Εισαγωγή

Οι μελέτες φυσικών φαινομένων ή πραγματικών προβλημάτων καταλήγουν είτε σε *προσδιοριστικά μοντέλα*, είτε σε *στοχαστικά* ή αλλοιώς *πιθανοτικά μοντέλα*.

- *προσδιοριστικά μοντέλα* : επιτρέπουν προσδιορισμό της τιμής μιας μεταβλητής, όταν δίνονται οι πειραματικές συνθήκες (π.χ. ο νόμος του Νεύτωνα)
- *πιθανοτικά μοντέλα* : χρησιμοποιούνται όταν το φυσικό φαινόμενο παρουσιάζει *μεταβλητότητα* στα αποτελέσματα, ακόμα και όταν οι παρατηρήσεις γίνονται κάτω από τις ίδιες πειραματικές συνθήκες.

Ορισμός της Πιθανότητας

3 διαφορετικές ερμηνείες και ορισμοί (ατελείς και με μειονεκτήματα):

- ✓ *Υποκειμενικός ορισμός* – η προσωπική γνώμη κάποιου ειδικού.
- ✓ *Κλασσικός ορισμός* – πιθανότητα ενός ενδεχομένου *A* είναι ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο *A*, προς τον αριθμό των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος.

$$P(A) = \frac{\nu(\mathrm{A})}{\nu}$$

(όταν μπορούμε να καθορίσουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα)

- ✓ *Ορισμός σχετικής συχνότητας* – όταν μια πειραματική διαδικασία επαναλαμβάνεται κάτω από ομοιόμορφες συνθήκες ώστε να προκύπτουν διαδοχικές και ανεξάρτητες παρατηρήσεις, υπάρχει μεταβλητότητα αλλά ταυτόχρονα υπάρχει και *στατιστική ομαλότητα,* δηλαδή σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων οι σχετικές συχνότητες εμφάνισης ορισμένων ενδεχομένων σταθεροποιούνται γύρω από συγκεκριμένες τιμές που είναι οι πιθανότητες εμφάνισης τους.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\mathrm{A})}{n}$$

Βασικές Έννοιες

- ✓ *Πείραμα*
- ✓ *Δειγματοχώρος*
- ✓ *Γεγονός ή ενδεχόμενο*
- ✓ *Ασυμβίβαστα γεγονότα*
- ✓ *Δοκιμή*

Στοιχεία Θεωρίας συνόλων

1. $A \cup \varnothing = A \quad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$
2. $A \cup A = A \quad A \cap A = A$
3. $(A')' = A \qquad \varnothing' = \Omega \qquad \Omega' = \varnothing \quad A \cup A' = \Omega \qquad A \cap A' = \varnothing$
4. $A \cup B = B \cup A \qquad A \cup B = B \cup A$ (αντιμεταθετική)
5. $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = A \cup B \cup \Gamma$
   $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$ (προσεταιριστική)
6. $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$
   $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$ (επιμεριστική)
7. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
   $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (σχέσεις DeMorgan)

Αξιωματική θεμελίωση της πιθανότητας

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος.

Ονομάζουμε πιθανότητα ενός ενδεχομένου *A* και συμβολίζουμε με P(*A*) μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού την οικογένεια όλων των υποσυνόλων του Ω, που είναι ενδεχόμενα και η οποία ικανοποιεί τα εξής αξιώματα:

A1. Για κάθε ενδεχόμενο *A*, P(*A*) ≥ 0

A2. P(Ω) = 1

A3. Για κάθε άπειρη ακολουθία ασυμβίβαστων ανά δύο ενδεχομένων A_1, A_2, … ισχύει:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Θεωρήματα αξιωματικής θεωρίας

Θεώρημα 1. $P(\varnothing) = 0$

Θεώρημα 2. Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία ασυμβίβαστων ανά δύο ενδεχομένων $A_1, A_2, \ldots A_n$ ισχύει:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Θεώρημα 3. A, B ενδεχόμενα με B C A. Τότε:

α) $P(B) \leq P(A)$

β) $P(A-B) = P(A) - P(B)$

Θεώρημα 4. Για κάθε ενδεχόμενο A, $P(A) \leq 1$.

