– ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ –

– Ηλεκ/γων Μηχ/κών & Τεχνολογίας Υπολογιστών 2006/07 –

ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

1. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες οριζουσών για να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα: $A = \begin{pmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{pmatrix}$

[**Απ.** $(b-a)^2(a+b+2x)(a+b-2x)$]

2. Να προσδιοριστούν τα a, b έτσι ώστε η τάξη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 0 & b-1 & a+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ να είναι μικρότερη του 3 και κατόπιν να υπολογιστεί η τάξη του.

[**Απ.** a=2, b=1, r(A)=2]

3. Να λυθούν τα συστήματα:

(α) $\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 5 \\ 3x - 2y + 2z &= 5 \\ 5x - 3y - z &= 16 \end{aligned}$ (β) $\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 5 \\ x - 2y + 3z &= 2 \\ 4x - y + 4z &= 1 \end{aligned}$ (γ) $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 2x + 3y + 8z &= 4 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned}$

[**Απ.** (1,-3,-2), καμμία λύση, (-1-7t, 2+2t, t)]

4. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω συστήματα έχουν τουλάχιστον μία μη-τετριμμένη λύση.

(α) $\begin{aligned} x-2y+3z-2w&=0 \\ 3x-7y-2z+4w&=0 \\ 4x+3y+5z+2w&=0 \end{aligned}$ (β) $\begin{aligned} x+2y-3z&=0 \\ 2x+5y+2z&=0 \\ 3x-y-4z&=0 \end{aligned}$ (γ) $\begin{aligned} x+3y-2z&=0 \\ x-8y+8z&=0 \\ 3x-2y+4z&=0 \end{aligned}$ (δ) $\begin{aligned} x+2y+z&=0 \\ 2x+5y+2z&=0 \\ x+4y+7z&=0 \\ x+3y+3z&=0 \end{aligned}$

[**Απ.** (α) ναι (β) όχι (γ) ναι (δ) όχι]

5. Βρείτε τις συνθήκες (αν υπάρχουν) που θα ισχύουν για τα a, b, και c ώστε τα ακόλουθα συστήματα να έχουν καμμία ή άπειρες λύσεις:

(a) $\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ x + y - z &= a \\ 2x - y + 2z &= b \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x - 2y + z &= a \\ -x + y + 3z &= b \\ -2x + y + 10z &= c \end{aligned}$

[**Απ.** (α) καμμία συνθήκη (β) $c-a-3b=0$ για άπειρες λύσεις, αλλοιώς καμμία λύση]

6. Με τη βοήθεια της απαλοιφής Gauss και την έννοια της τάξης πίνακα να διερευνηθεί και να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+\lambda z&=1 \\ 2x+3y-3z&=1 \\ x-3y+3z&=1 \end{aligned}$$

[**Απ.** Για λ=-1 αδύνατο, για λ≠-1: μοναδική λύση: $\mathbf{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{3-\lambda}{9(1+\lambda)}, \frac{4}{9(1+\lambda)}\right)^{\mathrm{T}}$]

7. Να διερευνηθεί και να επιλυθεί το ομογενές σύστημα
$$\begin{aligned} x+\lambda y+z&=0\\ x+y+\lambda z&=0\\ \lambda x-y+(\lambda+1)z&=0 \end{aligned}$$

[**Απ.** Μη τετριμμένες λύσεις όταν λ=0 ή λ=1. Για λ=0: (-t, t, t). Για λ=1: (-3t, t, 2t).]

8. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -3\\ 2 & -5 & -3 & 12\\ 7 & 1 & 8 & 5\end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των συστημάτων $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ και $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^T$ και $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 14\end{pmatrix}^T$ εφ'όσον υπάρχουν. Ποιος είναι ο χώρος των στηλών του πίνακα Α; Ποιος είναι ο χώρος των γραμμών του πίνακα Α;Ποιος είναι ο χώρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος; Αντίστοιχα, του μη ομογενούς συστήματος; Σε κάθε περίπτωση να δώσετε τη διάσταση και μια βάση του χώρου.

9. Εάν τα **x**, **y**, **z** είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου ***V***, να δειχθεί ότι και τα διανύσματα **x**+**y**, **x**-**y,** και **x**-2**y**+**z** είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητα.

10. Αν $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ είναι λύσεις του συστήματος Α**x** = **b**, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι και το $\mathbf{x}=\frac{1}{3}\mathbf{x}_1+\frac{2}{3}\mathbf{x}_2$ είναι επίσης λύση του;

11. Έστω τα διανύσματα $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ και $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\5\\2\\6\end{pmatrix}$.

a. Να δειχθεί ότι τα $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, και $\mathbf{a}_4$ αποτελούν βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$.
b. Να εκφράσετε το διάνυσμα **b** σαν γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, και $\mathbf{a}_4$.

12. Βρείτε μια βάση των εξής υποχώρων του $\mathbb{R}^4$:
(α) Τα διανύσματα $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ για τα οποία $x_1=2x_4$
(β) Τα διανύσματα για τα οποία $x_1+x_2+x_3=0$ και $x_3+x_4=0$
(γ) Τον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $(1\ 1\ 1\ 1)^T$, $(1\ 2\ 3\ 4)^T$ και $(2\ 3\ 4\ 5)^T$.

13. Βρείτε την τάξη και τον μηδενόχωρο των πινάκων:
$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

14. Να εξετάσετε εάν τα διανύσματα $(1\ 1\ 3)^T$, $(2\ 3\ 6)^T$ και $(1\ 4\ 3)^T$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$