Διωνυμική Κατανομή(Binomial)

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $n \in \mathcal{N}$ **και** $0<p<1$ **όταν**

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Η τ.μ. *X* παριστάνει τον αριθμό των επιτυχιών σε *n* ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, όταν η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή είναι *p*.

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X) = np$ **Διασπορά:** $\mathrm{Var}(X) = npq$

Ροπογεννήτρια: $M_X(t) = (p\,\mathrm{e}^t + q)^n$ **όπου** $q = 1-p$

Πολυάριθμες εφαρμογές. π.χ: Ποιοτικός Έλεγχος

Υπεργεωμετρική Κατανομή (Hypergeometric)

$X \sim \mathcal{HG}\,(N,\ n,\ p)$ $N>n$, $N, n \in \mathcal{N}^+$, $0<p<1$ και $Np \in \mathcal{N}^+$, όταν

$$f_X(x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0,1,2,\ldots,\min(n, Np)$$

X : αριθμός των επιτυχιών σε δειγματοληψία μεγέθους n, χωρίς επανατοποθέτηση από πεπερασμένο πληθυσμό N ατόμων όταν αρχικά η πιθανότητα επιτυχίας είναι p. (εξαρτημένα Bernoulli πειράματα)

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X) = np$ (ίδια με διωνυμική)

Διασπορά: $\mathrm{Var}(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$ ($\dfrac{N-n}{N-1}$ διορθωτικός παράγοντας)

Όταν το N είναι πολύ μεγάλο και το n αρκετά μικρό η υπεργεωμετρική προσεγγίζεται από την διωνυμική.

Γεωμετρική Κατανομή (Geometric)

$X \sim \mathcal{G}\,(p)$ $0<p<1$ όταν $f(x) = \begin{cases} pq^{x-1} & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ όπου $q = 1 - p$

X : αριθμός των επαναλήψεων (ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli) που απαιτούνται μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχίας, όταν η πιθανότητα επιτυχίας είναι p.

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X) = {}^{1}\!/_{p}$ Διασπορά: $\mathrm{Var}(X) = {}^{q}\!/_{p^2}$

Ροπογεννήτρια: $M_X(t) = \dfrac{p\,\mathrm{e}^t}{1 - q\,\mathrm{e}^t}, \quad t < -\ln q$

Η μέση τιμή ονομάζεται <u>μέσος χρόνος επιστροφής</u> ή <u>περίοδος επιστροφής</u>

Αρνητική Διωνυμική (Negative Binomial)

$X \sim \mathcal{NB}(r,p)$ $r \in \mathcal{N}$ και $0<p<1$ όταν

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \qquad x = r, r+1, \ldots$$

X : αριθμός των επαναλήψεων (ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli) που απαιτούνται μέχρι την εμφάνιση της r επιτυχίας, όταν η πιθανότητα επιτυχίας είναι p.

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X) = r/p$ Διασπορά: $\mathrm{Var}(X) = rq/p^2$

Ροπογεννήτρια: $M_X(t) = \dfrac{p^r \mathrm{e}^{tr}}{(1-q\,\mathrm{e}^t)^r} \qquad t < -\ln q$

Η X μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα r ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με γεωμετρική κατανομή.

Κατανομή Poisson

$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 0$ όταν

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad x = 0,1,2,3,\ldots \quad \text{όπου } \lambda > 0$$

Η τ.μ. X παριστάνει τον αριθμό εμφάνισης τυχαίων περιστατικών σε καθορισμένο χρονικό διάστημα.

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X) = \lambda$ Διασπορά: $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

Ροπογεννήτρια: $M_X(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{t} - 1\right)\right] \quad t \in \mathbb{R}$

Πολυάριθμες εφαρμογές. π.χ: Θεωρία τηλεφωνικής κίνησης (Teletraffic theory)

Κατανομή Poisson (συνέχεια)

ΠΙΝΑΚΑΣ Π.3 – Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Poisson κατανομής (Συνέχεια)

