

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ Μ.Π. ΜΑΡΚΑΚΗ

Οι υπογραμμισμένοι αριθμοί αναφοράς (πχ. Bx, Bxx), αφορούν εργασίες που δημοσιεύτηκαν μετά την εκλογή μου στη θέση του Επίκουρου Καθηγητή (21/4/2009).

Η εργασία [B11] είχε υποβληθεί πριν την εκλογή μου, έγινε δε δεκτή και δημοσιεύτηκε μετά από αυτή.

Τα “ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ” εκφράζουν την γνώμη του συγγραφέα.

A. Διατριβές

[A1] (M.Sc. Thesis) Σε αυτή την διατριβή μελετάται το φαινόμενο των ηλεκτρομαγνητικών εκπομπών με μήκη κύματος στην ραδιοφωνική περιοχή, οι οποίες προέρχονται από την περιοχή του ηλιακού στέμματος και καλούνται ηλεκτρομαγνητικές εξάρσεις τύπου 3. Οι τελευταίες συμβαίνουν όταν δέσμες ηλεκτρονίων μερικών δεκάδων KeV αλληλεπιδρούν με το πλάσμα του ηλιακού στέμματος μέσω της αστάθειας «δέσμη-πλάσμα», προκαλώντας έτσι την εκπομπή ακτινοβολίας. Πιο συγκεκριμένα, αναπτύσσεται η θεωρία ότι κατά την διάρκεια εκρηκτικών ηλιακών φαινομένων η εκτόξευση ηλιακής ύλης προς το εξωτερικό προκαλεί μαγνητουδροδυναμικές αστάθειες στο μαγνητικό πεδίο οι οποίες με την σειρά τους είναι υπεύθυνες για την δημιουργία ενός διαταραγμένου ηλεκτρικού πεδίου που είναι ικανό να επιταχύνει διαδοχικά όλο και πιο έντονα τα ηλεκτρόνια μέσα στο ηλιακό στέμμα. Στο θεωρητικό μέρος της παρούσας εργασίας μελετάται η ανάπτυξη της αστάθειας του μαγνητικού πεδίου κατά την διάρκεια της προς τα έξω ροής της ηλιακής ύλης. Στο πειραματικό μέρος, με χρήση του υλικού των παρατηρήσεων διερευνάται από τη μία η ύπαρξη φαινομένων που αναμένονται από την θεωρητική ανάλυση, ενώ από την άλλη ερμηνεύονται χαρακτηριστικά των παρατηρήσεων βάσει της αναπτυσσόμενης θεωρίας. Τα τελικά συμπεράσματα είναι θετικά καθώς επιβεβαιώνουν την προτεινόμενη για την εξήγηση του φαινομένου θεωρία.

[A2] (Διδακτορική Διατριβή) Στην παρούσα διατριβή γίνεται μία προσπάθεια αντιμετώπισης των δυσκολιών που παρουσιάζει η μη γραμμικότητα, όπως αυτή εμφανίζεται σε συγκεκριμένα προβλήματα μηχανικής, μέσω συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ένα σημαντικό μέρος της διαδικασίας που ακολουθείται στηρίζεται σε χρήση κατάλληλων συναρτησιακών μετασχηματισμών, που συνδυάζονται πολλές φορές με “αυθαίρετες υποθέσεις” αλλά και άλλες μαθηματικές τεχνικές (χωρισμός μεταβλητών). Όσον αφορά τις “υποθέσεις”, αυτές αναφέρονται σε σχέσεις μεγεθών του προβλήματος που αντανakλούν σε συγκεκριμένες φυσικές συνθήκες. Έτσι

τελικά, ο παραπάνω συνδυασμός οδηγεί σε απλοποίηση της μορφής των εξισώσεων, καθώς και ορισμένες φορές σε υποβιβασμό της τάξεώς τους. Με αυτόν τον τρόπο, πολύπλοκες μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις μετασχηματίζονται σε ολοκληρώσιμες γραμμικές ή μη γραμμικές, συνήθεις ή μερικές, πρώτης ή δευτέρας τάξεως, χωρίς απώλεια των πληροφοριών που περιέχουν οι αρχικές μορφές. Η ολοκλήρωση των τελευταίων μπορεί να επιτευχθεί, στην περίπτωση των μερικών δ.ε με χρήση των γνωστών μεθόδων Lagrange, Charpit, και Monge, ενώ στην περίπτωση συνήθων δ.ε με συναρτήσεις ειδικών μορφών. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τα ελλειπτικά ολοκληρώματα, η χρήση των οποίων μπορεί να αποδειχθεί πολύτιμη στην ανάλυση μη γραμμικών προβλημάτων μηχανικής, όπως φαίνεται στο κεφάλαιο Β της διατριβής αυτής (ενότητα Β.5).

Όσον αφορά τις προαναφερθείσες μεθόδους λύσεως μερικών δ.ε, έχουν το πλεονέκτημα ότι καταλήγουν σε μορφές περιέχουσες αυθαίρετες συναρτήσεις. Η σημασία των τελευταίων έγκειται στην δυνατότητα εφαρμογής τους σε μια μεγάλη ποικιλία συνοριακών συνθηκών του φυσικού προβλήματος. Τέτοιες εφαρμογές αναπτύσσονται στο κεφάλαιο Γ της διατριβής (§Γ.2.6, §Γ.3.4). Τέλος, προσεγγίσεις ποσοτήτων που εμφανίζονται σε διάφορες εξισώσεις, χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά στο κεφάλαιο Β και αφορούν συγκεκριμένες αριθμητικές προσεγγίσεις ή προσεγγίσεις που παρέχονται από αναπτύγματα σε σειρές. Τα τελευταία γίνονται με σκοπό την απαλοιφή ρητών εκθετών που εμφανίζονται σε διάφορους όρους.

Έτσι βάσει των παραπάνω τεχνικών επιλύονται υπό κλειστή μορφή i) Σύστημα εντόνως μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει τα πεδία τάσεων και παραμορφώσεων σε ελαστικά-πλαστικά σώματα με μικρό εκθέτη κρατύσεως, υπό συνθήκες επιπέδου παραμορφώσεως (κεφάλαιο Β) και ii) Η μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση μικρών διαταραχών που αφορά τα πεδία ταχυτήτων και επιταχύνσεων στην αστρόβιλη ροή άνευ τριβής (κεφάλαιο Γ), στην ανεξάρτητη του χρόνου διδιάστατη ροή (ενότητα Γ.2), αλλά και στην εξαρτώμενη εκ του χρόνου τρισδιάστατη υπερηχητική ροή (ενότητα Γ.3). Για κάθε ένα από τα παραπάνω προβλήματα, οι λύσεις εφαρμόζονται σε συγκεκριμένες φυσικές συνθήκες. Επιπρόσθετα, στην παρούσα διατριβή γίνεται μία γενική παρουσίαση των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν διάφορα προβλήματα της μηχανικής των ρευστών και στερεών (κεφάλαιο Α), καθώς και της θεωρίας για την αστρόβιλη ροή άνευ τριβής (κεφάλαιο Γ1). Επίσης παρουσιάζεται η θεωρία των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων καθώς και των διαφόρων ειδικών συναρτήσεων που εμπλέκονται στις λύσεις των προβλημάτων και βάσει της θεωρίας δίνεται ο τρόπος υπολογισμού τους με σκοπό την απόκτηση

αριθμητικών αποτελεσμάτων. Αναπτύσσεται ακόμη η θεωρία που αφορά την μέθοδο Monge για την λύση μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ας τάξεως.

