

- ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ -

- Ηλεκ/γων Μηχ/κών & Τεχνολογίας Υπολογιστών 2006/07 -

ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4 – ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΙΑ

1. Ένας κατασκευαστής μπαταριών θέλει να εφαρμόσει αυστηρά μέτρα ποιοτικού ελέγχου στην παραγωγή του και γι' αυτό καταστρέφει κάθε παρτίδα (που αποτελείται από 10000 μπαταρίες) στην οποία το ποσοστό μπαταριών με ακατάλληλη τάση είναι υψηλό. Για το σκοπό αυτό, από κάθε παρτίδα επιλέγονται στην τύχη 20 μπαταρίες και μετριέται η τάση τους. Εάν οι μετρήσεις για τουλάχιστον πέντε από αυτές δείξουν ακατάλληλη τάση τότε ολόκληρη η παρτίδα καταστρέφεται. Ποια η πιθανότητα ότι μια παρτίδα θα καταστραφεί όταν:

- α) 5% των μπαταριών της παρτίδας έχουν ακατάλληλη τάση.
- β) 10% των μπαταριών της παρτίδας έχουν ακατάλληλη τάση.
- γ) 20% των μπαταριών της παρτίδας έχουν ακατάλληλη τάση.

Να υπολογιστούν οι ίδιες πιθανότητες αν ο κατασκευαστής γίνει λιγότερο αυστηρός και καταστρέφει μια παρτίδα μόνον όταν έξι ή παραπάνω μπαταρίες μετρηθούν με ακατάλληλη τάση. [Υπόδειξη. Να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας Π2 του βιβλίου Στατιστικές Μέθοδοι]

[Απ. 0.003, 0.043, 0.37, 0, 0.011, 0.196]

2. Σε μια τάξη υπάρχουν 20 αγόρια και 15 κορίτσια. Παίρνουμε κατά τύχη 4 μαθητές.
- (i) Ποιά η πιθανότητα να πάρουμε 3 αγόρια και 1 κορίτσι;
 - (ii) Αν επαναλάβουμε το πείραμα 3 φορές, ποιά η πιθανότητα να πάρουμε τις δύο φορές 3 αγόρια και 1 κορίτσι;

[Απ. 0.3266, 0.21547]

3. Σε ένα κατάστημα επισκευής τηλεοράσεων έχουν υπολογίσει ότι το 80% των τηλεοράσεων που έρχονται για επισκευή δεν βρίσκονται πια σε περίοδο εγγύησης (η εγγύηση έχει λήξει).

(α) Από τις 20 επόμενες τηλεοράσεις που θα έρθουν στο κατάστημα για επισκευή ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός τηλεοράσεων που θα βρίσκονται ακόμα σε περίοδο εγγύησης;

(β) Για τις επόμενες 20 τηλεοράσεις που θα έρθουν στο κατάστημα ποια η πιθανότητα ότι τουλάχιστον 75% από αυτές δεν θα βρίσκονται σε περίοδο εγγύησης;

(γ) Αν υποθέσουμε ότι αυτή τη στιγμή υπάρχουν 12 τηλεοράσεις στο κατάστημα από τις οποίες οι 4 βρίσκονται σε περίοδο εγγύησης. Εάν οι 12 τηλεοράσεις ήρθαν με τυχαία σειρά και εξυπηρετούνται με τη σειρά που ήρθαν, να βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X : ο αριθμός των τηλεοράσεων με εγγύηση ανάμεσα στις 5 πρώτες τηλεοράσεις που θα εξυπηρετηθούν. Στη συνέχεια να υπολογιστούν η $E(X)$ και η $Var(X)$.

[Απ. 4, 0.804, 1.67, .707]

4. Ο αριθμός των τηλεφωνικών κλήσεων που φτάνουν σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, ακολουθεί διαδικασία Poisson με μέση τιμή 6.2 ανά λεπτό. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

i. Σε διάστημα 3 λεπτών να πάρουμε τουλάχιστον 20 κλήσεις.

ii. Από τα τέσσερα διαφορετικά διαστήματα τριών λεπτών που εξετάσαμε, στο κάθε ένα από τα τρία, να έχουμε τουλάχιστον 20 κλήσεις.

[Απ. περίπου 0.394, 0.1483]

5. Ένα ζευγάρι επιθυμεί να αποκτήσει οικογένεια που θα έχει ακριβώς 2 κορίτσια και αποφασίζει να κάνει τόσα παιδιά όσα χρειάζονται για να ικανοποιηθεί αυτή η

επιθυμία τους. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι σε κάθε (ανεξάρτητη) γέννα είναι $p = P(\text{κορίτσι}) = 0.5$.

