

1.0 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Έστω ότι με K συμβολίζουμε ένα οποιοδήποτε σώμα, όταν με την έννοια «σώμα» αναφερόμαστε σε ένα σύνολο, όπως για παράδειγμα το $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, το $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, το $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, κ.ο.κ.

Ορισμός: Ένα σύνολο V ονομάζεται *διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K ή K -χώρος* αν

- I. Το V είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, δηλαδή αν $u, v \in V$, τότε $u+v \in V$
- II. Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τη πράξη της πρόσθεσης, δηλ. $u+v=v+u$ για όλα τα $u, v \in V$.
- III. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα για τη πράξη της πρόσθεσης, δηλ. $u+(v+w)=(u+v)+w$ για όλα τα $u, v, w \in V$.
- IV. Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο για τη πράξη της πρόσθεσης, δηλ. $\exists 0 \in V$ τέτοιο ώστε $u+0=0+u=u$ για όλα τα $u \in V$.
- V. Για κάθε $u \in V$, υπάρχει στοιχείο $(-u) \in V$, τέτοιο ώστε $u+(-u)=(-u)+u=0$.
- VI. Για κάθε $\alpha \in K, u \in V$ ορίζεται ένα στοιχείο $\alpha \cdot u \in V$, το οποίο ονομάζεται *βαθμωτό πολλαπλάσιο του u επί το α* , και ισχύουν οι κάτωθι ιδιότητες:
 - (α) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ για όλα τα $\alpha \in K, u, v \in V$
 - (β) $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ για όλα τα $\alpha, \beta \in K, v \in V$
 - (γ) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$ για όλα τα $\alpha, \beta \in K, v \in V$
 - (δ) $1 \cdot v = v$ για όλα τα $v \in V$

Τα στοιχεία του συνόλου V λέγονται *διανύσματα*, ενώ εκείνα του K *συντελεστές*.

Παραδείγματα:

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω στον εαυτό του χάριν των ιδιοτήτων των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Το ίδιο ισχύει και για το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.

2. Έστω τώρα το σύνολο $\mathbb{R}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \ i = 1, \dots, n\}$ όλων των διατεταγμένων n -άδων πραγματικών αριθμών. Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τη *πρόσθεση στοιχείων* στο $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

και το *βαθμωτό πολλαπλασιασμό στοιχείων* του $\mathbb{R}^n$ επί στοιχεία του $\mathbb{R}$, θέτοντας

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Τέλος, ορίζουμε το *ουδέτερο στοιχείο* $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ και το *αντίθετο στοιχείο* του $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ως το στοιχείο $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$. Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ αποτελεί διανυσματικό χώρο διότι πληρεί όλα τα αξιώματα του ορισμού του. Με αντίστοιχους ορισμούς επαληθεύεται ότι και το σύνολο $\mathbb{C}^n$ όλων των διατεταγμένων n -άδων μιγαδικών αριθμών αποτελεί επίσης διανυσματικό χώρο.

3. Θεωρούμε το σύνολο Π όλων των πολωνύμων μιας πραγματικής μεταβλητής t με πραγματικούς συντελεστές. Με τους γνωστούς ορισμούς της προσθέσεως δύο πολωνύμων και του πολλαπλασιασμού με πραγματικό αριθμό, με μηδενικό στοιχείο το μηδενικό πολώνυμο και με αντίθετο στοιχείο το πολώνυμο με αντίθετους συντελεστές από το αρχικό, επαληθεύεται εύκολα ότι το σύνολο Π αποτελεί ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο. Όμοια το σύνολο $\Pi^n \subset \Pi$ όλων των πολωνύμων βαθμού μικρότερου του n αποτελεί πραγματικό διανυσματικό χώρο. Όμως το σύνολο όλων των πολωνύμων βαθμού n δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο διότι το άθροισμα δύο πολωνύμων βαθμού n δεν είναι πάντοτε πολώνυμο βαθμού n , όπως για παράδειγμα των πολωνύμων $t^n + 1$ και $-t^n + t^2 + 5$.

4. Έστω $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ το σύνολο όλων των $m \times n$ πραγματικών πινάκων. Έχοντας ορίσει την πρόσθεση πινάκων και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό πινάκων επί στοιχεία του $\mathbb{R}$ στην αρχή του μαθήματος, είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ο $\mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ αποτελεί $\mathbb{R}$ -χώρο.

5. Έστω F το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων $f(x)$ που ορίζονται σε κάποιο συγκεκριμένο διάστημα π.χ. το $[0,1]$ ή και σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό με τις πράξεις της συνήθους πρόσθεσης συναρτήσεων και βαθμωτού γινομένου συναρτήσεως με πραγματικό αριθμό

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$.

1.1 Διανυσματικοί Υπόχωροι

Έστω V ένας K -χώρος.

