

– ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ –

– Ηλεκ/γων Μηχ/κών & Τεχνολογίας Υπολογιστών 2006/07 –
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4

1. Να εκφραστεί ο αντίστροφος του πίνακα $B = A^4 + 5A^3 - 48A^2 - I$ σαν γραμμικός συνδυασμός του $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(Απ. $B^{-1} = 5/79 A - 27/79 I$)

2. Με τη βοήθεια του θεωρήματος Cayley - Hamilton να βρεθεί ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^5$,

όπως επίσης και ο $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-3}$.

3. Να δειχθεί ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ επαληθεύει τη σχέση

$A^\rho = A^{\rho-2} + A^2 - I$ για $\rho = 3, 4, \dots$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί ο πίνακας A^{100} .

4. Εάν $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ να δειχθεί ότι $A^{202} - 3A^{147} + 2I = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

5. (α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ με ιδιοτιμές 3, -3, 9. Να βρεθεί ένας

ορθογώνιος πίνακας P που διαγωνοποιεί τον A .

(β) Παρατηρήστε ότι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A είναι ορθογώνια ανά δύο ($\delta_i^T \delta_j = 0$ όπου $i = 1, 2, 3$ και $j = 1, 2, 3$ με $i \neq j$).

(γ) Να αποδείξετε ότι αν ένας πίνακας A έχει την ιδιότητα που περιγράφεται στο ερώτημα (α) τότε οπωσδήποτε θα είναι συμμετρικός.

6. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1} .

b) Να δειχθεί ότι ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται.

7. Να υπολογισθεί ο πίνακας $\cos \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Να υπολογιστεί ο πίνακας e^A , όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.