(α) Ποια η πιθανότητα ότι η οικογένεια τους θα έχει x αρσενικά παιδιά;

(β) Ποια η πιθανότητα ότι η οικογένεια τους θα έχει 4 παιδιά;

(γ) Ποια η πιθανότητα ότι η οικογένεια τους θα έχει το πολύ 4 παιδιά;

(δ) Πόσα παιδιά αναμένετε να έχει κατά μέσο όρο μια τέτοια οικογένεια; Πόσα αρσενικά παιδιά αναμένετε να έχει κατά μέσο όρο μια τέτοια οικογένεια;

$$[\text{Απ. } (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}, 0.1875, 0.6875, 4, 2]$$

6. Σύμφωνα με τη δοκιμή σκληρότητας Rockwell, η σκληρότητα ενός μετάλλου μετρίεται από το βάθος του κρατήρα που δημιουργείται όταν το μέταλλο υποστεί πίεση από ένα σκληρό αντικείμενο συγκεκριμένου σχήματος σε κάποιο σημείο του. Υποθέτουμε ότι η σκληρότητα ενός συγκεκριμένου κράματος ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 70 και τυπική απόκλιση 3 βαθμούς σκληρότητας.

(α) Εάν για μια συγκεκριμένη χρήση απαιτείται σκληρότητα μεταξύ 65 και 75 για να είναι αποδεκτό το κράμα, ποιά είναι η πιθανότητα ότι το τυχαίο δείγμα που θα εξεταστεί θα έχει αποδεκτή σκληρότητα;

(β) Εάν το αποδεκτό διάστημα για τη σκληρότητα ήταν $(70 - c, 70 + c)$, για ποιά τιμή του c μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το 95% των δειγμάτων θα έχουν αποδεκτή σκληρότητα;

(γ) Εάν το αποδεκτό διάστημα για τη σκληρότητα ήταν όπως στο ερώτημα (α) και η σκληρότητα καθενός από τα 10 δείγματα που τυχαία επιλέξαμε καθορίζεται ανεξάρτητα, ποίος ο αναμενόμενος αριθμός των αποδεκτών δειγμάτων μεταξύ των 10 εξεταζόμενων δειγμάτων;

(δ) Ποιά η πιθανότητα ότι το πολύ οκτώ από τα δέκα ανεξάρτητα επιλεγμένα δείγματα έχουν βαθμό σκληρότητας μικρότερο από 73.84;

$$[\text{Απ. } 0.9050, 5.88, 9.05, 0.264]$$

7. Η ποσότητα X του καφέ που περιέχεται σε πακέτα των 500 gr, είναι τ.μ. κανονικής κατανομής με μέση τιμή $\mu = 500$ και διασπορά 25 gr^2 . Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 gr. (α) Ποιά η πιθανότητα ότι μόνο ένα πακέτο θα περιέχει περισσότερο από 490 gr; και (β) ποιά η πιθανότητα ότι το καθένα από τα τρία θα έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 gr;

$$[\text{Απ. } 0.001524, 0.54837]$$

8. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή Poisson μέσης τιμής λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να βρεθεί η κατανομή της μεταβλητής $X + Y$.

9. Ένα σύστημα αποτελείται από 5 όμοια εξαρτήματα συνδεδεμένα σε σειρά. Έτσι το σύστημα σταματάει να λειτουργεί τη στιγμή που χαλάει οποιοδήποτε από τα πέντε εξαρτήματα του. Υποθέστε ότι το κάθε εξάρτημα έχει διάρκεια ζωής που ακολουθεί εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda = 0.01$ και ότι το κάθε εξάρτημα χαλάει ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Έστω A_i το γεγονός ότι το εξάρτημα i θα δουλέψει τουλάχιστον t ώρες με $i = 1, \dots, 5$ (οπότε τα γεγονότα A_i θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους). Έστω X η στιγμή κατά την οποία το σύστημα σταματάει να λειτουργεί, δηλαδή η μικρότερη διάρκεια ζωής μεταξύ των 5 εξαρτημάτων.

(α) Να γράψετε το γεγονός $\{X \geq t\}$ χρησιμοποιώντας τα γεγονότα A_i .

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\{X \geq t\}$. Τι κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X ;

(γ) Έστω ότι το σύστημα αποτελείται από n εξαρτήματα όπου το κάθε ένα έχει εκθετική διάρκεια ζωής παραμέτρου λ . Τι είδους κατανομή έχει η τ.μ. X ;