B. Δημοσιεύσεις

[B1] Στην παρούσα εργασία αποκτώνται κλειστές λύσεις των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν το εντατικό και παραμορφωσιακό πεδίο στο άκρο ρωγμής ενός κρατυνόμενου πλαστικού ασυμπίεστου υλικού υπό συνθήκες επιπέδου παραμορφώσεως. Το υλικό αυτό υπακούει στον νόμο Mises καθώς και σε ένα συγκεκριμένο εκθετικό νόμο κράτυνσης. Η επικρατούσα στο άκρο της ρωγμής ιδιομορφία τύπου $1/r$ στο γινόμενο τάσεων-παραμορφώσεων, καθορίζει την κατανομή των μεγεθών αυτών και μέσω της εισαγωγής κατάλληλης εντατικής και κυματικής συνάρτησης λαμβάνονται εκφράσεις που παρέχουν τις τάσεις και τις παραμορφώσεις στο άκρο της ρωγμής. Οι τελευταίες έχουν σαν αγνώστους τις συναρτήσεις $f(\theta)$ (τάσεις) και $g(\theta)$ (παραμορφώσεις) με θ την γωνία που μετρείται από τον άξονα της ρωγμής. Καθώς έχουμε συνθήκες επιπέδου παραμορφώσεως, απαιτείται μόνο ο υπολογισμός της f . Τέλος με χρήση του νόμου MISES και του εκθετικού νόμου κράτυνσης προκύπτει ένα σύστημα δύο συνήθων εντόνων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που εμπλέκουν τις f και g . Μία κατάλληλη αλγεβρική μεθοδολογία αποζεύξεως του συστήματος, καταλήγει σε μία μη γραμμική εξίσωση τετάρτης τάξεως ως προς f , η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί δύο φορές και με την βοήθεια των συνοριακών συνθηκών που εισάγονται στο πρόβλημα από τον Rice, να δώσει μία μη γραμμική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Σημειώνεται ότι η ύπαρξη εκθέτη, για χαμηλές τιμές του εκθέτη κράτυνσεως, αντιμετωπίζεται με χρήση αναπτύγματος σε σειρά. Έτσι, μέσω τεσσάρων κατάλληλων συναρτησιακών μετασχηματισμών καθώς και των παραπάνω συνοριακών συνθηκών κατορθώνεται η ολοκλήρωση της τελευταίας σε μία μη γραμμική πρώτης τάξεως. Στη συνέχεια, για μικρές τιμές του εκθέτη κράτυνσης, η εξίσωση αυτή επιλύεται αναλυτικά βάσει δύο ολοκληρωμάτων τετάρτου και πέμπτου βαθμού ως προς f . Έτσι αποκτάται μία πεπλεγμένη λύση που εμπλέκει την f με την γωνία θ μέσω της γωνιακής μεταβλητής των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων πρώτου, δευτέρου και τρίτου είδους. Μετά τον υπολογισμό της $f(\theta)$, μέσω των αποκτηθέντων κατά την διάρκεια της όλης διαδικασίας εξισώσεων λαμβάνουμε τις αντίστοιχες τιμές της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της f . Τέλος βάσει των αρχικών σχέσεων, υπολογίζεται πλήρως το εντατικό και παραμορφωσιακό πεδίο στο άκρο της ρωγμής. Εφαρμογές των κατασκευασθέντων λύσεων για ειδικές τιμές του εκθέτη κράτυνσης δίνουν αποτελέσματα τα οποία

βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με αυτά που έχουν δοθεί από τους Hutchinson και Rice και Rosengren μέσω αριθμητικών λύσεων του ίδιου προβλήματος.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

Η αποφυγή αριθμητικής λύσης μίας μη γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης τέταρτης τάξης και η αναγωγή της σε μία αναλυτικά επιλύσιμη εξίσωση πρώτης τάξης, μέσω της χρήσης συναρτησιακών μετασχηματισμών.

[B2] Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται αναλυτικές λύσεις που αφορούν την εντατική κατάσταση στο άκρο ρωγμής ενός ελαστικού-απολύτως πλαστικού επιπέδου σώματος το οποίο υπόκειται σε μικτή κατάσταση φορτίσεως υπό συνθήκες επιπέδου παραμορφώσεως. Μέσω των αναλυτικών αυτών λύσεων και σε συνδυασμό με το κριτήριο Mises, προσδιορίζονται οι γραμμές ασυνέχειας της συνιστώσας σ_{rr} των τάσεων. Επίσης με χρήση των συνοριακών συνθηκών καθώς και της συνέχειας των τάσεων $\sigma_{\theta\theta}$ και $\sigma_{r\theta}$ στις παραπάνω προσδιορισθείσες γραμμές υπολογίζονται οι σταθερές και οι παράμετροι που εμφανίζονται στις λύσεις για το εντατικό πεδίο του συγκεκριμένου προβλήματος. Τα προκύψαντα αποτελέσματα ευρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με αυτά που έχουν δοθεί από άλλους ερευνητές μέσω αριθμητικών ή ημιαναλυτικών λύσεων.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

Ο ακριβής αναλυτικός προσδιορισμός των πλαστικών ζωνών γύρω από την κορυφή της ρωγμής

[B3] Στην παρούσα εργασία κατασκευάζονται γενικές λύσεις κλειστής μορφής για τέσσερις μη γραμμικές περιπτώσεις της γενικής μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης μικρών διαταραχών που αναφέρεται στην δισδιάστατη ανεξάρτητη του χρόνου ροή άνευ τριβής. Εισάγοντας μια συνάρτηση f που αφορά στην σχέση των αδιάστατων συνιστωσών της ταχύτητας της ροής, σε συνδυασμό με την συνθήκη “αστρόβιλου”, και κάνοντας χρήση της μεθόδου Lagrange για την λύση μιας ημιγραμμικής εξίσωσης, καταλήγουμε σε μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση για την f που επιλύεται για τις τέσσερις θεωρούμενες μη γραμμικές περιπτώσεις της γενικής εξίσωσης μικρών διαταραχών. Εκτός της απλούστερης εξ’αυτών που ολοκληρώνεται στοιχειωδώς, οι υπόλοιπες ολοκληρώνονται με την χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών, όπου οι δύο συνθετότερες περιπτώσεις προσεγγίζονται γραμμικά. Τελικά παίρνουμε τις γενικές λύσεις των υπό μελέτη εξισώσεων που παρέχουν την f , καθώς και την πρώτη