Θεωρήματα αξιωματικής θεωρίας (συνέχεια)

Θεώρημα 5. Για κάθε ενδεχόμενο A, $P(A') = 1 - P(A)$.

Θεώρημα 6. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Θεώρημα 7. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots A_n$ (n: φυσικός ≥ 2) ισχύει:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i}\sum_{j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$1 \le i < j \le n \qquad\qquad 1 \le i < j < k \le n$$

Θεώρημα 8. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots A_n$ (n: φυσικός ≥ 2) ισχύει:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i'\right)$$

Συνδυαστική ανάλυση-βασική αρχή απαρίθμησης

Έστω πείραμα που αναλύεται σε r υποπειράματα:

<u>1ο υποπείραμα</u> $\Longrightarrow$ v_1 δυνατά αποτελέσματα

<u>2ο υποπείραμα</u> $\Longrightarrow$ v_2 δυνατά αποτελέσματα

...

<u>r υποπείραμα</u> $\Longrightarrow$ v_r δυνατά αποτελέσματα

Το πείραμα έχει $v = v_1 \, v_2 \ldots v_r$ δυνατά αποτελέσματα.

Συνδυαστική ανάλυση - Διατάξεις

Έστω ότι έχουμε ν διαφορετικά αντικείμενα. Αν πάρουμε r από αυτά τα στοιχεία (1≤ r ≤ ν) και τα κατατάξουμε σε μια σειρά, τότε έχουμε <u>διάταξη των ν πραγμάτων ανά r</u>.

<u>Το πλήθος των διατάξεων ν πραγμάτων ανά r:</u>

$$\nu\mathcal{P}r = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-r+1) \quad 1 \le r \le \nu$$

ή

$$\nu\mathcal{P}r = \frac{\nu!}{(\nu-r)!} \quad 1 \le r \le \nu$$

Όταν r=ν έχουμε <u>μετάθεση των ν πραγμάτων</u> και

$$\nu\mathcal{P}\nu = \nu!$$

Συνδυαστική ανάλυση – Διατάξεις με επανάληψη

Έστω ότι έχουμε ν διαφορετικά αντικείμενα. Αν πάρουμε r στοιχεία με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε φορά η επιλογή να περιλαμβάνει και τα ν αντικείμενα, τότε έχουμε διάταξη με επανάληψη των ν πραγμάτων ανά r.

Στη διάταξη αυτή, κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναληφθεί μέχρι r φορές. (σημ. είναι δυνατόν r>ν)

Το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη ν πραγμάτων ανά r:

$$\nu \mathcal{R} r = \nu^r$$

Συνδυαστική ανάλυση - Συνδυασμοί

Έστω ένα σύνολο με ν στοιχεία. Οποιοδήποτε υποσύνολο με r στοιχεία ($0 \le r \le \nu$) από το σύνολο αυτό λέγεται <u>συνδυασμός των ν πραγμάτων ανά r</u>.

Στους συνδυασμούς η σειρά των στοιχείων δεν έχει σημασία.

<u>Το πλήθος των συνδυασμών των ν πραγμάτων ανά r :</u>

$$\nu \mathcal{C} r = \binom{\nu}{r} = \frac{\nu!}{r!(\nu - r)!} \qquad 0 \le r \le \nu$$

Συνδυαστική ανάλυση - Συνδυασμοί

Γενίκευση των διωνυμικών συντελεστών που εμφανίζονται στους συνδυασμούς είναι οι <u>πολυωνυμικοί συντελεστές.</u>

$$\binom{\nu}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \frac{\nu!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!} \qquad \nu \in \mathbb{N}^+,\ r_i \in \mathbb{N}_0^+ \ \kappa\alpha\iota \ \sum_{i=1}^{k} r_i = \nu$$

Οι πολυωνυμικοί συνδυασμοί δίνουν:

