

Εργαστήριο 5

Πολιτικοί Μηχανικοί

Άσκηση 1.

$$\text{In[1]:= } \mathbf{f[x_]} = \frac{2}{3} \mathbf{x^{3/2}}$$

$$\text{Out[1]= } \frac{2 \mathbf{x^{3/2}}}{3}$$

$$\text{In[2]:= } \int_1^2 \sqrt{1 + \mathbf{D[f[x], x]^2}} \, d\mathbf{x}$$

$$\text{Out[2]= } -\frac{4\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{3}$$

$$\text{In[3]:= } \mathbf{Factor[\%]}$$

$$\text{Out[3]= } -\frac{2}{3} \left(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \right)$$

Άσκηση 2.

$$\text{In[4]:= } \mathbf{g[x_]} = \mathbf{Log[Sin[x]]}$$

$$\text{Out[4]= } \mathbf{Log[Sin[x]]}$$

$$\text{In[5]:= } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \mathbf{D[g[x], x]^2}} \, d\mathbf{x}$$

$$\text{Out[5]= } -\mathbf{Log}\left[\mathbf{Tan}\left[\frac{\pi}{8}\right]\right]$$

Άσκηση 3.

Από τη παλέτα Basic Math Assistant $\rightarrow$ Basic Commands $\rightarrow d \int \Sigma$ (Calculus Commands) $\rightarrow$ Limit μπορούμε να πάρουμε τον τύπο της εντολής Limit,

$$\mathbf{Limit}\left[\mathbf{expr}, \mathbf{var} \rightarrow \mathbf{value}\right]$$

και να συμπληρώσουμε όπου **expr** την συνάρτηση της οποίας ψάχνουμε να βρούμε το όριο, όπου **var** την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης και τέλος όπου **value** την τιμή που τείνει η ανεξάρτητη μεταβλητή.

$$\text{In[6]:= } \mathbf{Limit}\left[\frac{3 \mathbf{x}}{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rightarrow 0\right]$$

$$\text{Out[6]= } 3$$

Το παραπάνω όριο έχει βρεθεί του $x \rightarrow 0$ όταν το x τείνει στο 0 από μεγαλύτερες τιμές (δηλ. $x \rightarrow 0^+$). Όταν το x τείνει στο 0 από μικρότερες τιμές (δηλ. $x \rightarrow 0^-$) θα πρέπει να δώσουμε την παρακάτω εντολή:

$$\text{In[7]:= } \mathbf{Limit}\left[\frac{3 \mathbf{x}}{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rightarrow 0, \mathbf{Direction} \rightarrow 1\right]$$

$$\text{Out[7]= } 3$$

$$\text{In[8]:= Limit}\left[\frac{\text{Abs}[x]}{x}, x \rightarrow 0\right]$$

$$\text{Out[8]= } 1$$

$$\text{In[9]:= Limit}\left[\frac{\text{Abs}[x]}{x}, x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$$

$$\text{Out[9]= } -1$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

Άσκηση 4.

$$\text{In[10]:= Limit}\left[\frac{\text{Cos}[x]^{\text{Sin}[x]} - 1}{x!}, x \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{Out[10]= Limit}\left[\frac{-1 + \text{Cos}[x]^{\text{Sin}[x]}}{x!}, x \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{In[11]:= } << \text{"NumericalCalculus`"}$$

$$\text{In[12]:= NLimit}\left[\frac{\text{Cos}[x]^{\text{Sin}[x]} - 1}{x!}, x \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{Out[12]= } 0. + 0. i$$

Άσκηση 5.

$$\text{In[13]:= } f[x_] := x^3 e^{-2x}$$

$$\text{In[14]:= } f'[x]$$

$$\text{Out[14]= } 3 e^{-2x} x^2 - 2 e^{-2x} x^3$$

$$\text{In[15]:= Simplify[%]}$$

$$\text{Out[15]= } -e^{-2x} x^2 (-3 + 2x)$$

$$\text{In[16]:= } g[x_] := x * \text{ArcTan}[x]$$

$$\text{In[17]:= } g'[x]$$

$$\text{Out[17]= } \frac{x}{1+x^2} + \text{ArcTan}[x]$$

$$\text{In[18]:= } h[x_] := (2x+1)(3x^2-4x+2)$$

$$\text{In[19]:= } h''[x]$$

$$\text{Out[19]= } 6(1+2x) + 4(-4+6x)$$

$$\text{In[20]:= Simplify[%]}$$

$$\text{Out[20]= } -10 + 36x$$

$$\text{In[21]:= } k[x_] := \frac{\text{ArcSin}[x]}{x^2 - 1}$$

$$\text{In[22]:= } \partial_{\{x,3\}} k[x]$$

$$\text{Out[22]= } -\frac{6x^2}{(1-x^2)^{3/2}(-1+x^2)^2} + \frac{\frac{3x^2}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}}{-1+x^2} + \frac{3\left(\frac{8x^2}{(-1+x^2)^3} - \frac{2}{(-1+x^2)^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{48x^3}{(-1+x^2)^4} + \frac{24x}{(-1+x^2)^3}\right) \text{ArcSin}[x]$$

In[23]:= **FullSimplify**[%]

$$\text{Out[23]} = \frac{-7 - 19 x^2 + 26 x^4 - 24 x \sqrt{1 - x^2} (1 + x^2) \text{ArcSin}[x]}{(1 - x^2)^{9/2}}$$

Άσκηση 6.