συνιστώσα της ταχύτητας υπό πεπλεγμένη μορφή, μέσω μιας αυθαίρετης συνάρτησης F . Η θεωρία εφαρμόζεται για την απλούστερη από τις τέσσερις εξεταζόμενες μη γραμμικές εξισώσεις, όπου μέσω της κλασσικής συνθήκης της εφαπτομενικής ροής για την αστρόβιλη περίπτωση, μπορεί να προσδιοριστεί η συνάρτηση F . Έτσι λαμβάνονται κλειστής μορφής λύσεις για τον υπερβολικό και ελλειπτικό τύπο της εξίσωσης που αφορούν την δισδιάστατη ανεξάρτητη του χρόνου αστρόβιλη ροή που διατρέχει ένα “κυματοειδή τοίχο”. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά των Liepmann και Roshko, οι οποίοι επιλύουν την γραμμικοποιημένη μορφή της εξίσωσης αυτής.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

- 1) Η χρήση κατάλληλων συναρτησιακών μετασχηματισμών των μη γραμμικών εξισώσεων.
- 2) Κατασκευάζονται λύσεις για λιγότερο απλοποιημένες περιπτώσεις της γενικής εξίσωσης μικρών διαταραχών της ρευστομηχανικής, από αυτές που συνήθως επιλύονται.
- 3) Οι γενικές λύσεις περιέχουν μία αυθαίρετη συνάρτηση που επιτρέπει την εφαρμογή τους σε μία μεγάλη κλάση συνοριακών συνθηκών.

[B4] Στην εργασία αυτή επιλύεται αναλυτικά η μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση μικρών διαταραχών που αφορά την εξαρτώμενη εκ του χρόνου τρισδιάστατη (κυλινδρικές συντεταγμένες x, r, θ) υπερηχητική ροή που διατρέχει λεπτά σώματα εκ περιστροφής τα οποία εκτελούν μικρού πλάτους αρμονικές ταλαντώσεις ως προς ένα ακίνητο σημείο τους. Η ακολουθούμενη ανάλυση ξεκινά από τον κλασσικό διαχωρισμό του δυναμικού διαταραχής ταχυτήτων σε αυτό της επίδρασης της γεωμετρίας του σώματος (αξονοσυμμετρικό δυναμικό $\phi(x, r)$ και σε αυτό της επίδρασης των ταλαντώσεών του (δυναμικό ταλάντωσης $\psi(x, r, \theta, t)$). Έτσι η αρχική εξίσωση διασπάται σε δύο εξισώσεις, η πρώτη εκ των οποίων είναι μη γραμμική δευτέρας τάξεως ως προς ϕ , και αφορά την ανεξάρτητη του χρόνου ροή, ενώ η δεύτερη είναι γραμμική δευτέρας τάξεως ως προς ψ και αφορά την εξαρτώμενη εκ του χρόνου ροή. Στην συνέχεια, αντίθετα με τις ημιαναλυτικές μεθόδους γραμμικών προσεγγίσεων που ακολουθούνται στη διεθνή βιβλιογραφία (ιδίως αυτές της «παραβολικής» και της «ολοκληρωτικής» μεθόδου), με χρήση της αναλυτικής μεθόδου Monge για την λύση μη γραμμικής ή γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως γενικής μορφής και σε συνδυασμό με την τεχνική χωρισμού μεταβλητών, αποκτώνται γενικές αναλυτικές λύσεις για τις δύο παραπάνω εξισώσεις. Η μόνη γραμμική προσέγγιση γίνεται μέσω μίας «ad hoc» υποθέσεως και αφορά την εξίσωση του δυναμικού ϕ . Για το αξονοσυμμετρικό

δυναμικό ϕ η λύση έχει τη μορφή μιας τριπαραμετρικής οικογένειας επιφανειών, ενώ για το δυναμικό ταλάντωσης ψ εξάγεται λύση υπό τη μορφή σειράς η οποία περιλαμβάνει μία αυθαίρετη συνάρτηση $F(x,t)$ που προκύπτει μέσω της ανάλυσης Monge και επιτρέπει την κατασκευή μιας γενικής αναλυτικής λύσης για οποιαδήποτε γεωμετρία στερεού εκ περιστροφής και αρχικών ή/και συνοριακών συνθηκών. Στην συγκεκριμένη εργασία θεωρείται ροή που διατρέχει ένα ορθό κυκλικό κώνο που εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις μικρού εύρους ως προς ακίνητο σημείο του και λαμβάνονται τέσσερις αρχικές και συνοριακές συνθήκες που αφορούν τη ροή στο άπειρο, πάνω στην επιφάνεια του σώματος, οριακά πάνω στον άξονα του σώματος (κορυφή του κώνου), καθώς και την ευστάθεια της ροής όταν αυτή εγκαταλείπει τον κώνο. Έτσι εξάγεται μία πολύπλοκη υπερβατική εξίσωση, οι άπειρες λύσεις της οποίας παρέχουν μία λύση ιδιοτιμών για το δυναμικό ψ η οποία εμπλέκει τις μεταβλητές x, r και t του προβλήματος μέσω των ειδικών συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους. Τελικά προκύπτουν οι αναλυτικές εκφράσεις για τις συνιστώσες της ταχύτητας της ροής μέσω συγκεκριμένων σχέσεων που συνδέουν τις τελευταίες με το δυναμικό διαταραχής της ροής. Για την απόδειξη της σύγκλισης των σειρών που περιλαμβάνονται στις τελευταίες, απαιτείται μια αναλυτική διερεύνηση, η οποία γίνεται στην εργασία [B5], όπου μελετώνται και οι αντίστοιχες επιταχύνσεις του πεδίου ροής στην επιφάνεια του σώματος.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

- 1) Η αμιγής ακολουθούμενη αναλυτική διαδικασία επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος που σε αντίθεση με άλλες αριθμητικές ή προσεγγιστικές τεχνικές ή άλλες ημιαναλυτικές μεθόδους προσεγγίσεων, οδηγεί σε λύσεις που λαμβάνουν υπ' όψη τους την μη γραμμικότητα του φυσικού φαινομένου, όπως αυτή αποτυπώνεται στην αρχική εξίσωση.
- 2) Η χρήση αυθαίρετης συνάρτησης, ο προσδιορισμός της οποίας βάσει των εκάστοτε αρχικών και συνοριακών συνθηκών, παρέχει ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών της γενικής λύσης.

