

Δειγματοληπτικές κατανομές

- **Σκοπός της στατιστικής συμπερασματολογίας:** η εξαγωγή αντικειμενικών συμπερασμάτων για έναν πληθυσμό από περιορισμένο αριθμό δεδομένων (δείγμα).
- Με την περιγραφική στατιστική συχνά μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη μορφή της κατανομής: $f(x; \theta)$ όπου θ μία ή περισσότερες άγνωστες παράμετροι.
- Για την εκτίμηση των τιμών του θ χρησιμοποιούμε δεδομένα: $X_1, X_2, \dots, X_n$ ενός τυχαίου δείγματος (τ.δ). Τα X_i είναι τ.μ. και ακολουθούν την κατανομή του χαρακτηριστικού που εκπροσωπούν στον πληθυσμό.
- Για την εκτίμηση των τιμών του θ χρησιμοποιούμε συναρτήσεις των $X_1, X_2, \dots, X_n$ που ονομάζονται **στατιστικές συναρτήσεις (σ.σ.)** ή **απλά στατιστικά**, π.χ. ο αριθμητικός μέσος ή η δειγματική διασπορά.
- Τα στατιστικά είναι τ.μ. με πιθανοτική συμπεριφορά που περιγράφεται από κατανομές: **δειγματοληπτικές κατανομές**

Κατανομή της δειγματικής μέσης τιμής

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Ο αριθμητικός μέσος

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

είναι σ.σ. και μελετάμε τη δειγματοληπτική της κατανομή.

(1) Για ένα τ.δ. ή απλό τ.δ. ισχύει: $E(\bar{X}) = \mu$

Η μέση τιμή της $\bar{X}$ είναι ίση με τη μέση τιμή του πληθυσμού.

(2) Για ένα τυχαίο δείγμα ισχύει: $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ και $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

δηλ. όταν αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος, τότε μειώνεται η μεταβλητότητα του $\bar{X}$ και αυξάνεται η ακρίβεια της εκτίμησης του μ .

(τυπικό σφάλμα: η τυπική απόκλιση της δειγμ. μέσης τιμής)

Κατανομή της δειγμ. μέσης τιμής (συνέχεια)

(3) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με κανονική κατανομή μέσης τιμής μ και διασποράς σ^2 : $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Τότε η δειγματική μέση τιμή $\bar{X}$ έχει επίσης κανονική κατανομή μέσης τιμής μ και διασποράς σ^2/n : $\mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

(4) **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα** (για τυχαία δείγματα)

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 (και οποιαδήποτε κατανομή). Η κατανομή της τ.μ. $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ τείνει στην τυπική κανονική $\mathcal{N}(0, 1)$ καθώς το n τείνει στο ∞ .

Κατανομή της δειγματικής αναλογίας

Έστω ότι μας ενδιαφέρει το ποσοστό (p) ενός πληθυσμού που έχει κάποιο χαρακτηριστικό (π.χ. το ποσοστό των φοιτητών που καπνίζουν). Παίρνουμε τ.δ. μεγέθους n και ορίζουμε τις τ.μ.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν έχει το χαρακτηριστικό} \\ 0 & \text{αν δεν έχει το χαρακτηριστικό} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Οι τ.μ. X_i έχουν κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p .
- Κατασκευάζουμε την τ.μ. $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ που έχει διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n (γνωστή) και p (άγνωστη).
- Η στατιστική συνάρτηση $\hat{p} = \frac{Y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ είναι δειγματική μέση τιμή και λέγεται **δειγματική αναλογία**.

Κατανομή της δειγμ. αναλογίας (συνέχεια)

- Η δειγματική αναλογία $\hat{p}$ έχει μέση τιμή και διασπορά:

$$E(\hat{p}) = p, \quad \text{Var}(\hat{p}) = \frac{pq}{n} \quad \text{και} \quad \sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

[δειγματική μέση τιμή των X_i από Bernoulli (p)]

- (Κ.Ο.Θ. για τη δειγματική αναλογία).

Αν $\hat{p}$ είναι η δειγματική αναλογία σε τ.δ. μεγέθους n από πληθυσμό Bernoulli (p), τότε η κατανομή της τ.μ.

