

Σύνθετοι Πίνακες

Ένας πίνακας που έχει πίνακες για στοιχεία ονομάζεται *σύνθετος*. Ένας οποιοσδήποτε πίνακας μπορεί να γραφεί σαν σύνθετος πίνακας με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 7 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

ή ακόμα και με τη μορφή:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 7 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 8 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{pmatrix}$$

Οι αλγεβρικές πράξεις στους σύνθετους πίνακες εκτελούνται μεταξύ των υποπινάκων σαν να ήταν στοιχεία. Έτσι αν

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad kA = \begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{m1} & kA_{m2} & \cdots & kA_{mn} \end{pmatrix}$$

και αν

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2n} + B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

Για το γινόμενο πινάκων, εάν

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1p} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{m1} & U_{m2} & \cdots & U_{mp} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{p1} & V_{p2} & \cdots & V_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{ο πολλαπλασιασμός}$$

τους επιτρέπεται μόνον εάν ο αριθμός των στηλών κάθε υποπίνακα U_{ik} είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του κάθε υποπίνακα V_{kj} . Έτσι:

$$U \cdot V = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{m1} & W_{m2} & \cdots & W_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad W_{ij} = U_{i1}V_{1j} + U_{i2}V_{2j} + \cdots + U_{ip}V_{pj}$$

Ο *ανάστροφος* (σύνθετος) πίνακας A^T ενός σύνθετου πίνακα A ορίζεται ως ο *ανάστροφος* των αναστρέφων υποπίνακων του πίνακα A . Δηλαδή, εάν

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{τότε} \quad A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{m1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{m2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n}^T & A_{2n}^T & \cdots & A_{mn}^T \end{pmatrix}$$

Ένας σύνθετος πίνακας A λέγεται *τετραγωνικός σύνθετος πίνακας* εάν

- (i) ο A είναι τετραγωνικός
- (ii) οι υποπίνακες στην διαγώνιο είναι επίσης τετραγωνικοί

Ο ορισμός αυτός υπονοεί ότι ο πίνακας A χωρίζεται σε υποπίνακες έτσι ώστε να παραμένει τετραγωνικός.

Παράδειγμα: Από τους παρακάτω πίνακες,

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 8 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 1 & 7 \\ \hline 4 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 8 \\ \hline 9 & 8 & 7 & 1 & 7 \\ \hline 4 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right)$$

μόνο ο B είναι σύνθετος τετραγωνικός.

Ένας σύνθετος πίνακας λέγεται *σύνθετος διαγώνιος* όταν οι υποπίνακες που βρίσκονται πάνω στη διαγώνιο είναι μη μηδενικοί και οι υπόλοιποι μηδενικοί.

Παράδειγμα: Ο παρακάτω πίνακας D είναι σύνθετος διαγώνιος, ενώ σαν απλός πίνακας δεν είναι διαγώνιος.

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right)$$