[B5] Στην εργασία αυτή διερευνάται και αποδεικνύεται η σύγκλιση ιδιόμορφων σειρών με σύνθετους όρους, όπως είναι αυτές που προκύπτουν στις ειδικές λύσεις του προβλήματος της εξαρτώμενης εκ του χρόνου τρισδιάστατης υπερηχητικής ροής, που αναλύεται στην εργασία [B4]. Η παρουσία στους παρανομαστές των όρων των αντίστοιχων σειρών, δυνάμεων της συνάρτησης $H(\xi_i) = J_1(\xi_i) - \xi_i J_0(\xi_i)$, όπου $\xi_i = \text{σταθερά} \times \mu_i$, με $\mu_i, i=1,2,\dots$, την αύξουσα ακολουθία των θετικών ριζών της υπερβατικής εξίσωσης που λύθηκε στην εργασία [B4], δίνει μεγάλες αποκλίσεις στις

τιμές των σειρών στην περίπτωση που τα ξ_i λάβουν τιμές σε μία μικρή περιοχή των ριζών της εξίσωσης $H(x)=0$, κάτι που αποδεικνύεται ότι συμβαίνει περιοδικά. Οι τιμές αυτές καλούνται «σημεία αποσταθεροποίησης» (υποακολουθία ξ_{i_n}). Στη συνέχεια γράφονται απλοποιημένες προσεγγιστικές εκφράσεις των μελετώμενων σειρών, όπου εντοπίζονται οι ποσότητες, οι οποίες καθώς $i \rightarrow \infty$ μπορούν να «αποσβέσουν» την επίδραση της συνάρτησης H στα «σημεία αποσταθεροποίησης» ξ_{i_n} , δηλαδή να σταθεροποιήσουν σταδιακά την τιμή των σειρών. Με αυτή την έννοια οι όροι αυτοί καλούνται «όροι σύγκλισης» (στα σημεία ξ_{i_n}) και η σύγκλιση των αντίστοιχων ακολουθιών τους στο μηδέν αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για την σύγκλιση των σειρών των λύσεων. Αναζητώντας κατόπιν μία ικανή συνθήκη σύγκλισης των ακολουθιών αυτών, κατασκευάζονται ακολουθίες με τους ίδιους όρους αλλά με μεταβλητές των διαφόρων συναρτήσεων αντί των ξ_{i_n} τις τιμές p_r , $r=1,2,\dots$, οι οποίες απέχουν σταθερές αποστάσεις από τις αντίστοιχες ρίζες s_r , $r=1,2,\dots$ της H και λαμβάνονται σε ένα διάστημα $[s_r - \varepsilon_0, s_r)$ με $\varepsilon_0 \leq 10^{-6}$ για κάθε αντίστοιχη ρίζα s_r . Οι παραπάνω ακολουθίες (με μεταβλητές τις τιμές p_r) καλούνται «ιδανικές ακολουθίες», καθώς η σύγκλισή τους στο μηδέν αποτελεί ένα απόλυτο κριτήριο σύγκλισης των προηγούμενων ακολουθιών και κατ' επέκταση των αρχικών σειρών. Η σύγκλιση των «ιδανικών ακολουθιών» αποδεικνύεται μέσω υπολογιστή και παράλληλα καθορίζονται οι τιμές των μεταβλητών ξ_i , για τις οποίες μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι σειρές έχουν συγκλίνει έως μια επιθυμητή τάξη προσέγγισης.

Με χρήση των τελικών τιμών των σειρών, μέσω των τύπων που έχουν εξαχθεί για το πεδίο ροής του υπό μελέτη προβλήματος, αποκτώνται γραφικά αποτελέσματα για τις ταχύτητες και επιταχύνσεις που αναπτύσσονται πάνω στο σώμα, συναρτήσει της θέσης και του χρόνου.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

Η ίδια η αναλυτική τεχνική και μεθοδολογία που ακολουθείται στην εργασία, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η απόδειξη της σύγκλισης σειρών με σύνθετους ως προς την μορφή όρους, οι οποίες εμφανίζονται στις ειδικές λύσεις ενός προβλήματος ρευστομηχανικής.

[B6] Στην εργασία αυτή επιτυγχάνεται η αναγωγή τριών ιδιόμορφων συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODEs) δευτέρας τάξεως που διέπουν προβλήματα μη γραμμικών ταλαντωτών σε εξισώσεις Abel δευτέρου είδους (AE2). Πιο συγκεκριμένα αναλύονται οι εξισώσεις των ελεύθερων μη γραμμικών ταλαντωτών :

1. Duffing Equation
$$y''_{xx} + \lambda_1 y'_x + \lambda_2 y^3 = 0$$

2. Rayleigh Equation $y''_{xx} + ky'_x + my'^3_x + n^2y = 0$

3. Van der Pol Equation $y''_{xx} - \varepsilon(1 - y^2)y'_x + y = 0$

Κατ' αρχάς η εξίσωση Rayleigh ανάγεται σε μία εξίσωση πανομοιότυπη με αυτή της Van der Pol. Στη συνέχεια, μέσω δύο βασικών συναρτησιακών μετασχηματισμών οι εξισώσεις Duffing και Van der Pol ανάγονται σε μία γενική εξίσωση Abel της μορφής

$$[g_1(x)y + g_0(x)]y'_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$$

Με χρήση δύο επιπρόσθετων μετασχηματισμών η τελευταία μεταπίπτει με την σειρά της σε μία AE2, δηλαδή μία εξίσωση της μορφής

$$yy'_x - y = f(x)$$

Επίσης δείχνεται ότι και η εξίσωση Rayleigh μπορεί να αναχθεί σε μία AE2 αντίστοιχη με αυτήν της εξίσωσης Van der Pol.

Σε όλες τις παραπάνω αποκτηθείσες εξισώσεις Abel δευτέρου είδους, η μορφή της $f(x)$ δεν οδηγεί σε ακριβείς αναλυτικές λύσεις, όπως αποδεικνύεται από τους Polyanin και Zaitsev (1999). Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την έλλειψη τέτοιων λύσεων στην διεθνή βιβλιογραφία, το αποτέλεσμα της παρούσης εργασίας ισχυροποιεί την άποψη ότι η έλλειψη ακριβών λύσεων δεν είναι τυχαία και ότι απαιτείται η κατασκευή καινούργιων συναρτήσεων για την ακριβή επίλυση διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν προβλήματα μη γραμμικών ταλαντωτών.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

Η αναλυτική διαδικασία αναγωγής ιδιόμορφων μη γραμμικών ODEs σε εξισώσεις Abel, για τις οποίες είναι γνωστή, έως σήμερα, η ύπαρξη ή μη, αναλυτικών λύσεων.