In[24]:= $\int e^{-2x} \sin[3x] dx$

$$\text{Out[24]} = -\frac{1}{13} e^{-2x} (3 \cos[3x] + 2 \sin[3x])$$

In[25]:= $\int y^3 \log[y]^2 dy$

$$\text{Out[25]} = \frac{y^4}{32} - \frac{1}{8} y^4 \log[y] + \frac{1}{4} y^4 \log[y]^2$$

In[26]:= **Simplify**[%]

$$\text{Out[26]} = \frac{1}{32} y^4 (1 - 4 \log[y] + 8 \log[y]^2)$$

In[27]:= $\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} e^{-x^2} \cos[x^3] dx$

$$\text{Out[27]} = \int_0^{\pi^{1/3}} e^{-x^2} \cos[x^3] dx$$

In[28]:= **N**[%]

$$\text{Out[28]} = 0.701566$$

Άσκηση 7.

In[29]:= $s1 = \sqrt{a^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$

$$\text{Out[29]} = \sqrt{a^2 - \left(-\frac{a}{2} + x\right)^2}$$

In[30]:= $s2 = \frac{1}{2} \left(2 \sqrt{4a^2 - x^2} - a \sqrt{3}\right)$

$$\text{Out[30]} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{3} a + 2 \sqrt{4a^2 - x^2}\right)$$

In[31]:= $4 \left(\int_a^{3a/2} s1 dx + \int_0^a s2 dx\right)$

$$\text{Out[31]} = 4 \left(\frac{1}{24} a \sqrt{a^2} \left(-3 \sqrt{3} + 4 \pi\right) + \frac{1}{6} a \left(-3 \sqrt{3} a + \sqrt{a^2} \left(3 \sqrt{3} + 2 \pi\right)\right)\right)$$

In[32]:= **Simplify**[%]

$$\text{Out[32]} = \frac{1}{2} a \left(-4 \sqrt{3} a + \sqrt{a^2} \left(3 \sqrt{3} + 4 \pi\right)\right)$$

In[33]:= **PowerExpand**[%]

$$\text{Out[33]} = \frac{1}{2} a \left(-4 \sqrt{3} a + a \left(3 \sqrt{3} + 4 \pi\right)\right)$$

In[34]:= **Simplify[%]**

$$\text{Out[34]} = -\frac{1}{2} a^2 \left(\sqrt{3} - 4 \pi \right)$$

Άσκηση 8.

Από τη παλέτα Basic Math Assistant $\rightarrow$ Basic Commands $\rightarrow$ $d \int \Sigma$ (Calculus Commands) $\rightarrow$ More μπορούμε να πάρουμε τον τύπο της εντολής Series με την προσθήκη της επιλογής Normal,

Normal[Series[*expr*, {*var*, *number*, *order*}]]

και να συμπληρώσουμε όπου **expr** την συνάρτηση της οποίας ψάχνουμε να βρούμε το ανάπτυγμα Taylor, όπου **var** την μεταβλητή ως προς την οποία θα αναπτύξουμε, όπου **number** τον αριθμό "γύρω" από τον οποίο κάνουμε το ανάπτυγμα και τέλος όπου **order** το πλήθος των όρων που απαιτούμε να έχει το ανάπτυγμα.

In[35]:= **a = Normal[Series[Log[x], {x, 1, 8}]]**

$$\text{Out[35]} = -1 - \frac{1}{2} (-1+x)^2 + \frac{1}{3} (-1+x)^3 - \frac{1}{4} (-1+x)^4 + \frac{1}{5} (-1+x)^5 - \frac{1}{6} (-1+x)^6 + \frac{1}{7} (-1+x)^7 - \frac{1}{8} (-1+x)^8 + x$$

In[36]:= **b = Normal[Series[ArcTan[x], {x, 0, 5}]]**

$$\text{Out[36]} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

In[37]:= **Together[Simplify[a + b]]**

$$\text{Out[37]} = \frac{1}{840} \left(-2283 + 7560 x - 11760 x^2 + 15400 x^3 - 14700 x^4 + 9576 x^5 - 3920 x^6 + 960 x^7 - 105 x^8 \right)$$