2.0 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω n διανύσματα που ανήκουν στο χώρο $\mathbb{R}^m$: $\boldsymbol{\delta}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^T \quad i = 1, 2, \ldots, n$ και έστω γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{\delta}_i$: $x_1\boldsymbol{\delta}_1 + x_2\boldsymbol{\delta}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\delta}_n = \mathbf{b}$ που ισούται με το διάνυσμα **b**, όπου $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$. Όταν $\mathbf{b} \neq 0$, ο γραμμικός συνδυασμός αντιστοιχεί στο μη ομογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ και όταν $\mathbf{b} = 0$, στο ομογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, όπου $A_{m\times n}$ ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n$. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση του ομογενούς συστήματος εξισώσεων και στη συνέχεια του μη-ομογενούς.

2.1 Ομογενή Συστήματα

Εάν r είναι η τάξη του πίνακα A, όπως έχουμε δεί στα συστήματα, η γενική λύση του ομογενούς συστήματος γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός ενός πεπερασμένου πλήθους ($n - r$) στοιχείων του $\mathbb{R}^n$. Επομένως, το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς συστήματος αποτελεί διανυσματικό χώρο και λέγεται *μηδενόχωρος του* A. Ο μηδενόχωρος του A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζεται με $\mathcal{N}(A)$.

Έστω τώρα ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα A, π.χ. τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n$: $< \boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n >$. Ο χώρος αυτός αποτελείται από στοιχεία του $\mathbb{R}^m$ και είναι υπόχωρος του, ονομάζεται *χώρος των στηλών* του πίνακα A, και συμβολίζεται με $\mathcal{R}(A)$. Εάν το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, τότε τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση για το χώρο $\mathcal{R}(A)$, συνεπώς $\dim \mathcal{R}(A) = n$. Επιπλέον, αφού το σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση, η τάξη r του πίνακα A ισούται με n ενώ ο μηδενόχωρος έχει διάσταση μηδέν γιατί περιέχει μόνο το μηδενικό στοιχείο.

Αντίθετα, έστω ότι υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις στο ομογενές σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Για παράδειγμα, έστω μία λύση $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — όχι όλα μηδέν . Τότε:

$$a_1\boldsymbol{\delta}_1 + a_2\boldsymbol{\delta}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\delta}_n = \mathbf{0}$$

και τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα μεταξύ τους. Εάν η τάξη του πίνακα A είναι r τότε $r < n$ και ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}(A)$ περιέχει και άλλα στοιχεία (άπειρα στο πλήθος) εκτός του μηδενικού διανύσματος. Κάθε στοιχείο του μηδενόχωρου γράφεται με τη βοήθεια $n - r$ ελεύθερων μεταβλητών και συνεπώς σαν γραμμικός συνδυασμός $n-r$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Αποδεικνύεται ότι αυτά τα $n-r$ διανύσματα αποτελούν μία βάση του συγκεκριμένου χώρου. Καταλήγουμε δηλαδή στο συμπέρασμα ότι $\dim \mathcal{N}(A) = n-r$. Τέλος, αναφορικά με τα n διανύσματα $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_n$, υπάρχουν ακριβώς r που είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν μια βάση του χώρου των στηλών $\mathcal{R}(A)$, δηλαδή $\dim \mathcal{R}(A) = r$.

Εκτός των δύο υποχώρων που μόλις αναφέραμε, δοθέντος ενός πίνακα A, μπορούμε να σκεφτούμε και τον *χώρο των γραμμών* του πίνακα, δηλαδή τον χώρο που προκύπτει εάν πάρουμε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των γραμμών του πίνακα. Επειδή οι γραμμές του πίνακα A είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$, ο χώρος των γραμμών είναι υπόχωρος του. Τέλος, επειδή οι γραμμές του πίνακα A είναι στήλες για τον πίνακα A^T, ο χώρος των γραμμών του A συμπίπτει με τον χώρο των στηλών του A^T και συμβολίζεται με $\mathcal{R}(A^T)$.

Κατά τη διάρκεια της επίλυσης του ομογενούς συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και μετά την εφαρμογή της απαλοιφής Gauss, εάν ο πίνακας A έχει τάξη r τότε ακριβώς r γραμμές θα είναι μη μηδενικές. Οι υπόλοιπες, εφ' όσον υπάρχουν, θα είναι μηδενικές. Έτσι για τη δημιουργία του χώρου των γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$ αρκούν οι r μη μηδενικές, γιατί οι άλλες δεν συνεισφέρουν τίποτε σε οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό. Επιπλέον, οι r μη μηδενικές γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι καταλήγουμε ότι αυτές οι r γραμμές συνιστούν μία βάση για τον χώρο των γραμμών και ότι $\dim \mathcal{R}(A^T) = r$

Συνεπώς μπορούμε να πούμε:

“ *Η τάξη του πίνακα A είναι ίση με τον μέγιστο αριθμό των στηλών ή γραμμών του πίνακα που είναι γραμμικά ανεξάρτητες* ”

Παράδειγμα:

Έστω πέντε διανύσματα στον $\mathbb{R}^4$

$\boldsymbol{\delta}_1 = (1 \quad 3 \quad 0 \quad 5)^T$, $\boldsymbol{\delta}_2 = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 4)^T$, $\boldsymbol{\delta}_3 = (1 \quad 1 \quad 2 \quad 3)^T$,

$\boldsymbol{\delta}_4 = (1 \quad 1 \quad 2 \quad 3)^T$, $\boldsymbol{\delta}_5 = (1 \quad -3 \quad 6 \quad -1)^T$

Ο γραμμικός συνδυασμός $x_1\boldsymbol{\delta}_1 + x_2\boldsymbol{\delta}_2 + a_3\boldsymbol{\delta}_3 + x_4\boldsymbol{\delta}_4 + a_5\boldsymbol{\delta}_5 = \mathbf{0}$, οδηγεί στην επίλυση του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι το σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις με γενική μορφή: $\mathbf{x} = (u_1 + u_2 + 5u_3, -2u_1 - 2u_2 - 6u_3, u_1, u_2, u_3)^T$ και συνεπώς τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3, \boldsymbol{\delta}_4, \boldsymbol{\delta}_5$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Η λύση γράφεται με τη βοήθεια 5-2=3 μεταβλητών, διότι η τάξη του πίνακα είναι 2. Συνεπώς:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + 5u_3 \\ -2u_1 - 2u_2 - 6u_3 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_3 .$$

Επιπλέον, τα διανύσματα $\{(1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}, \ (1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^{\mathrm{T}}$ και $(1 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^{\mathrm{T}}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και αποτελούν βάση του μηδενόχωρου του A που είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$. Συμπεραίνουμε ότι $\dim \mathcal{N}(A) = 3$.

Εάν πάρουμε οποιαδήποτε τρία ή τέσσερα από τα διανύσματα $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_5$ παρατηρούμε ότι κι αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε το υποσύνολο $\{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_5\}$. Σχηματίζουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0 \\ 3y_1 + 2y_2 - 3y_3 &= 0 \\ y_2 + 6y_3 &= 0 \\ 5y_1 + 4y_2 - y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ακολουθώντας την απαλοιφή Gauss ο πίνακας των συντελεστών μετασχηματίζεται

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 6\\ 5 & 4 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -6\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

και η γενική λύση του συστήματος είναι της μορφής:

$$\mathbf{y} = (5u, -6u, u)^T .$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι $5\boldsymbol{\delta}_1 - 6\boldsymbol{\delta}_2 + \boldsymbol{\delta}_5 = \mathbf{0}$ και τα διανύσματα $\{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_5\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Αντίθετα, από το υποσύνολο $\{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2\}$ προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 0 \\ 3y_1 + 2y_2 &= 0 \\ y_2 &= 0 \\ 5y_1 + 4y_2 &= 0 \end{aligned}$$

που έχει μία και μοναδική λύση την $y_1 = y_2 = 0$. Έτσι τα διανύσματα $\{\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνιστούν μία βάση για το χώρο των στηλών $\mathcal{R}(A)$ δηλαδή $\dim \mathcal{R}(A) = 2$.

2.2 Μη ομογενή Συστήματα

Στα μη ομογενή συστήματα, το διάνυσμα $\mathbf{b}$ είναι διάφορο του μηδενός και μας ενδιαφέρει να βρούμε το σύνολο των $\mathbf{b}$ για τα οποία υπάρχει λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Όταν υπάρχει λύση τότε το $\mathbf{b}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A και από αυτό συνεπάγεται ότι ο χώρος των δυνατών τιμών του $\mathbf{b}$ που δίνουν λύση στο σύστημα παράγεται από τις στήλες του A, δηλαδή συμπίπτει με το χώρο των στηλών, και έχει διάσταση r. **Αντίθετα από τα ομογενή συστήματα, ο χώρος των λύσεων ενός μη ομογενούς συστήματος δεν αποτελεί διανυσματικό χώρο**.

Παράδειγμα: Το μη ομογενές σύστημα:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2\\
x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23\\
5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12
\end{aligned}
$$

έχει τη γενική λύση

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + 5u_3 - 16 \\ -2u_1 - 2u_2 - 6u_3 + 23 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 + \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_3 + \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Ο χώρος των λύσεων προφανώς δεν είναι διανυσματικός χώρος (λόγω της μερικής του λύσης).

Τέλος, το διάνυσμα $\mathbf{b} = (7 \quad -2 \quad 23 \quad 12)^{\mathrm{T}}$, μπορεί να γραφεί σαν συνδυασμός των στηλών, π.χ.

$$
\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix} = -16 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 23 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

δηλαδή ανήκει στο χώρο των στηλών και γι' αυτό το σύστημα έχει λύση. Αντίθετα, εάν το διάνυσμα $\mathbf{b}$ στο δεύτερο μέλος ήταν $\mathbf{b} = (7 \quad -2 \quad 23 \quad 0)^{\mathrm{T}}$, τότε δεν θα ανήκε στο χώρο των στηλών, δεν θα ήταν δυνατόν να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στηλών και συνεπώς το σύστημα θα ήταν αδύνατο.