[B7] Στην παρούσα εργασία κατασκευάζεται μια ακριβής αναλυτική λύση για την μη γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως που περιγράφει τον ελεύθερο ταλαντωτή Duffing με απόσβεση (βλέπε την εξίσωση στο [B6]). Μέσω ενός κλασσικού μετασχηματισμού και κατάλληλης διαμόρφωσης των συντελεστών, η εξίσωση Duffing ανάγεται στην εξίσωση Abel δευτέρου είδους

$$nn'_r - n = -r^3, \quad -\infty < r < +\infty, \quad n = n(r), \quad (1)$$

όπου

$$y = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_2}} r, \quad y'_x = -\frac{\lambda_1^2}{\sqrt{\lambda_2}} n. \quad (2)$$

Σύμφωνα με τους Polyanin και Zaitsev, η (1) δεν εμπίπτει στις επιλύσιμες μορφές της εξίσωσης Abel. Εδώ παρουσιάζεται μία ακριβής αναλυτική λύση της (1) που στηρίζεται

στα αποτελέσματα μιας μαθηματικής μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στην εργασία [9] (βλέπε τις αναφορές της παρούσης). Ο τύπος της αναλυτικής λύσης περιλαμβάνει τις ρίζες μίας κυβικής εξίσωσης (της μορφής Cardan) στις οποίες εμπλέκονται μια σταθερά ολοκλήρωσης λ και μια συνάρτηση $G(r;\lambda)$ που εκφράζεται ως συνδυασμός κλασσικών συναρτήσεων. Καθώς υπάρχουν διάφοροι τύποι λύσεων της κυβικής αυτής εξίσωσης, προκύπτει ότι η λύση διαχωρίζεται σε συνεχόμενα υποδιαστήματα $[r_i, r_{i+1}]$, όπου το είδος της εξαρτάται από το πρόσημο που λαμβάνει αντίστοιχα η διακρίνουσα της κυβικής μορφής. Για τον υπολογισμό του προσήμου αυτού, καθώς και των χαρακτηριστικών τιμών r_i , απαιτείται η επίλυση διαδοχικών μη γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων που εκφράζουν την συνέχεια της λύσης στα σημεία αλλαγής. Επίσης ως αποτέλεσμα της λύσης των συστημάτων αυτών προκύπτει και ο προσδιορισμός της τιμής της σταθεράς-παραμέτρου λ ($\lambda^{(i)}$) που χαρακτηρίζει κάθε ένα από τα διαστήματα λύσης. Τέλος, ο υπολογισμός του n για κάθε τιμή του r , μέσω της παραπάνω διαδικασίας, παρέχει βάσει της (2) το διάγραμμα φάσεων του ελεύθερου αποσβενόμενου μη γραμμικού ταλαντωτή Duffing.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

Η βήμα προς βήμα κατασκευή της λύσης μέσω διαδοχικών επιλύσεων συστημάτων εντόνως μη γραμμικών εξισώσεων, όπου το είδος της λύσης στο πεδίο των φάσεων δεν είναι μοναδικό αλλά χωρίζεται σε κλάδους που ισχύουν σε διαδοχικά υποδιαστήματα, σύμφωνα με το πρόσημο της διακρίνουσας μιας κυβικής εξίσωσης.

[B8] Στην παρούσα δημοσίευση αναπτύσσεται αρχικά μια μέθοδος η οποία οδηγεί σε μια ακριβή αναλυτική λύση μιας μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως που οφείλεται στον Gambier. Η εξαχθείσα λύση είναι γενικότερης μορφής από αυτήν που δίνεται από τον ίδιο τον Gambier. Στην συνέχεια επιλέγεται μια άλλη μη γραμμική εξίσωση δευτέρας τάξεως, όπου εφαρμόζεται η αναπτυχθείσα αναλυτική τεχνική παρέχοντας μία γενική λύση κλειστής μορφής. Η ακολουθούμενη μεθοδολογία στηρίζεται στην εισαγωγή μιας καινούργιας συνάρτησης που μπορεί να προσδιοριστεί ως αντίστροφη ενός συγκεκριμένου αόριστου (ή γενικευμένου) ολοκληρώματος, θέμα που διερευνάται τεχνικά στην παρούσα εργασία. Αποδεικνύεται επίσης ότι η αποκτηθείσα λύση ισχύει για συγκεκριμένους συνδυασμούς τιμών των παραμέτρων της εξίσωσης, καθώς και ότι περιλαμβάνει δύο αυθαίρετες παραμέτρους που υπολογίζονται από τις εκάστοτε αρχικές συνθήκες. Η λύση εφαρμόζεται σε δύο ειδικές περιπτώσεις της θεωρούμενης γενικής εξίσωσης οι οποίες προβλέπονται από τα αποτελέσματα της ανάλυσης, και όπου μέσω της αντιστροφής των αντίστοιχων κατασκευασμένων βάσει της

αναπτυχθείσας μεθόδου ολοκληρωμάτων, προσδιορίζονται αρχικά η χαρακτηριστική (καινούργια) συνάρτηση και κατόπιν η ακριβής λύση, υπό λελυμένη μορφή, των υπό μελέτη εξισώσεων. Τέλος δίνονται οι εκφράσεις, τα ιδιόμορφα σημεία (πόλοι), καθώς και τα γραφήματα των χαρακτηριστικών αυτών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις δύο επιλύμενες ειδικές περιπτώσεις.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

- 1) Η κατασκευή μιας γενικής αναλυτικής μεθοδολογίας επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων, που εμπνέεται από την λύση μιας συγκεκριμένης εξίσωσης.
- 2) Η κατασκευή καινούργιων (χαρακτηριστικών) συναρτήσεων ο προσδιορισμός των οποίων οδηγεί στην εξαγωγή μιας γενικής αναλυτικής λύσης της εξίσωσης.

[B9] Στην εργασία αυτή, μια γενική μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, δευτέρου βαθμού μη γραμμικότητας, της μορφής

$$y_x'^2 + \sigma_1(x) y y_x' + \sigma_2(x) y^2 = \omega(x), \quad y = y(x), \quad (1)$$

με $\sigma_1, \sigma_2, \omega$ αναλυτικές συναρτήσεις του x , μέσω μιας σειράς κατάλληλων συναρτησιακών μετασχηματισμών που περιλαμβάνουν υπερβολικές συναρτήσεις, ανάγεται σε μια εξίσωση Abel πρώτου είδους. Η συγκεκριμένη μορφή της τελευταίας επιτρέπει την διαμόρφωση μιας ικανής συνθήκης για την ακριβή επίλυση της αρχικής εξίσωσης υπό κλειστή μορφή, καθώς σε δύο περιπτώσεις όπου οι συναρτησιακοί συντελεστές της πληρούν συγκεκριμένες σχέσεις (που μπορούν να διατυπωθούν σε μια), η εξίσωση Abel μετατρέπεται σε χωριζομένων μεταβλητών παρέχοντας μια γενική λύση της (1) υπό λελυμένη και υπό πεπλεγμένη, αντίστοιχα με την περίπτωση, μορφή. Όσον αφορά την γενική περίπτωση, παραλείποντας στην εξίσωση Abel ένα μη γραμμικό όρο σε σύγκριση με την μονάδα αποκτώνται αναλυτικές προσεγγιστικές λύσεις της (1) και μελετάται το διάστημα τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής στο οποίο οι λύσεις αυτές ισχύουν έως μια επιθυμητή τάξη προσέγγισης. Τέλος, θεωρώντας πέντε “δευτεροβάθμιες” περιπτώσεις μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως που παρουσιάζονται από τους Polyanin και Zaitsev, καθώς πληρούν την εξαχθείσα ικανή συνθήκη, επιλύονται (παρουσιάζονται δύο από αυτές) υπό πεπλεγμένη μορφή, καθώς και υπό λελυμένη μορφή σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις. Σημειώνουμε ότι στην παραπάνω αναφορά, οι τέσσερις από αυτές επιλύονται μόνο παραμετρικά, ενώ η λύση της τελευταίας (μια από τις δύο που παρουσιάζονται εδώ) περιλαμβάνει ένα ολοκλήρωμα ο υπολογισμός του οποίου επιτυγχάνεται για συγκεκριμένες τιμές του λόγου δύο παραμέτρων της εξίσωσης. Αντίθετα, η ακριβής αναλυτική λύση που αποκτάται βάσει