<u>1.</u> Το πλήθος των δυνατών διαχωρισμών ενός συνόλου με ν στοιχεία σε k διατεταγμένα υποσύνολα, ή

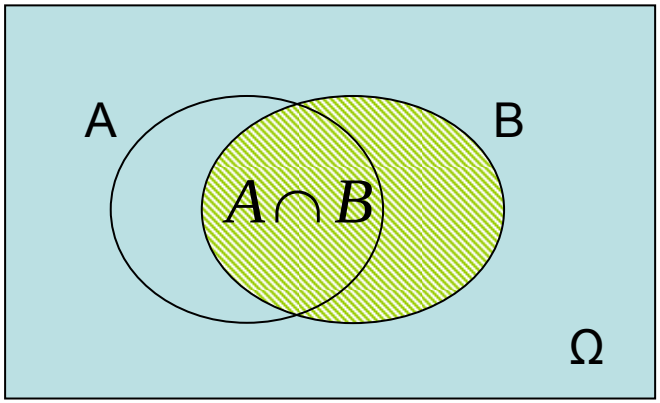
<u>2.</u> Το πλήθος των διατάξεων ν αντικειμένων τα οποία ανήκουν σε k κατηγορίες μη διακρινομένων μεταξύ τους αντικειμένων.

Δεσμευμένη πιθανότητα

- A και B ενδεχόμενα πειράματος και
- P (B) > 0

<u>Δεσμευμένη πιθανότητα</u> (ή πιθανότητα υπό συνθήκη) του A δοθέντος του B:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$



- Ο δειγματικός χώρος περιορίζεται στο σύνολο B
- Η δεσμευμένη πιθανότητα δίνει το ποσοστό του $A \cap B$ στο σύνολο B.

Δεσμευμένη πιθανότητα (συνέχεια)

Κανόνας Γινομένου

- A και B ενδεχόμενα πειράματος
- P (A) > 0 και P (B) > 0

Τότε: $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A|B)\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)$

Γενικευμένος Κανόνας Γινομένου

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (n φυσικός > 1) με $P(A_1) > 0$, $P(A_1 \cap A_2) > 0$, ..., $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$

ισχύει:

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) = \mathcal{P}(A_1)\mathcal{P}(A_2|A_1)\mathcal{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots\mathcal{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n)$$

Δεσμευμένη πιθανότητα (συνέχεια)

Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται <u>ανεξάρτητα</u> όταν ισχύει:

$$\boxed{\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B)}$$

Είναι προφανές ότι για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα A και B:

$$\boxed{\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)} \qquad \boxed{\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B)}$$

Θεώρημα ολικής πιθανότητας

- Ε οποιοδήποτε ενδεχόμενο και
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχόμενα, ασυμβίβαστα ανά δύο, που από κοινού εξαντλούν το δειγματοχώρο και $\mathcal{P}(A_i) > 0 \quad i = 1, \ldots, n$.

Τότε ισχύει:

$$\mathcal{P}(\mathrm{E}) = \mathcal{P}(\mathrm{E} \mid A_1)\mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(\mathrm{E} \mid A_2)\mathcal{P}(A_2) + \ldots + \mathcal{P}(\mathrm{E} \mid A_n)\mathcal{P}(A_n)$$

Θεώρημα Bayes

- Ε οποιοδήποτε ενδεχόμενο και
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ενδεχόμενα, ασυμβίβαστα ανά δύο, που από κοινού εξαντλούν το δειγματοχώρο και $\mathcal{P}(A_i) > 0 \quad i = 1, \ldots, n$.

Τότε ισχύει:

$$\mathcal{P}(A_i \mid \mathrm{E}) = \frac{\mathcal{P}(\mathrm{E} \mid A_i)\mathcal{P}(A_i)}{\mathcal{P}(\mathrm{E} \mid A_1)\mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(\mathrm{E} \mid A_2)\mathcal{P}(A_2) + \ldots + \mathcal{P}(\mathrm{E} \mid A_n)\mathcal{P}(A_n)}$$