) Βρείτε τον όγκο του στερεού από περιστροφή, που προκύπτει όταν ο τόπος που περιορίζεται από τις $y = -x^2 - 3x + 6$ και $x + y - 3 = 0$ περιστρέφεται γύρω από την ευθεία $y = 0$.

5) Βρείτε τον όγκο των στερεών που προκύπτουν όταν η γραμμοσκιασμένη περιοχή περιστραφεί γύρω από τον άξονα όπως σημειώνεται στα παρακάτω σχήματα.



6) Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που παίρνουμε περιστρέφοντας την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 2$ γύρω από τον άξονα των x.

7) Βρείτε την απόσταση που διανύει ένα σημείο $P(x, y)$, του οποίου η θέση κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τς σχέσεις $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, με το t από $t = 0$ έως $t = \pi/2$.

8) Βρείτε το μήκος της καμπύλης $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$ αν $1 \leq x \leq 2$.