των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας καλύπτει ένα πολύ μεγαλύτερο αριθμό περιπτώσεων της εξίσωσης όσον αφορά περιορισμούς στη σχέση των εμπλεκόμενων παραμέτρων.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

Η χρήση βασικών υπερβατικών συναρτήσεων στους ακολουθούμενους μετασχηματισμούς, στις οποίες οφείλεται η ειδική μορφή της εξαχθείσας εξίσωσης Abel πρώτου είδους. Η μορφή αυτή επιτρέπει την εξαγωγή ακριβών αναλυτικών λύσεων κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

[B10] Στην παρούσα εργασία μελετάται το φωτοβαρυντικό πρόβλημα Hill με πλάτυνση, που αποτελεί ένα καινούργιο μοντέλο προσέγγισης σχετικών αστρονομικών προβλημάτων, καθώς συνδυάζει την επίδραση της ακτινοβολίας του πρωτεύοντος σώματος με αυτήν της πλάτυνσης του δευτερεύοντος σώματος στα χαρακτηριστικά δυναμικά γνωρίσματα του μοντέλου. Έτσι εκκινώντας από τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του αντίστοιχου περιορισμένου προβλήματος τριών σωμάτων, με κατάλληλες αλλαγές παίρνουμε τις τελικές εξισώσεις κίνησης, όπως και το ολοκλήρωμα Jacobi, που αντιστοιχούν στο υπό εξέταση πρόβλημα. Βάσει των εξισώσεων αυτών και με χρήση επαναληπτικών μεθόδων προσδιορίζονται προσεγγιστικά οι θέσεις των σημείων ισορροπίας και διαπιστώνεται η επίδραση της ακτινοβολίας και της πλάτυνσης σε αυτές. Επιπρόσθετα μελετάται η ευστάθειά των σημείων αυτών μέσω γραμμικής ανάλυσης. Όλες οι εμπλεκόμενες ποσότητες, με χρήση αναπτυγμάτων MacLaurin, εκφράζονται μέχρι μια επιθυμητή τάξη με δυνάμεις των δύο κυρίων παραμέτρων του προβλήματος, αυτήν της ακτινοβολίας (Q_1) και αυτήν της πλάτυνσης (a_2).

Στη συνέχεια, αναπτύσσοντας σε σειρές Taylor τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων κίνησης γύρω από τα συγγραμμικά σημεία ισορροπίας, όπου και μεταφέρεται η αρχή των αξόνων, και εφαρμόζοντας την μέθοδο διαταραχών Lindstedt-Poincaré με κατάλληλο μετασχηματισμό του χρόνου, κατασκευάζουμε διαδοχικές προσεγγίσεις των περιοδικών τροχιών που απορρέουν από αυτά τα σημεία ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα, παίρνουμε αναλυτικές προσεγγιστικές εκφράσεις τρίτης τάξης για τις δισδιάστατες (στο επίπεδο xy) περιοδικές τροχιές, καθώς και αντίστοιχες εκφράσεις πέμπτης τάξης για τις τρισδιάστατες (χωρικές) τροχιές. Η αναλυτική αυτή διαδικασία απαιτεί την επίλυση διαδοχικών γραμμικών μη ομογενών διαφορικών συστημάτων (ή εξισώσεων) δεύτερης τάξης που επιτυγχάνεται μέσω της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων του Lagrange. Τέλος, βάσει των αρχικών συνθηκών που παρέχουν οι αποκτηθείσες αναλυτικές εκφράσεις, στο επίπεδο αλλά και στο χώρο, παίρνουμε τις αντίστοιχες οικογένειες

Lyapunov των περιοδικών τροχιών, καθώς και τις χαρακτηριστικές καμπύλες κατά περίπτωση, οι οποίες συγκρίνονται με τις αντίστοιχες που εξάγονται αριθμητικά.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

Το ίδιο το μελετώμενο μοντέλο, καθώς είναι καινούργιο και μπορεί να δώσει αποτελέσματα μεγαλύτερης ακρίβειας για τα δυναμικά χαρακτηριστικά σχετικών αστρονομικών συστημάτων.

.....

[B11] Στην εργασία αυτή εξάγεται μια λύση πεπλεγμένης μορφής για εξισώσεις Abel πρώτου είδους όπου λείπει ο “ελεύθερος” (από την εξαρτημένη μεταβλητή) όρος. Η καταγραφή των επιλύσιμων μέχρι τώρα περιπτώσεων (με αναφορά το σύγγραμμα των Polyanin και Zaitsev (αναφορά [1] της παρούσας)), καταδεικνύει την δυσκολία εξαγωγής αναλυτικών λύσεων κλειστής μορφής των εξισώσεων αυτών. Η ανάλυση στηρίζεται στην επιλογή ενός συγκεκριμένου συναρτησιακού μετασχηματισμού που δίδεται από τον Kamke, καθώς και μιας περιέχουσας αυθαίρετες συναρτήσεις εξίσωσης Abel πρώτου είδους η οποία επιλύεται πεπλεγμένα. Με κατάλληλο συνδυασμό των αναλυτικών αυτών εργαλείων παίρνουμε μια λύση της αρχικής εξίσωσης, υπό πεπλεγμένη επίσης μορφή, όπου οι εμπλεκόμενες αυθαίρετες συναρτήσεις έχουν απαλειφθεί. Επιπρόσθετα κατά την ακολουθούμενη διαδικασία εξάγεται και η ικανή συνθήκη για την απόκτηση της λύσης αυτής. Η αποκτηθείσα λύση καθώς και η εξαχθείσα συνθήκη περιέχουν μια αυθαίρετη σταθερά, ο ρόλος της οποίας στην επιλυσιμότητα μιας εξίσωσης Abel πρώτου είδους, συζητείται και δείχνεται με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

- 1) Ο ιδιαίτερος συνδυασμός δεδομένων αναλυτικών εργαλείων και ιδιαίτερα η χρήση των αυθαίρετων συναρτήσεων που εμπλέκονται στην ανάλυση.
- 2) Η διερεύνηση της σύνθετης φύσης της αυθαίρετης σταθεράς που περιέχεται στη εξαχθείσα αναλυτική λύση της μελετώμενης εξίσωσης Abel, όπου μάλιστα προκύπτει και η δυνατότητα κατασκευής επιλύσιμων υπό κλειστή μορφή, περιπτώσεων της εξίσωσης αυτής.

