Ορισμοί υπερβολικών συναρτήσεων.

$$\begin{aligned}
\text{Υπερβολικό ημίτονο του } x: &\qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\
\text{Υπερβολικό συνημίτονο του } x: &\qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\
\text{Υπερβολική εφαπτομένη του } x: &\qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\\
\text{Υπερβολική συνεφαπτομένη του } x: &\qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\\
\text{Υπερβολική τέμνουσα του } x: &\qquad \mathrm{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}\\
\text{Υπερβολική συντέμνουσα του } x: &\qquad \mathrm{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Αν γράψουμε τα αναπτύγματα του e^x και e^{-x} γύρω απο το μηδέν, θα έχουμε,

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\\
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots
\end{aligned}$$

άρα το υπερβολικό συνημίτονο μπορεί να γραφεί και στη μορφή:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

Σχέσεις μεταξύ εκθετικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Αν στο ανάπτυγμα Maclaurin για τη συνάρτηση e^x αντικαταστήσουμε το x με $i\theta$ $(i^2 = -1)$ παίρνουμε,

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \cdots\\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)\\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

και συνεπώς ισχύει: $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$.
Απο τη τελευταία σχέση προκύπτουν εύκολα οι **ταυτότητες του Euler**

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\ , \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\ .$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\operatorname{arcsinh} x = \sinh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \qquad x \geq 1, \quad \operatorname{arccosh} x > 0 \text{ πρωτ. τιμή}$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad x > 1 \text{ ή } x < -1$$

$$\operatorname{arcsech} x = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \qquad 0 < x \leq 1 \quad \operatorname{arcsech} x > 0 \text{ πρωτ. τιμή}$$

$$\operatorname{arccsch} x = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) \qquad x \neq 0$$

Τύποι παραγώγισης

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u\,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u\,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u\,\tanh u\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u\,\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u\,\coth u\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}\ , u^2 > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}\ , u > 1 \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) = \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}\ , 0 < u < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}\ , u^2 < 1 \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}\ , u \neq 0$$