– ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ –

– Ηλεκ/γων Μηχ/κών & Τεχνολογίας Υπολογιστών 2006/07 –

ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

1. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&3&0\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν τα γινόμενα AB, BA, $A\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A$.
2. Έστω ο πίνακας $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$ και έστω A οποιοσδήποτε 3x3 πίνακας.

   (α) Περιγράψτε τις γραμμές του πίνακα EA με τη βοήθεια των γραμμών του A.
   (β) Περιγράψτε τις στήλες του πίνακα AE με τη βοήθεια των στηλών του A.
3. Έστω το μοναδιαίο διάνυσμα e_j που περιέχει τον αριθμό 1 στην j γραμμή και 0 οπουδήποτε αλλού. Εάν A είναι οποιοσδήποτε nxn πίνακας να περιγράψετε τα γινόμενα: (α) Ae_j, (β) $e_i^T A$ και (γ) $e_i^T Ae_j$.
4. Έστω A και B δύο mxn πίνακες. Εάν ισχύει $Ax = Bx$ για κάθε nx1 διάνυσμα x, να δειχθεί ότι $A = B$.
5. Να δειχθεί ότι για κάθε mxn πίνακα A, οι πίνακες $A^{\mathrm{T}}A$ και AA^{T} είναι συμμετρικοί.
6. Να δειχθεί ότι (α) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, (β) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ και (γ) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA)$. Ισχύει και $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$;
7. Έστω οι πίνακες $\mathbf{C}=\left(\begin{array}{cc:ccc}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\ \hdashline 0&0&5&1&2\\0&0&3&4&1\end{array}\right)$ και $\mathbf{D}=\left(\begin{array}{cc:cc}3&-2&0&0\\2&4&0&0\\ \hdashline 0&0&1&2\\0&0&2&-1\\0&0&-4&1\end{array}\right)$. Να υπολογιστεί ο πίνακας $\mathbf{CD}$ με πολλαπλασιασμό σύνθετων πινάκων.
8. Να υπολογίσετε τα γινόμενα στους παρακάτω σύνθετους πίνακες

   (α) $[I\ A]\,[I\ A]^{\mathrm{T}}$, (β) $[I\ A^{\mathrm{T}}]\,[-A\ I]^{\mathrm{T}}$, (γ) $\begin{bmatrix}I&A\\O&-I\end{bmatrix}^3$, (δ) $\begin{bmatrix}O&A\\I&O\end{bmatrix}^5$

   όπου όλοι οι υποπίνακες είναι $n\times n$.
9. Δίνεται ο διαμερισμένος πίνακας $\mathrm{A}=\left[\begin{array}{c:cc}1&0&0\\ \hdashline 1&1&-1\\1&-1&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_1&O\\A_2&A_3\end{bmatrix}$. Να υπολογίσετε τα A^2, A^3 και επαγωγικά να βρείτε τον A^k.
10. Με ποια σειρά πολλαπλασιάζονται οι σύνθετοι πίνακες;

$$\mathrm{A}=\left[\begin{array}{cc:c}3&4&2\\ \hdashline -2&-1&-1\\-1&-3&-1\end{array}\right]\qquad \mathrm{B}=\left[\begin{array}{c:cc}-1&-1&-1\\ \hdashline 2&2&2\\1&1&1\end{array}\right]$$

11. Εάν $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ να δειχθεί ότι $A^{202} - 3A^{147} + 2I = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

12. Αν $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ο πίνακας $A^{2003} - 3\,A^{2002} + 2\,I$.

13. Υποθέτουμε ότι οι nxn πίνακες $A, B, A-B$, και I+A είναι αντιστρέψιμοι. Να δειχθεί ότι:

    a. $(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})^{-1}A^{-1}$

    b. $(I+A)^{-1} = I - (A^{-1} + I)^{-1}$

    c. $\mathrm{tr}(I+A)^{-1} + \mathrm{tr}(A^{-1}+I)^{-1} = n$

14. Αν ο πίνακας $A = A(t)$ είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι $\dfrac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}A'(t)A^{-1}$, όπου $A'(t) = \dfrac{d}{dt}A(t)$.

15. Έστω οι n×n πίνακες A και B. Η παράσταση $AB–BA$ λέγεται μεταθέτης (commutator) των A και B και συμβολίζεται με $[A,B]^-$ ενώ η παράσταση $AB+BA$ που συμβολίζεται $[A,B]^+$ λέγεται αντιμεταθέτης (anticommutator). Να δειχθεί ότι ο μεταθέτης δυο συμμετρικών τετραγωνικών πινάκων είναι πάντοτε αντισυμμετρικός πίνακας ενώ ο αντιμεταθέτης τους είναι συμμετρικός πίνακας.

16. Έστω το n-διάνυσμα x με $x^{\mathrm{T}} = (1, 1, \ldots, 1)$. Σχηματίστε τον πίνακα $A = I + xx^{\mathrm{T}}$. Να δειχθεί ότι $A^2 - (n+2)A + (n+1)I = 0$. Είναι αντιστρέψιμος ο A;

17. Να υπολογιστεί για $\lambda \neq 1$ ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

18. Αν οι $n \times n$ πίνακες A, B είναι ομαλοί να βρεθεί ο αντίστροφος του σύνθετου πίνακα $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$.

19. Να λυθεί η εξίσωση $X^2 = A$ (δηλαδή να βρεθεί η 'τετραγωνική ρίζα' του A) όπου

    (α) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, (β) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (γ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και (δ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

20. Να υπολογιστεί ο πίνακας X για τον οποίο ισχύει $X = AX + B$, όπου $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.