[B12] Στην εργασία αυτή διερευνάται η αναλυτική επίλυση μέσω τεχνικών που εφαρμόζονται σε συνήθεις ODEs, μιας γενικής μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης που εμπλέκει τις συνιστώσες, σε ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, καθώς και τις χωρικές παραγώγους τους, που αφορούν ένα τρισδιάστατο, αστρόβιλο, ασθενές

διανυσματικό πεδίο ανεξάρτητο του χρόνου. Μέσω μιας κλασσικής αυθαίρετης υπόθεσης, και διερεύνησης εν συνεχεία της συμβατότητας των λύσεων των προκύπτουσών γενικευμένων εξισώσεων Lagrange, η αρχική μερική διαφορική εξίσωση ανάγεται τελικά σε ένα σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, η πρώτη εκ των οποίων, η οποία και μελετάται εδώ, εμπλέκει μόνο τις επίπεδες συνιστώσες του πεδίου (το επίπεδο καθορίζεται από τους συνδυασμούς των συνιστωσών στους όρους της αρχικής εξίσωσης), και αφορά το δισδιάστατο πρόβλημα, ενώ η δεύτερη προκύπτει στη γενική τρισδιάστατη περίπτωση.

Έτσι μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών και με χρήση της τεχνικής διάσπασης (μέσω αυθαίρετης συνάρτησης), καθώς και γραμμικών προσεγγίσεων που στηρίζονται στο «ασθενές» του πεδίου, η δισδιάστατη εξίσωση ανάγεται σε μια εξίσωση Abel δεύτερου είδους, η οποία επιλύεται παραμετρικά. Η ανάλυση και τα αποτελέσματα εφαρμόζονται στην κλασσική δισδιάστατη ανεξάρτητη του χρόνου εξίσωση μικρών διαταραχών για αστρόβιλη ροή άνευ τριβής που διατρέχει επιφάνεια στερεού. Η συνοριακή συνθήκη της εφαπτομενικής ροής στην επιφάνεια επιτρέπει τον υπολογισμό της παραμέτρου, και συνεπώς και των συνιστωσών διαταραχής της ταχύτητας, πάνω στην επιφάνεια του σώματος που διατρέχει η ροή, καθώς και σε μία λεπτή ζώνη πάνω από αυτή, το πάχος της οποίας μπορεί να εκτιμηθεί ανάλογα με την επιθυμητή τάξη προσέγγισης. Γραφήματα εξάγονται για το πεδίο ταχυτήτων που αφορά ροή σε επιφάνειες ημιτονοειδούς και παραβολοειδούς γεωμετρίας αντίστοιχα.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

- 1) Η αλγεβρική επεξεργασία της παραμετρικής λύσης η οποία οδηγεί σε αριθμητικά αποτελέσματα για τις επίπεδες συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων της προαναφερθείσης εφαρμογής. Σημειώνεται ότι όσον αφορά τις παραμετρικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων, είναι γενικά δύσκολος ο αριθμητικός υπολογισμός της παραμέτρου και συνεπώς και των αντίστοιχα εκφραζόμενων μεταβλητών του προβλήματος.
- 2) Η αποτελεσματικότητα της ανάλυσης ως προς την εφαρμογή της στην εξίσωση μικρών διαταραχών συγκριτικά με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της εργασίας [B3], όπου μελετήθηκε η ίδια εξίσωση (με την ίδια αυθαίρετη υπόθεση). Λεπτομερής αναφορά στο θέμα αυτό γίνεται στην εισαγωγή της παρούσας εργασίας

[B13] Στην εργασία αυτή η ακολουθούμενη αναλυτική διαδικασία διερευνά την δυνατότητα απόκτησης ακριβών αναλυτικών λύσεων μη γραμμικών αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως, της μορφής που διέπει την κίνηση μη

γραμμικών ταλαντωτών (Liénard, Rayleigh), αλλά και πλείστων άλλων προβλημάτων της Φυσικής και Μηχανικής. Έτσι αρχικά μέσω ενός κατάλληλου μετασχηματισμού, οι υπό εξέταση εξισώσεις ανάγονται σε εξισώσεις Abel πρώτου είδους (εξισώσεις (Ab-1)). Εν συνεχεία εισάγοντας μία αυθαίρετη συνάρτηση και κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων της εργασίας [B11] (όσον αφορά την λύση και την αντίστοιχη ικανή συνθήκη απόκτησης της, για εξισώσεις (Ab-1)), η αυθαίρετη συνάρτηση προσδιορίζεται και μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων εξάγεται υπό κλειστή μορφή, ως λύση των υπό θεώρηση αυτόνομων εξισώσεων. Οι διάφορες παράμετροι που προκύπτουν κατά την ανάλυση και εμπλέκονται στην λύση, προσδιορίζονται από μία ακόμη προκύπτουσα κατά την διαδικασία εξίσωση. Είναι πιθανόν ο προσδιορισμός τους να είναι δυνατός μόνο για ειδικές περιπτώσεις της αρχικής αυτόνομης εξίσωσης. Τα αποτελέσματα εφαρμόζονται σε τέσσερις εξισώσεις Liénard για τις τρεις εκ των οποίων μόνο πρώτα ολοκληρώματα υπό παραμετρική μορφή έχουν εξαχθεί έως τώρα στην βιβλιογραφία, ενώ για την τελευταία, έχει δοθεί μία λύση παραμετρικής μορφής.

Επιπρόσθετα, βάσει των εξαχθέντων αναλυτικών αποτελεσμάτων κατασκευάζουμε οικογένειες δισδιάστατων αυτόνομων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, τα οποία μπορούν να επιλυθούν ακριβώς υπό κλειστή μορφή με χρήση των τύπων και των εξισώσεων που αφορούν τη λύση των αυτόνομων δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Στα συστήματα αυτά το δεύτερο μέλος της μίας εκ των δύο εξισώσεων, συνίσταται από μία αυθαίρετη συνάρτηση $g(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους $g_{,x}$ και $g_{,y}$, οι οποίες εμπλέκονται μαζί με την g στο δεύτερο μέλος της άλλης εξίσωσης. Η μέθοδος εφαρμόζεται για δύο γενικές μορφές συναρτήσεων $g(x, y)$ σε συνδυασμό με λυμένες στα παραπάνω παραδείγματα αυτόνομες εξισώσεις.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

- 1) Ο συσχετισμός κλασικών αυτόνομων εξισώσεων δεύτερης τάξης με την ανάλυση που αφορά μία δύσκολη κατηγορία μη γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Αναφέρουμε ενδεικτικά ότι καμία από τις αναχθείσες μορφές εξισώσεων (Ab-1) στα τέσσερα επιλυόμενα παραδείγματα της εργασίας δεν ανήκει στις επιλύσιμες περιπτώσεις σύμφωνα με τις κλασικές μεθόδους της βιβλιογραφίας. Επιπρόσθετα η τεχνική της διάσπασης της εξίσωσης μέσω αυθαίρετης συνάρτησης αποδεικνύεται πολύτιμο αναλυτικό εργαλείο.
- 2) Η κατασκευή αυτόνομων μη γραμμικών συστημάτων που μπορούν να επιλυθούν υπό κλειστή μορφή μπορεί να αποδειχτεί ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση πραγματικών δισδιάστατων μοντέλων που διέπουν μη γραμμικά προβλήματα στις θετικές και τις

εφαρμοσμένες επιστήμες.

