

- ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΙΑ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ -
- Ηλεκ/γων Μηχ/κών & Τεχνολογίας Υπολογιστών 2007/08 -
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3 – ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΙΑ

1. Έστω ότι σου προσφέρουν την επιλογή να παίξεις ένα από δύο παιχνίδια. Στο παιχνίδι A, ρίχνεις ένα ζάρι μια φορά και εισπράτεις το αποτέλεσμα (σε ευρώ). Στο παιχνίδι B, ρίχνεις το ζάρι δύο φορές και εισπράτεις τόσα ευρώ όσο το μεγαλύτερο αποτέλεσμα. Αν για το πρώτο παιχνίδι η συμμετοχή σου είναι 3.00 ευρώ και για το δεύτερο 3.50 ευρώ, ποιο παιχνίδι σε συμφέρει; Θα ήταν ίδιο το αποτέλεσμα αν θα έπρεπε να πληρώσεις 4.00 ευρώ για συμμετοχή στο δεύτερο παιχνίδι;

[Απ. Το B, όχι]

2. Έστω X το αποτέλεσμα του ζαριού όταν το ρίξουμε μια φορά. Εάν πριν το ρίξιμο του ζαριού μας προσφέρουν $1/3.5$ ευρώ ή την επιλογή να εισπράξουμε $1/X$ ευρώ, ανάλογα με το αποτέλεσμα του ζαριού, τι θα πρέπει να διαλέξουμε;

[Απ. Να ρισκάρουμε]

3. Ένα ολοκληρωμένο κύκλωμα έχει χρόνο ζωής X (μετρούμενο σε 1000 ώρες) που είναι τ.μ. με σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} e^{-\frac{x}{9}} & x > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το συγκεκριμένο κύκλωμα θεωρείται ελαττωματικό εάν ο χρόνος ζωής του δεν ξεπερνάει τις 3000 ώρες. Επίσης ο χρόνος ζωής δύο οποιοδήποτε κυκλωμάτων αυτού του τύπου είναι ανεξάρτητες τ.μ. Εάν πάρουμε δείγμα 100 ολοκληρωμένων κυκλωμάτων αυτού του τύπου, ποιος ο αναμενόμενος αριθμός ελαττωματικών κυκλωμάτων στο δείγμα;

[Απ. 28.35]

4. Έστω D μια τ.μ. που δίνει την ημερήσια ζήτηση για κάποιο συγκεκριμένο προϊόν. Έστω ότι η D παίρνει τιμές σύμφωνα με την σ.π.

$$f_D(k) = P(D = k) = \frac{c 2^k}{k!} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(α) Να υπολογιστεί η σταθερά c .

(β) Να υπολογιστεί η μέση ημερήσια ζήτηση για το συγκεκριμένο προϊόν.

[Απ. $1/(e^2 - 1)$, $2 e^2/(e^2 - 1)$]

5. Έστω X τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ και $h(x) = \ln x$ μία συνάρτηση. Να

υπολογιστούν:

(α) Η σ.π.π. για την τυχαία μεταβλητή $Y = h(X) = \ln X$.

(β) Οι τιμές των $E(X)$, $E(h(X))$ και η $h(E(X))$.

(γ) Η διασπορά της X .

[Απ. $2 e^{-y}$ όταν $0 \leq y \leq \ln 2$; $\ln 4$, $1 - \ln 2$, $\ln \ln 4$; 0.0782]

6. Έστω (X, Y) διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών με κ.σ.π.π. που δίνεται από την συνάρτηση:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2x e^{-y} & 0 < x < 1, \quad y > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν:

(α) $P(X > 0.5, Y < 1.0)$

(β) $P(X > 0.5 | Y < 1.0)$

(γ) Η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X .

(δ) Η μέση τιμή της τ.μ. $X+Y$.

[Απ. 0.2759; 0.75; $2x$ όταν $x>0$; $5/3$;]

7. Έστω X τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$. Να υπολογιστούν:

(α) η ροπογεννήτρια $M_X(t)$

(β) η μέση τιμή της X .

[Απ. $\frac{e^t + e^{-t} - 2}{t^2}$ $t \neq 0$, 0]

8. Έστω X τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$. Να υπολογιστούν:

(α) η ροπογεννήτρια $M_X(t)$,

(β) οι πρώτες τέσσερις ροπές γύρω από την αρχή,

(γ) η πιθανότητα $P[|X - \mu| > 1]$,

(δ) ένα άνω φράγμα για την $P[|X - \mu| > 1]$ από την ανισότητα του Chebyshev και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την πραγματική τιμή του ερωτήματος (γ).

[Απ. $\frac{2}{2-t}$ όταν $t < 2$, $1/2$, $1/2$, $3/4$, $3/2$, 0.04979, 0.25]

9. Έστω X τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{4x(9-x^2)}{81} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$. Να υπολογιστούν:

(α) η επικρατέστερη τιμή (κορυφή) της X και

(β) η διάμεσος της X .

(γ) Να συγκριθούν με την τιμή της μέσης τιμής.

[Απ. 1.732, 1.624, 1.60]

10. Έστω οι τ.μ. X και Y με κοινή σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x+y) & 2 < x < 6, 0 < y < 5 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$.

Να υπολογιστούν:

(α) η σταθερά c ,

(β) οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομής των X και Y ,

(γ) οι ποσότητες $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X,Y)$ και ρ .

[Απ. $1/210$, $268/63$, $170/63$, $80/7$, $1220/63$, $1175/126$, $5036/3969$, $16225/7938$, $-200/3969$, -0.03129]