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$

τείνει στην κανονική $\mathcal{N}(0, 1)$ καθώς το n τείνει στο ∞ .

Κανονική προσέγγιση της διωνυμικής

➤ Παρατηρούμε ότι:
$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{n\hat{p} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

διότι η τ.μ. Y ακολουθεί διωνυμική κατανομή και

$$E(Y) = np, \quad \text{Var}(Y) = npq$$

➤ **(Κ.Ο.Θ. για τη διωνυμική κατανομή).**

Αν Y είναι τ.μ με κατανομή $B(n, p)$, τότε η κατανομή της τ.μ.

$$\frac{Y - np}{\sqrt{npq}}$$

τείνει στην κανονική $\mathcal{N}(0, 1)$ καθώς το n τείνει στο ∞ .

[εμπειρικά εφαρμόζεται όταν $n > 30$, $np > 5$, $nq > 5$]

➤ Έτσι προφανώς ισχύει:

$$P(a \leq Y \leq b) \approx P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Κανονική προσέγγιση της διωνυμικής (συνέχεια)

➤ Διόρθωση της προσέγγισης

Επειδή προσεγγίζουμε μια διακριτή κατανομή με μία συνεχή η προσέγγιση είναι καλύτερη όταν διορθώσουμε τον προηγούμενο τύπο ως εξής:

$$P(a \leq Y \leq b) \approx P\left(\frac{(a - \frac{1}{2}) - np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{(b + \frac{1}{2}) - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Η κατανομή χ -τετράγωνο

Μια συνεχής τ.μ. U έχει την κατανομή χ^2_ν (με ν βαθμούς ελευθερίας) όταν η σ.π.π. είναι:

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} u^{\nu/2-1} e^{-u/2} & u > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

ο Ειδική περίπτωση της Γάμμα ($\alpha = \nu/2, \beta = 2$). Οπότε:

$$E(U) = \nu, \quad \text{Var}(U) = 2\nu$$

ο Λοξή προς τα δεξιά, τείνει να γίνει συμμετρική και να πλησιάσει την κανονική όταν μεγαλώσει αρκετά το ν .

Δηλαδή:

$$\frac{U - \nu}{\sqrt{2\nu}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{όταν } \nu \rightarrow \infty$$

ο Ο πίνακας Π5 δίνει τα αντίστροφα ποσοστιαία σημεία $\chi^2_{\alpha, \nu}$ για τα οποία $P(U \geq \chi^2_{\alpha, \nu}) = \alpha$ από 1 έως 30 β.ε.

Η κατανομή χ -τετράγωνο (συνέχεια)

- ο **Θεώρημα 1**: (Το τετράγωνο της τυπικής κανονικής κατανομής δίνει χ^2 με 1 β.ε.)

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow \frac{(X - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$$

- ο **Θεώρημα 2**: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. Τότε ισχύει:

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i) \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_n^2$$

- ο **Θεώρημα 3**: (Προσθετική ιδιότητα) Έστω $U_1, U_2, \dots, U_k$ ανεξάρτητες τ.μ. Τότε ισχύει:

$$U_i \sim \chi_{\nu_i}^2 \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow U = \sum_{i=1}^k U_i \sim \chi_{\nu}^2, \text{ όπου } \nu = \sum_{i=1}^k \nu_i$$

Η κατανομή της δειγματικής διασποράς

ο **Θεώρημα**: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Τότε ισχύει:

α) η δειγματική μέση τιμή και η δειγματική διασπορά είναι ανεξάρτητες τ.μ. και

$$(\beta) \quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Η κατανομή t (student- t)

Μια συνεχής τ.μ. T έχει την κατανομή t_ν (με ν βαθμούς ελευθερίας) όταν η σ.π.π. είναι:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad -\infty < t < \infty$$

$$E(T) = 0, \quad \text{Var}(T) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

- ο Συμμετρική γύρω από το 0
- ο Μέγιστη τιμή στο 0
- ο Γραφική παράσταση παρόμοια με την τυπική κανονική
- ο Όταν μεγαλώσει αρκετά το ν η κατανομή t συμπίπτει με την τυπική κανονική κατανομή.
- ο Ο πίνακας Π6 δίνει τα αντίστροφα ποσοστιαία σημεία $t_{\alpha,\nu}$, δηλ. εκείνα για τα οποία $P(T \geq t_{\alpha,\nu}) = \alpha$ από 1 έως 30 β.ε.
- ο Ισχύει ότι: $t_{1-\alpha,\nu} = -t_{\alpha,\nu}$