λ \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.2	0.002	0.015	0.054	0.134	0.259	0.414	0.574	0.716	0.826	0.902
6.4	0.002	0.012	0.046	0.119	0.235	0.384	0.542	0.687	0.803	0.886
6.6	0.001	0.010	0.040	0.105	0.213	0.355	0.511	0.658	0.780	0.869
6.8	0.001	0.009	0.034	0.093	0.192	0.327	0.480	0.628	0.755	0.850
7.0	0.001	0.007	0.030	0.082	0.173	0.301	0.450	0.599	0.729	0.830
7.2	0.001	0.006	0.025	0.072	0.156	0.276	0.420	0.569	0.703	0.810
7.4	0.001	0.005	0.022	0.063	0.140	0.253	0.392	0.539	0.676	0.788
7.6	0.001	0.004	0.019	0.055	0.125	0.231	0.365	0.510	0.648	0.765
7.8	0.000	0.004	0.016	0.048	0.112	0.210	0.338	0.481	0.620	0.741
8.0	0.000	0.003	0.014	0.042	0.100	0.191	0.313	0.453	0.593	0.717
8.5	0.000	0.002	0.009	0.030	0.074	0.150	0.256	0.386	0.523	0.653
9.0	0.000	0.001	0.006	0.021	0.055	0.116	0.207	0.324	0.456	0.587
9.5	0.000	0.001	0.004	0.015	0.040	0.089	0.165	0.269	0.392	0.522
10.0	0.000	0.000	0.003	0.010	0.029	0.067	0.130	0.220	0.333	0.458

λ \ x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6.2	0.949	0.975	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000			
6.4	0.939	0.969	0.986	0.994	0.997	0.999	1.000			
6.6	0.927	0.963	0.982	0.992	0.997	0.999	0.999	1.000		
6.8	0.915	0.955	0.978	0.990	0.996	0.998	0.999	1.000		
7.0	0.901	0.947	0.973	0.987	0.994	0.998	0.999	1.000		
7.2	0.887	0.937	0.967	0.984	0.993	0.997	0.999	0.999	1.000	
7.4	0.871	0.926	0.961	0.980	0.991	0.996	0.998	0.999	1.000	
7.6	0.854	0.915	0.954	0.976	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000	
7.8	0.835	0.902	0.945	0.971	0.986	0.993	0.997	0.999	1.000	
8.0	0.816	0.888	0.936	0.966	0.983	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000
8.5	0.763	0.849	0.909	0.949	0.973	0.986	0.993	0.997	0.999	0.999
9.0	0.706	0.803	0.876	0.926	0.959	0.978	0.989	0.995	0.998	0.999
9.5	0.645	0.752	0.836	0.898	0.940	0.967	0.982	0.991	0.996	0.998
10.0	0.583	0.697	0.792	0.864	0.917	0.951	0.973	0.986	0.993	0.997

λ \ x	20	21	22
8.5	1.000		
9.0	1.000		
9.5	0.999	1.000	
10.0	0.998	0.999	1.000

Κατανομή Poisson (ιδιότητες)

(1) Έστω τ.μ. $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Τότε

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

Δηλ. μια διωνυμική κατανομή όταν το n είναι αρκετά μεγάλο και το p είναι αρκετά μικρό, προσεγγίζεται από την κατανομή Poisson.

(πρακτικά προσεγγίζουμε όταν $n > 30$ και $np < 5$)

Διαδικασία Poisson

Έστω η τ.μ. $N(t)$ που δίνει τον αριθμό των τυχαίων συμβάντων στο χρονικό διάστημα $(0, t]$. Το σύνολο των τ.μ. $\{N(t), t > 0\}$ ονομάζεται <u>στοχαστική διαδικασία</u> και επειδή η $N(t)$ παίρνει ακέραιες τιμές <u>στοχαστική διαδικασία ακεραίων τιμών.</u>

Η διαδικασία $\{N(t), t > 0\}$ είναι <u>διαδικασία Poisson</u> <u>με μέσο ρυθμό ν</u> εάν πληρούνται οι συνθήκες:

(i) $N(0) = 0$

(ii) Ο αριθμός των συμβάντων σε ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(ii) Για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $(s, s+t)$ με $s \geq 0$ και $t > 0$, ο αριθμός των συμβάντων έχει κατανομή Poisson

$$P\big(N(s+t) - N(s) = x\big) = \frac{e^{-\nu t}(\nu t)^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ομοιόμορφη Κατανομή (Uniform)

$X\sim\mathcal{U}(\alpha,\beta)\quad \alpha<\beta$ όταν $f_X(x)=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\quad \alpha<x<\beta$

Α.σ.κ. της X: $$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<\alpha\\ \dfrac{x-a}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta\\ 1 & x>\beta\end{cases}$$

$$P\left(c<X<d\right)=\tfrac{1}{b-a}\int_c^d dx=\frac{d-c}{b-a}\quad \text{όταν}\quad a<c<d<b$$

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X)=\frac{(b+a)}{2}$ Διασπορά: $\mathrm{Var}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

Ροπογεννήτρια: $M_X(t)=\dfrac{\mathrm{e}^{tb}-\mathrm{e}^{ta}}{t(b-a)}$

<u>Σημαντικότερη χρήση</u>: γεννήτριες τυχαίων αριθμών

Εκθετική Κατανομή (Exponential)