Ορισμός: Ένα μη κενό υποσύνολο W του V λέγεται *διανυσματικός υπόχωρος* του V αν το W είναι ένας K -χώρος με τον ίδιο ορισμό της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως εκείνοι του V .

Για να αποδείξουμε ότι ένα μη-κενό υποσύνολο W είναι υπόχωρος του V αρκεί να εφαρμόσουμε την κάτωθι πρόταση:

Πρόταση: Ένα μη-κενό υποσύνολο W του V είναι ένας υπόχωρος του V αν και μόνον αν $au+nv \in W$ για όλα τα $a \in K, u, v \in W$

Παραδείγματα:

1. Κάθε διανυσματικός χώρος V έχει τουλάχιστον δύο υπόχωρους, τους V και $\{0\}$.
2. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ και το υποσύνολο αυτού E που αποτελείται από διανύσματα της μορφής $u = (u_1, u_2, \dots, u_k, 0, \dots, 0)$, όπου k φυσικός αριθμός μικρότερος του n . Το σύνολο E είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, διότι αν $u, v \in E$ και $a \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} au+nv &= a(u_1, u_2, \dots, u_k, 0, \dots, 0) + (v_1, v_2, \dots, v_k, 0, \dots, 0) = \\ &= (au_1 + v_1, au_2 + v_2, \dots, au_k + v_k, 0, \dots, 0) \in E \end{aligned}$$

Αντίθετα, αν θεωρήσουμε το υποσύνολο E' που αποτελείται από διανύσματα της μορφής $u = (1+u_2, u_2, \dots, u_n)$, τότε το E' δεν αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, διότι αν επιλέξουμε το διάνυσμα $(2, 1, 0, 0, \dots, 0)$ που ανήκει στο E' , τότε παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $2(2, 1, 0, 0, \dots, 0) = (4, 2, 0, 0, \dots, 0) \notin E'$.

Τώρα θεωρούμε τρόπους κατασκευής ορισμένων σημαντικών υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου. Αν U και W είναι υπόχωροι του V , τότε η τομή των U και W , $U \cap W$, είναι επίσης υπόχωρος, γιατί $0 \in U \cap W$ και αν $a \in K, u, v \in U \cap W$ τότε $u, v \in U$ και $u, v \in W$, άρα $au+nv \in U$ και $au+nv \in W$ το οποίο δίνει $au+nv \in U \cap W$. Αντίθετα, η ένωση των U και W , $U \cup W$ δεν είναι πάντοτε υπόχωρος του V . Για παράδειγμα, έστω $U = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ και $W = \{(0, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$ δύο υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin U \cup W$, δηλ. ο $U \cup W$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

Επίσης, ορίζουμε το *άθροισμα* των υποχώρων U και W του V να είναι το υποσύνολο $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ και αποδεικνύεται εύκολα ότι το $U + W$ είναι πάντοτε υπόχωρος του V . Γενικότερα, ισχύει:

Ορισμός: Έστω $W_1, W_2, \dots, W_k$ υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V πάνω στο K . Ονομάζουμε *άθροισμα των υποχώρων* $W_1, W_2, \dots, W_k$ το σύνολο

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_k = \{w_1 + w_2 + \dots + w_k \mid w_i \in W_i, i = 1, 2, \dots, k\}$$

και αποδεικνύεται ότι:

Λήμμα: (i) $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k$ είναι ένας υπόχωρος του V .
(ii) $W_1 + W_2 + \dots + W_k$ είναι ένας υπόχωρος του V .

Έστω τώρα διανυσματικός χώρος V πάνω στο σώμα K και $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του. Εάν συμβολίσουμε με U το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$ των στοιχείων $v_1, v_2, \dots, v_k$ όταν $a_i \in K$, τότε αποδεικνύεται ότι το U είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Στη περίπτωση που εξετάσαμε πιο πάνω, ο υπόχωρος U , ο οποίος αποτελείται από γραμμικούς συνδυασμούς των k στοιχείων $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ του V , λέγεται *υπόχωρος που παράγεται (ή γεννιέται) από το υποσύνολο* $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ και συμβολίζεται με $U = \langle S \rangle$ ή $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$. Ένας υπόχωρος U του V , ο οποίος παράγεται από ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V , λέγεται *πεπερασμένα παραγόμενος* υπόχωρος του V . Παρατηρούμε επίσης ότι κάθε άλλος υπόχωρος U' του V που περιέχει τα στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_k$ θα είναι υπερσύνολο του U , διότι κάθε διάνυσμα $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_kv_k$ που ανήκει εξ' ορισμού στον U θα ανήκει και στον U' . Γι' αυτό ο U λέγεται ότι είναι ο *μικρότερος* από τους υπόχωρους που περιέχουν τα στοιχεία $v_1, v_2, \dots, v_k$.