Η κατανομή t (συνέχεια)

- ο **Θεώρημα 1:** Έστω Z και U δύο ανεξάρτητες τ.μ. και $Z \sim N(0,1)$ ενώ $U \sim \chi^2_\nu$. Τότε

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \sim t_\nu$$

- ο **Θεώρημα 2:** Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma)$. Τότε

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

(δηλ. η δειγματική μέση τιμή έχει κατανομή t όταν το δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό και η διασπορά είναι άγνωστη)

Κατανομή της διαφοράς δειγματικών μέσων τιμών

Έστω $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1,n_1}$ τ. δ. από πληθυσμό με μέση τιμή μ_1 και διασπορά σ_1^2 και $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2,n_2}$ τ. δ. από πληθυσμό με μέση τιμή μ_2 και διασπορά σ_2^2 . Εάν οι αριθμητικοί μέσοι για το πρώτο και δεύτερο δείγμα είναι $\bar{X}_1$ και $\bar{X}_2$, αντίστοιχα, τότε η διαφορά τους $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ είναι τ.μ. και ισχύει:

(1) Η μέση της τιμή ισούται με τη διαφορά των μέσων τιμών του πληθυσμού :

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

(η $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου $\mu_1 - \mu_2$)

(2) Εάν επιπλέον τα δείγματα είναι ανεξάρτητα και μεταξύ τους, τότε η διασπορά της διαφοράς και το τυπικό σφάλμα της είναι:

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}^2 = \text{Var}(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \quad \text{και} \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Κατανομή της διαφοράς δειγματικών μέσων τιμών (συνέχεια)

(3) Έστω ότι τα τ.δ. προέρχονται από πληθυσμούς με κανονικές κατανομές $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ και $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, αντίστοιχα.

Τότε η δειγματοληπτική κατανομή της σ.σ. $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ είναι επίσης κανονική μέσης τιμής $\mu_1 - \mu_2$ και διασποράς $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$.

(4) Στη περίπτωση που οι διασπορές των πληθυσμών είναι άγνωστες αλλά ίσες $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, τότε η τ.μ.

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \text{ όπου}$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

έχει κατανομή $t_{n_1+n_2-2}$.

Κατανομή της διαφοράς αναλογιών

Έστω δύο πληθυσμοί Bernoulli, όπου κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό υπάρχει σε αναλογίες p_1 και p_2 , αντίστοιχα. Παίρνουμε δύο ανεξάρτητα τ. δ. μεγέθους n_1 και n_2 . Υπολογίζουμε τις δειγματικές αναλογίες $\hat{p}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}$ και $\hat{p}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$.

Τότε εφ' όσον τα μεγέθη των δειγμάτων είναι αρκετά μεγάλα, η κατανομή της τ. μ. $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή.

Συνεπώς:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Επίσης προσεγγιστικά ισχύει:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Η κατανομή $\mathcal{F}$

Μια συνεχής τ.μ. F έχει κατανομή $\mathcal{F}$ (με ν_1 και ν_2 β. ε.) όταν η σ.π.π. είναι:

$$g(f) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2/2)}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{f^{(\nu_1-2)/2}}{\left(\frac{\nu_2 + \nu_1 f}{\nu_2}\right)^{(\nu_1 + \nu_2)/2}} & f > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E(F) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}, (\nu_2 > 2) \quad \text{Var}(F) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 2)^2}, (\nu_2 > 4)$$

- ο Λοξή προς τα δεξιά και τείνει να γίνει συμμετρική όταν μεγαλώσουν αρκετά τα ν_1 και ν_2 .
- ο Ο πίνακας Π7 δίνει αντίστροφα ποσοστιαία σημεία της για διαφορετικές τιμές των ν_1 και ν_2 : $P(F \geq F_{a, \nu_1, \nu_2}) = a$

Η κατανομή F (συνέχεια)

