– ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ –

– Ηλεκ/γων Μηχ/κών & Τεχνολογίας Υπολογιστών 2006/07 –

ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

1. (α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Επαληθεύστε ότι το ίχνος ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών και η ορίζουσα ισούται με το γινόμενό τους. (β) Υποθέστε ότι μετατοπίζουμε τον πίνακα *A* αφαιρώντας $7I$: $B=A-7I=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$. Ποιες είναι οι ιδοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του *B* και πως συνδέονται με εκείνα του *A*;

2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Επαληθεύστε ότι το ίχνος ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών και η ορίζουσα ισούται με το γινόμενό τους.

3. Εάν $\lambda \neq 0$ χαρακτηριστική τιμή του Α, τότε να υπολογιστεί μία χαρακτηριστική τιμή του πίνακα $adj(A)$.

4. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}-1 & 6 & 2\\ 0 & 5 & -6\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Α. Πόσα γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα έχει ο Α και ποιά είναι αυτά;

5. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές τους και να εξετάσετε εάν διαγωνοποιούνται. Εάν κάποιος διαγωνοποιείται τότε να βρεθεί ένας μη ιδιάζων πίνακας *T*, έτσι ώστε ο $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος όμοιος με τον *A*.

6. Βρείτε τον πίνακα Α που έχει ιδιοτιμές 4 και 1 και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}^T$ και $\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}^T$.

7. Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}$. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του και να εξετάσετε εάν διαγωνοποιείται. Να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα *P* έτσι ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος πίνακας όμοιος με τον *A*.

8. Διαγωνοποιήστε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$. Βρείτε μια τετραγωνική του ρίζα, δηλ. έναν πίνακα *X* τέτοιον ώστε $X^2 = A$. Πόσες τέτοιες τετραγωνικές ρίζες υπάρχουν;

9. Υποθέστε ότι ο πίνακας Α έχει τις ιδιοτιμές 1, 2, 4. Ποιο είναι το ίχνος του A^2; Ποια είναι η ορίζουσα του $(A^{-1})^T$;

10. Θεωρούμε τον ορθογώνιο πίνακα *A*. Αν ο πίνακας $A+I$ είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι: $(A+I)^{-1}+[(A+I)^{-1}]^T=I$.