[B14] Στην εργασία αυτή κατασκευάζονται προσεγγιστικές αναλυτικές εκφράσεις των περιοδικών λύσεων που προκύπτουν από (τοπικές) διακλαδώσεις Hopf και αφορούν μη γραμμικά προβλήματα οικονομικής δυναμικής που περιγράφονται από τρισδιάστατα συνεχή συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Ως μοντέλα εφαρμογής της παρουσιαζόμενης ανάλυσης χρησιμοποιούνται δύο εκδοχές του μακροδυναμικού Καλντοριανού μοντέλου ανοιχτής οικονομίας που είχε προταθεί από τον Asada. Αρχικά με χρήση κλασικών κατάλληλων αναλυτικών εργαλείων αποκτώνται οι περιοχές ευστάθειας σε σχέση με τις καμπύλες Hopf, στο χώρο των παραμέτρων του προβλήματος. Εν συνεχεία, για την επίτευξη του κύριου στόχου της εργασίας, δηλαδή της αναλυτικής περιγραφής των επιχειρηματικών κύκλων που εμφανίζονται στα μη γραμμικά οικονομικά μοντέλα, γίνεται χρήση μίας τροποποιημένης εκδοχής της μεθόδου της «Αρμονικής Ισορροπίας» (*Harmonic Balance Method*), η οποία γενικά έχει επιτυχώς εφαρμοσθεί σε αντίστοιχα προβλήματα μηχανικής για τον προσδιορισμό οριακών κύκλων, αλλά δεν είναι τόσο γνωστή στη μη γραμμική οικονομική δυναμική. Η μέθοδος αυτή συνδυάζει μια φασματική ανάλυση του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος με μία τεχνική διαταραχών, όπου μέσω της εισαγόμενης παραμέτρου μικρών διαταραχών κατασκευάζονται διαδοχικά οι τάξεις προσέγγισης των περιοδικών λύσεων. Παράλληλα προσδιορίζεται και η ευστάθεια των κύκλων, δηλαδή το είδος της διακλάδωσης Hopf. Τέλος η αξιοπιστία της αναλυτικής προσέγγισης ελέγχεται με σύγκριση με τους αριθμητικά οριζόμενους κύκλους.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

- 1) Η επιτυχής χρήση μίας «μηχανικής» μεθόδου της θεωρίας διακλαδώσεων σε αντίστοιχα μη γραμμικά οικονομικά προβλήματα.
- 2) Οι αναλυτικές εκφράσεις οριακών κύκλων, όχι και τόσο διαδεδομένες στην οικονομική δυναμική, είναι ιδιαίτερης σημασίας για την περίπτωση της υποκρίσιμης διακλάδωσης Hopf, καθώς οι προκύπτοντες οριακοί κύκλοι είναι ασταθείς και ο αριθμητικός προσδιορισμός τους καθίσταται δύσκολος. Επιπρόσθετα, οι αποκτώμενες μέσω της χρησιμοποιούμενης μεθόδου αναλυτικές λύσεις, μπορεί με κατάλληλη επεξεργασία να χρησιμοποιηθούν για να ελεγχθεί πιθανή διακλάδωση των ίδιων των κύκλων.

[B15] Ο σκοπός της εργασίας αυτής είναι η εφαρμογή της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία [B14], σε τετραδιάστατα συνεχή μη γραμμικά δυναμικά

συστήματα. Ως πεδίο εφαρμογής χρησιμοποιούνται δύο μη γραμμικά μακροδυναμικά μοντέλα, πάλι από την περιοχή της οικονομικής δυναμικής, για τα οποία κατασκευάζουμε προσεγγιστικές αναλυτικές εκφράσεις των αντίστοιχων επιχειρηματικών (οριακών) κύκλων που προκύπτουν από διακλαδώσεις Hopf των εξισώσεων που τα περιγράφουν. Αναλύονται και προσδιορίζονται και εδώ τα χαρακτηριστικά του προβλήματος που διερευνήθηκαν στην προηγούμενη εργασία (περιοχή ευστάθειας, είδος διακλάδωσης) και γίνεται σύγκριση των αναλυτικών με τους αριθμητικά οριζόμενους κύκλους.

ΚΥΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ

Τα ίδια με την εργασία [B14].

Δ. Διδακτικά Βοηθήματα

[Δ1] Στις λεπτομερείς σημειώσεις του μαθήματος Μηχανικής, σύμφωνα με τις παραδόσεις του μαθήματος στους σπουδαστές του Δ! εξαμήνου του τμήματος Μηχανολόγων-Μηχανικών της ΑΣΕΤΕΜ/ΣΕΛΕΤΕ, έχουν γραφεί τα παρακάτω γενικά κεφάλαια Κινηματικής και Δυναμικής του Υλικού Σημείου και του Στερεού Σώματος:

1. Κινηματική του Υλικού Σημείου.
2. Δυναμική του Υλικού Σημείου.
3. Κινηματική του Στερεού Σώματος.
4. Δυναμική του Στερεού Σώματος.
5. Εξισώσεις Lagrange-Αρχή Hamilton.

[Δ2] Στις λεπτομερείς σημειώσεις του μεταπτυχιακού μαθήματος “Ελαστική Συμπεριφορά των Υλικών” που εντάσσεται στο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του ΕΜΠ, με τίτλο: “Υπολογιστική Μηχανική” (1998-2000), έχουν γραφεί τα παρακάτω γενικά κεφάλαια της Θεωρίας Ελαστικότητας:

ΜΕΡΟΣ Α : ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

1. Εντατική και Παραμορφωσιακή Κατάσταση σε ένα Συνεχές Μέσο.
2. Σχέσεις Τάσεων - Παραμορφώσεων σε ένα Ισόθερμο Γραμμικά Ελαστικό Σώμα.
3. Τρισδιάστατο Πρόβλημα Συνοριακής Τιμής στην Γραμμική Ελαστικότητα.

ΜΕΡΟΣ Β : ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

4. Κλασσική Θεωρία Στρωσιγενών Πλακών.
5. Θεωρία Διατμητικής Παραμόρφωσης Πρώτης Τάξης.