(**Σημ.** Οι ορισμοί αυτοί μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που το S περιέχει άπειρα στοιχεία. Τότε και πάλι ο U είναι ένας υπόχωρος του V , δηλ. εκείνος που παράγεται από τον S .)

1.2 Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάση και Διάσταση

Έστω V ένας K -χώρος.

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ του V λέμε ότι είναι *γραμμικά εξαρτημένο* πάνω στο K αν υπάρχουν $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$ (όχι όλα μηδέν) έτσι ώστε

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

Αν δεν είναι εξαρτημένο, τότε λέμε ότι το $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο K . Με άλλα λόγια, αν $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ συνεπάγεται $\alpha_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$), τότε το $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο K .

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $S \subseteq V$ είναι μία K -βάση για τον V , αν

- (i) Το S παράγει τον V
- (ii) Το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο K .

Με άλλα λόγια, αν το υποσύνολο $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε για να είναι βάση του χώρου V θα πρέπει: (1) αν $v \in V$, τότε να υπάρχουν αριθμοί $\alpha_i \in K$ ($i = 1, 2, \dots, k$) έτσι ώστε $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$, και (2) αν $\sum_{i=1}^k \beta_i v_i = 0$ με $\beta_i \in K$ ($i = 1, 2, \dots, k$) τότε οπωσδήποτε $\beta_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Παράδειγμα: Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3 = \{(\alpha, \beta, \gamma)^T \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Το σύνολο των διανυσμάτων $\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$ αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$, διότι όπως πολύ εύκολα αποδεικνύεται, αφ' ενός είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και αφ' ετέρου παράγουν τον χώρο $\mathbb{R}^3$.

Η βάση ενός διανυσματικού χώρου δεν είναι μοναδική, όμως όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Ορισμός: Ο αριθμός των στοιχείων μιας K -βάσης για έναν K -χώρο V λέγεται *διάσταση* του V πάνω στον K και συμβολίζεται με $\dim V$. Ο V λέγεται *διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης*.

Ασκήσεις:

- (1) Να εξεταστεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών συναρτήσεων είναι διανυσματικοί χώροι.
 - (α) Το σύνολο των συναρτήσεων f για τις οποίες $2f(0) = f(1)$
 - (β) Το σύνολο των συναρτήσεων f για τις οποίες $f(1) = 1 + f(0)$

- (γ) Το σύνολο των συναρτήσεων f για τις οποίες $f(x) = f(1-x)$
- (δ) Το σύνολο των συναρτήσεων f για τις οποίες $\int_0^1 f(t)dt = 0$
- (ε) Το σύνολο των συναρτήσεων f για τις οποίες $\int_0^1 f(t)dt = 1$
- (2)** Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων πάνω σε κάποιο σώμα K . Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα πινάκων W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V .
- (i) Το σύνολο W των συμμετρικών πινάκων, δηλ. όλων των πινάκων $A=(a_{ij})$ για τους οποίους ισχύει $a_{ji}=a_{ij}$.
- (ii) Το σύνολο W των πινάκων που αντιμετατίθενται με κάποιο συγκεκριμένο πίνακα T , δηλ. $W = \{A \in V \mid AT = TA\}$.
- (3)** Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των 2×2 πινάκων πάνω στο $\mathbb{R}$. Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα W είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V .
- (i) Το σύνολο W που αποτελείται από όλους τους ιδιάζοντες 2×2 πινάκες.
- (ii) Το σύνολο W που αποτελείται από τους 2×2 πινάκες A για τους οποίους ισχύει $A^2=A$.
- (4)** Να εξεταστεί ποια από τα επόμενα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι του.
- (α) Το σύνολο των διανυσμάτων (x, y, z) με $x = 0$
- (β) Το σύνολο των διανυσμάτων (x, y, z) με $x = 1$
- (γ) Το σύνολο των διανυσμάτων (x, y, z) με $xy = 0$
- (δ) Το σύνολο των διανυσμάτων (x, y, z) με $3x + 4y = 1, \quad z = 0$
- (ε) Το σύνολο των διανυσμάτων (x, y, z) με $z - y + 3x = 0$
- (στ) Το σύνολο των διανυσμάτων (x, y, z) που μπορούν να γραφούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $(1, 1, 0)$ και $(2, 0, 1)$
- (5)** Ναδειχθεί ότι τα διανύσματα $(1, 2, 1)^T, (1, -1, 3)^T$ και $(1, 1, 4)^T$ συνιστούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$. Έστω (x, y, z) ένα τυχαίο διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^3$. Ποιες οι συνιστώσες του διανύσματος αυτού ως προς την συγκεκριμένη βάση;
- (6)** Έστω V ο διανυσματικός χώρος όλων των συμμετρικών 2×2 πινάκων πάνω στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\dim V = 3$.