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ όταν: $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ όπου λ θετική σταθερά

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$ Διασπορά: $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$

Ροπογενήτρια: $M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \quad t < \lambda$

Αθροιστική Συνάρτηση κατανομής της X: $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}}$

Χρησιμοποιείται για να εκφράσει:

- το χρόνο μεταξύ αφίξεων διαφορετικών πελατών σε κατάστημα
- το χρόνο συνομιλίας σε μια τηλεφωνική επικοινωνία
- το χρόνος ζωής ηλεκτρονικών κομματιών σε μία συσκευή

Εκθετική Κατανομή (Ιδιότητες)

(1) Ιδιότητα αμνησίας ή απώλεια μνήμης:

$$\boxed{P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)}$$

Δηλαδή, η εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή δεν "γερνάει"

Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$P(X > t+s \mid X > t) = \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s}$$

Όμως $P(X > s) = \mathrm{e}^{-\lambda s}$ και αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Σημ. Η εκθετική είναι η μόνη συνεχής κατανομή με την ιδιότητα της αμνησίας.

Εκθετική Κατανομή (Ιδιότητες)

(2) Οι χρόνοι αναμονής μεταξύ διαδοχικών συμβάντων σε μια διαδικασία Poisson είναι εκθετικά κατανεμημένοι.

Έστω:

- $\{N(t), t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό v,
- T_1 χρόνος αναμονής μέχρι το πρώτο συμβάν και
- T_n χρόνος αναμονής από το n-1 μέχρι το n-οστό συμβάν όταν ($n = 2,3,...$).

Τότε οι τυχαίες μεταβλητές $T_1, T_2,...$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή (εκθετική) κατανομή $\mathcal{E}(v)$.

Κατανομή Γάμμα (Gamma)

$X \sim \mathcal{G}(a,\beta)$ $a>0,\ \beta>0$ όταν:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x/\beta} & x>0\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

όπου $\Gamma(a)=\int_0^{\infty}e^{-y}y^{a-1}dy \quad a>0$

a: παράμετρος μορφής, β : παράμετρος κλίμακας

- Όταν $a=1$, τότε $\Gamma(1)=1$ και η κατανομή γίνεται εκθετική με $\lambda = 1/\beta$.
- Όταν $a>1$, τότε κατανομή μονοκόρυφη με κορυφή στο $x=\beta(\alpha\text{-}1)$.
- Όταν a ακέραιος, τότε $\Gamma(\alpha)=(\alpha\text{-}1)!$ και η κατανομή είναι γνωστή ως κατανομή Erlang.

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X)=a\beta$ Διασπορά: $\mathrm{Var}(X)=a\beta^2$

Ροπογεννήτρια: $M_X(t)=(1-\beta t)^{-a}$

Κατανομή Γάμμα (Ιδιότητες)

Έστω

- $\{N(t),\ t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού v
- W_n: χρόνος αναμονής μέχρι την εμφάνιση του n-οστού συμβάντος.

Τότε η W_n έχει κατανομή γάμμα με $\alpha = n$ και $\beta = 1/v$ (κατανομή Erlang).

<u>**Απόδειξη**</u>: θ.δ.ο.

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \dfrac{v^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-tv} & t > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Το θεώρημα αποδεικνύει επίσης ότι το άθροισμα n τ.μ. με εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(v)$ έχει κατανομή γάμμα $\mathcal{G}(n,\ 1/v)$.

Κανονική κατανομή (Gauss)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ **όταν:** $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Μέση τιμή: $\mathrm{E}(X) = \mu$ **Διασπορά**: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

Ροπογεννήτρια: $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

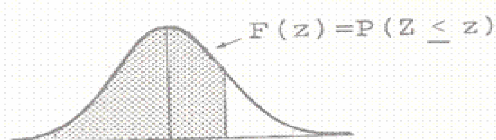
- Η $f_X(x)$ είναι συμμετρική γύρω από το μ.
- Ολες οι κεντρικές ροπές περιττής τάξεως είναι μηδέν.
- Δεν υπάρχει η α.σ.κ. $F_X(x)$ σε κλειστή μορφή.
- Υπάρχουν πίνακες με τιμές για την α.σ.κ. της $\mathcal{N}(0,1)$ – <u>τυπική κανονική κατανομή</u>

Κανονική κατανομή (συνέχεια)

ΠΙΝΑΚΑΣ Π.4 – Αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(z

της τυπικής κανονικής κατανομής

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	9.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998



Κανονική κατανομή (τυποποίηση)

Έστω $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Η τ.μ. $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.