- ο **Θεώρημα:** Έστω U_1 και U_2 ανεξάρτητες τ.μ. και $U_1 \sim \chi_{\nu_1}^2$ ενώ $U_2 \sim \chi_{\nu_2}^2$. Τότε

$$F = \frac{U_1 / \nu_1}{U_2 / \nu_2} \sim \mathcal{F}_{\nu_1, \nu_2}$$

όπου ν_1 οι β.ε. του αριθμητή και ν_2 οι β.ε. του παρονομαστή

- ο **Λήμμα:** Αν $F \sim \mathcal{F}_{\nu_1, \nu_2}$ τότε $1/F \sim \mathcal{F}_{\nu_2, \nu_1}$ και ισχύει

$$F_{1-a, \nu_1, \nu_2} = \frac{1}{F_{a, \nu_2, \nu_1}}$$

όταν F_{1-a, ν_1, ν_2} είναι το σημείο με $P(F < F_{1-a, \nu_1, \nu_2}) = a$.

Κατανομή του λόγου διασπορών

Έστω δύο πληθυσμοί με κατανομές $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ και $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, αντίστοιχα. Παίρνουμε δύο ανεξάρτητα τ. δ. μεγέθους n_1 και n_2 και έστω s_1^2 και s_2^2 οι δειγματικές διασπορές τους. Τότε ισχύει:

$$\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1}$$

Διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή ενός πληθυσμού

(1) Πληθυσμός κανονικός $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ και γνωστή διασπορά. $(1-\alpha)\%$ δ.ε για το μ : $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2) Πληθυσμός κανονικός $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ και άγνωστη διασπορά. $(1-\alpha)\%$ δ.ε για το μ : $\bar{X} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$

(3) Πληθυσμός ανεξαρτήτου κατανομής και αρκετά μεγάλο δείγμα : $(1-\alpha)\%$ δ.ε για το μ : $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

Δ.Ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ μέσων τιμών δύο πληθυσμών - με ανεξάρτητα δείγματα

(1) Πληθυσμοί κανονικοί $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, και

γνωστές διασπορές. $(1-\alpha)\%$ δ.ε:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

(2) Πληθυσμοί κανονικοί $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, και

άγνωστες αλλά ίσες διασπορές. $(1-\alpha)\%$ δ.ε:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

όπου

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

(3) Πληθυσμοί ανεξαρτήτου κατανομής και αρκετά

μεγάλα δείγματα. $(1-\alpha)\%$ δ.ε:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Δ.Ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ μέσω των τιμών δύο πληθυσμών - με δείγματα κατά ζεύγη

Υποθέτουμε κανονικούς πληθυσμούς: $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ και $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ και τα δεδομένα αποτελούνται από n ανεξάρτητα ζεύγη: (X_i, Y_i) , $i=1, 2, \dots, n$. Υπολογίζουμε τις διαφορές: $D_i = X_i - Y_i$ και προκύπτει τ.δ. (των διαφορών) από κανονικό πληθυσμό με δειγματική μέση τιμή: $\bar{D} = \bar{X} - \bar{Y}$.

Ισχύει ότι: $\mu_D = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$

Το $(1-\alpha)\%$ δ.ε. για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ των μέσων τιμών είναι:

$$\bar{D} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

Δ.Ε. για αναλογίες

(1) Για την αναλογία p ενός πληθυσμού

Υποθέτουμε ότι το δείγμα είναι αρκετά μεγάλο. Το $(1-\alpha)\%$ δ.ε. είναι:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \hat{q}}{n}}$$

(2) Για τη διαφορά $p_1 - p_2$ των αναλογιών δύο πληθυσμών

Υποθέτουμε ότι τα δείγματα είναι αρκετά μεγάλα. Το $(1-\alpha)\%$ δ.ε. είναι:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}$$

Δ.Ε. για διασπορές

(1) Για τη διασπορά σ^2 ενός πληθυσμού

Πληθυσμός κανονικός $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Το $(1-\alpha)\%$ δ.ε. είναι:

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}} \right)$$

(2) Για το λόγο σ_2^2/σ_1^2 των διασπορών δύο πληθυσμών

Πληθυσμοί κανονικοί $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Το $(1-\alpha)\%$ δ.ε. είναι:

$$\left(\frac{s_2^2}{s_1^2} F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}, \frac{s_2^2}{s_1^2} F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \right)$$