

- ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ -
- Ηλεκ/γων Μηχ/κών & Τεχνολογίας Υπολογιστών 2006/07 -
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2 – ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΙΑ

1. Ένας μηχανικός χρειάζεται να καταθέσει 1, 2, 3, 4 ή 5 διαφορετικά έντυπα στην πολεοδομία για την άδεια (ανάλογα με το έργο που έχει αναλάβει). Έστω Y ο αριθμός των εντύπων που χρειάζεται να καταθέσει για τον επόμενο πελάτη. Η πιθανότητα ότι απαιτούνται y έντυπα είναι γνωστό ότι είναι ανάλογη του y , δηλ. $f(y) = P(Y = y) = ky$ όταν $y = 1, 2, \dots, 5$.

(α) Ποια η τιμή του k ;

(β) Ποια η πιθανότητα ότι απαιτούνται το πολύ 3 έντυπα;

(γ) Ποια η πιθανότητα ότι απαιτούνται από 2 έως 4 έντυπα;

(δ) Ποια η μέση τιμή του αριθμού των εντύπων που θα απαιτηθούν για τον επόμενο πελάτη;

(ε) Θα μπορούσε η συνάρτηση πιθανότητας να ήταν η $f(y) = \frac{y^2}{50}$ όταν $y = 1, 2, \dots, 5$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

[Απ. 1/15, .4, .6, 3.67, όχι]

2. Ο χρόνος ολοκλήρωσης μιας εργασίας δίνεται από την τυχαία μεταβλητή X με αθροιστική

$$\text{συνάρτηση κατανομής } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(\frac{7}{3} - x)(\frac{7}{4} - \frac{3}{4}x) & 1 \leq x < \frac{7}{3} \\ 1 & x \geq \frac{7}{3} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την σ.π.π. $f(x)$ της X .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(.5 \leq X \leq 2)$.

(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή της X .

[Απ. (β).917, (γ)1.213]

3. Εάν η τυχαία μεταβλητή X έχει σ.π.π. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας της $Y = X^2$.

[Απ. $\frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$ για $y > 0$ και 0 αλλιώς]

4. Έστω ότι η σ.π.π. μιας τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Προσδιορίστε τη σταθερά c .

(β) Υπολογίστε τη πιθανότητα $P(X \geq 1)$

(γ) Υπολογίστε τη πιθανότητα $P(2 \leq X < 3)$.

(δ) Υπολογίστε τη πιθανότητα $P(2 \leq X < 3 | X \geq 1)$

[Απ. 4, $3e^{-2}$, $5e^{-4} - 7e^{-6}$, $\frac{3e^{-2}}{5e^{-4} - 7e^{-6}}$]

5. Δύο μηχανές παράγουν κάποιο προϊόν. Η ημερήσια παραγωγική ικανότητα της μηχανής M1 είναι 1 μονάδα του προϊόντος και η αντίστοιχη της μηχανής M2 είναι 2 μονάδες. Έστω ότι με (X_1, X_2) παριστάνουμε την διακριτή τυχαία μεταβλητή που δίνει την ημερήσια απόδοση της κάθε μηχανής ξεχωριστά για κάθε μέρα. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την κοινή συνάρτηση πιθανότητας για την (X_1, X_2) , π.χ. $f_{X_1, X_2}(0, 0) = 1/8$.

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	1/8	0
1	1/4	1/8
2	1/8	3/8

(α) Να βρεθούν οι περιθώριες κατανομές για τις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 .

(β) Να βρεθεί η δεσμευμένη κατανομή της X_1 , αν γνωρίζουμε ότι $X_2 = 1$.

(γ) Είναι ανεξάρτητες οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 ;

(δ) Να υπολογιστούν οι ποσότητες $E(X_1)$, $E(X_2)$, $\text{Var}(X_1)$ και $\text{Var}(X_2)$.

(ε) Να υπολογιστεί η κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X_1 + X_2$.

[Απ. (γ) όχι (δ) 0.5, 11/8, 0.25, 0.484]

6. Η Άννα και ο Κώστας συμφώνησαν να βρεθούν μεταξύ τις 2:00 και 3:00 μ.μ. για φαγητό στο Πάρκο της Ειρήνης. Έστω X η χρονική στιγμή άφιξης της Άννας και Y η χρονική στιγμή άφιξης του Κώστα. Έστω ότι οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες και η κάθε μία ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[2, 3]$.

(α) Ποια η κ.σ.π.π. των X και Y ;

(β) Ποια η πιθανότητα ότι και οι δύο θα φτάσουν στο Πάρκο της Ειρήνης μεταξύ 2:15 και 2:45 μ.μ.;

(γ) Εάν υποθέσουμε ότι ο πρώτος που θα φτάσει θα περιμένει μόνον 10 λεπτά για τον άλλον και μετά θα αποχωρήσει, ποια η πιθανότητα ότι θα φάνε μαζί;

[Απ. 1 όταν $2 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 3$ και 0 αλλού, .25, 11/36]

7. Εταιρεία τροφίμων προωθεί στην αγορά μια συσκευασία μίγματος ξηρών καρπών που περιέχει αμύγδαλα, φουντούκια και φυστίκια. Έστω ότι το καθαρό βάρος είναι ακριβώς 1 kg, όμως το βάρος του καθ' ενός από τα 3 είδη ξηρών καρπών είναι τυχαίο. Έστω X το βάρος των αμυγδάλων και Y το βάρος των φουντουκιών και έστω ότι η κ.σ.π.π. δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η σταθερά c .

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι τα αμύγδαλα και τα φουντούκια μαζί δε ζυγίζουν περισσότερο από 0.5 kg.

(γ) Να υπολογιστούν οι περιθώριες σ.π.π.

(δ) Είναι ανεξάρτητες οι τ.μ. X και Y ;

[Απ. 24, 0.125, όχι]

8. Για ένα συγκεκριμένο τύπο αυτοκινήτου η οδηγία της κατασκευαστικής εταιρείας είναι ότι οι μπροστινοί τροχοί πρέπει να έχουν πίεση 26 p.s.i. Υποθέτουμε ότι η πίεση στους τροχούς ενός αυτοκινήτου αυτού του τύπου παρίσταται από δύο τ.μ.: X για τον δεξιό τροχό και Y για τον αριστερό τροχό με κ.σ.π.π.

$$f(x, y) = \begin{cases} \kappa(x^2 + y^2) & 20 \leq x \leq 30, 20 \leq y \leq 30 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς κ ;

(β) Ποια η πιθανότητα ότι και οι δύο τροχοί έχουν μικρότερη πίεση από την επιθυμητή;

(γ) Ποια η πιθανότητα ότι η διαφορά της πίεσης στους δύο τροχούς δεν ξεπερνάει τα 2 p.s.i.;

(δ) Βρείτε τη περιθώρια σ.π.π. για την πίεση του αέρα στον δεξιό μόνον τροχό.

(ε) Είναι ανεξάρτητες οι τ.μ. X και Y ;

[Απ. 3/380000, .3024, .3593, όχι]