Διότι:

1. Με χρήση ροπογεννητριών αποδεικνύεται ότι η κατανομή της είναι κανονική.
2. $\mathrm{E}\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X-\mu) = \dfrac{1}{\sigma}\left[\mathrm{E}(X)-\mu\right] = 0$
3. $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(X-\mu) = \dfrac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(X) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

Κανονική κατανομή (ιδιότητες)

(1) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ με $i = 1,2,\ldots,n$.

Τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός τους $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ έχει κανονική κατανομή μέσης τιμής $E(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$ και διασποράς $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2$.

(2) (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με κοινή μέση τιμή μ και κοινή διασπορά σ^2. Τότε για μεγάλο n η τ.μ. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ έχει προσεγγιστικά κανονική κατανομή μέσης τιμής $n\mu$ και διασποράς $n\sigma^2$.

Λογαριθμοκανονική Κατανομή (LogNormal)

$X \sim \mathcal{LN}(\zeta, \tau)$ όταν η τ.μ. $Y = \ln X \sim \mathcal{N}(\zeta, \tau)$, όπου $-\infty < \zeta < \infty$ και $\tau > 0$. Προφανώς: $X = \exp(Y)$ και έχει σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\tau x}} \exp\left[-\dfrac{1}{2\tau^2}(\ln x - \zeta)^2\right] & x > 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ισχύει ότι:

$$\mathrm{E}(X) = E(e^Y) = e^{\zeta + \frac{1}{2}\tau^2} \quad \mathrm{Var}(X) = e^{2\zeta + \tau^2}\left[e^{\tau^2} - 1\right]$$

Και για τον υπολογισμό της πιθανότητας:

$$P(a < X < b) = P(\ln a < \ln X < \ln b) =$$
$$= P\left(\frac{\ln a - \zeta}{\tau} < Z < \frac{\ln b - \zeta}{\tau}\right) = \Phi\left(\frac{\ln b - \zeta}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - \zeta}{\tau}\right)$$

Κατανομή Weibull

$X \sim \mathcal{WEI}(a, \beta)$ $a>0$, $\beta>0$ όταν:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\beta} x^{a-1} e^{-\left(x/\beta\right)^a} & x>0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

α.σ.κ. $$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(x/\beta\right)^a} & x>0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ισχύει ότι:

$$\mathrm{E}(X) = \beta\Gamma(1+\tfrac{1}{\alpha}) \quad \mathrm{Var}(X) = \beta^2\left[\Gamma(1+\tfrac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1+\tfrac{1}{\alpha})\right]$$

- Όταν $a=1$, τότε η κατανομή είναι εκθετική με $\lambda = 1/\beta$. $[\mathcal{WEI}(1, \beta) = \mathcal{E}(1/\beta)]$

- Όταν $X \sim \mathcal{WEI}(a, \beta)$, τότε $Y = (X/\beta)^{\alpha} \sim \mathcal{E}(1)$

Αξιοπιστία Συστημάτων

Για την μελέτη της αξιοπιστίας συστημάτων έστω

X : χρόνος λειτουργίας (διάρκεια ζωής) του συστήματος

Για την τ.μ. X μας ενδιαφέρουν:

✓ Η σ.π.π. $f_X(x)$ και η α.σ.κ. $F_X(x)$

✓ Συνάρτηση αξιοπιστίας: $R(t) = P(X > t) = 1 - F(t)$

✓ Ρυθμός αποτυχίας: $$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < X < t + \Delta t \mid X > t)}{\Delta t}$$

Αξιοπιστία Συστημάτων (συνέχεια)

Οι συναρτήσεις $f_X(.)$, $F_X(.)$, $R(.)$ και $h(.)$ χαρακτηρίζουν ισοδύναμα την κατανομή της X και συνδέονται μεταξύ τους.

- ✓ $$h(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<X<t+\Delta t, X>t)}{P(X>t)\cdot\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(X<t+\Delta t)-P(X<t)}{[1-P(X<t)]\cdot\Delta t}=$$ $$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}\frac{1}{[1-F(t)]}=\frac{F'(t)}{1-F(t)}$$
- ✓ ή $h(t)=\dfrac{f(t)}{R(t)}$
- ✓ ή $h(t)=\dfrac{[1-R(t)]'}{R(t)}=-\dfrac{-R'(t)}{R(t)}=\dfrac{d}{dt}[-\ln R(t)]$ δηλ. $R(t)=\exp\left[-\int_0^t h(s)ds\right]$