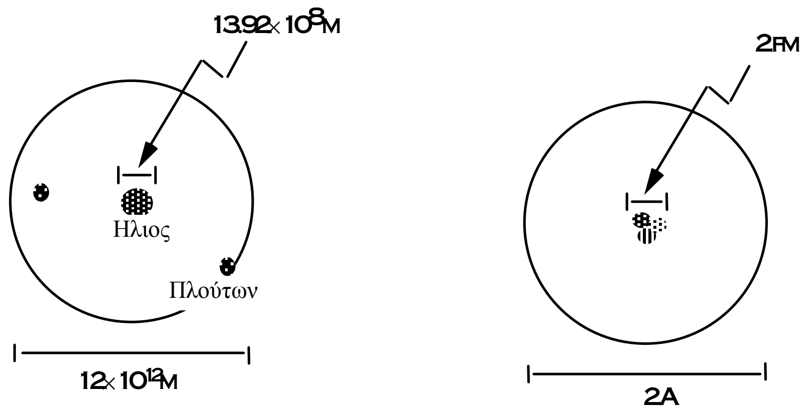
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ
ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ: ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΠΑΝΕΠ. ΦΥΣΙΚΗ, ΤΟΜΟΣ ΙΙ: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ, M. ALONSO-E.J. FINN
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Μ. ΒΕΛΓΑΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ: 2000-2001 (ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ)

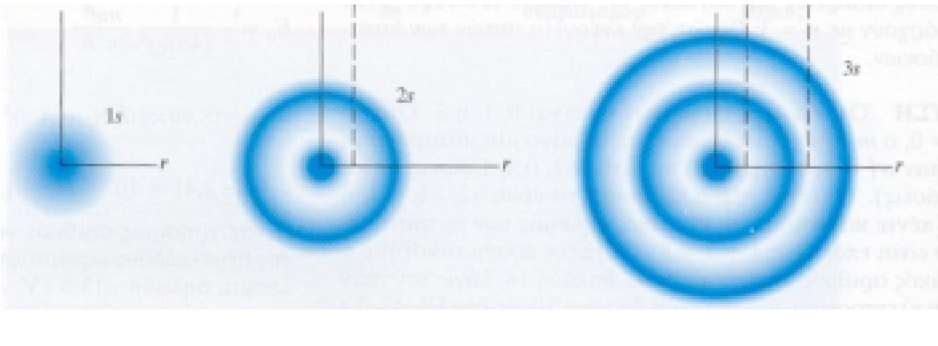
Κεφ. 14 (pages 1-22)

ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ:
ΤΟ ΗΛΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΣΤΙΒΑΔΩΝ ΤΟΥ ΑΤΟΜΟΥ



ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ:
Κατανομή ηλεκτρονίων στο άτομο



(ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ)

Δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρονίου-πρωτονίου

δυνάμεις βαρύτητος: $F_G = 1.04 \times 10^{-47}$ Nt

ηλεκτρικές δυνάμεις: $F_E = 2.3 \times 10^{-8}$ Nt

σχετικός λόγος: $F_E / F_G = 10^{39}$

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ: ***είναι το αίτιον των ηλεκτρικών δυνάμεων (εμπειρική αντίληψη).***

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ:

1. Υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου, τα θετικά και τα αρνητικά. Τα ομώνυμα απωθούνται και τα ετερώνυμα έλκονται.

2. Διατήρηση ηλεκτρικού φορτίου: Το συνολικό φορτίο σε ένα απομωμένο σύστημα διατηρείται σταθερό.

3. <u>Κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου</u> (πείραμα Millikan 1909): το φορτίο απαντάται στη φύση μόνον σε διακριτές ποσότητες, δηλ. ακέραια πολλαπλάσια μιας στοιχειώδους ποσότητος.

<u>ΑΓΩΓΟΙ - ΜΟΝΩΤΕΣ:</u>

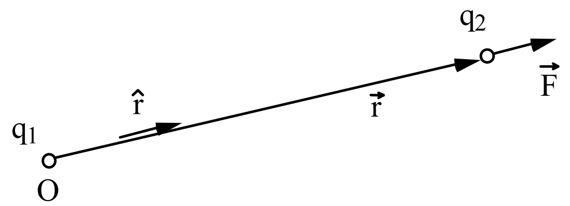
Οι αγωγοί επιτρέπουν την ελεύθερη διακίνηση του ηλεκτρικού φορτίου μέσα στην ύλη, ενώ οι μονωτές δεν το επιτρέπουν.

<u>ΦΟΡΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ:</u>

<u>Μέταλλα</u>: ελεύθερα ηλεκτρόνια
<u>Ηλεκτρολύτες</u>: ελεύθερα ιόντα
<u>Ημιαγωγοί</u>: προσμίξεις σε μονωτικό υπόστρωμα

<u>ΝΟΜΟΣ COULOMB</u> *(πειραματικές παρατηρήσεις 1785):*

Θεωρούμε δύο σημειακά φορτία q_1, q_2 σε απόσταση $\vec{r}$ μεταξύ τους



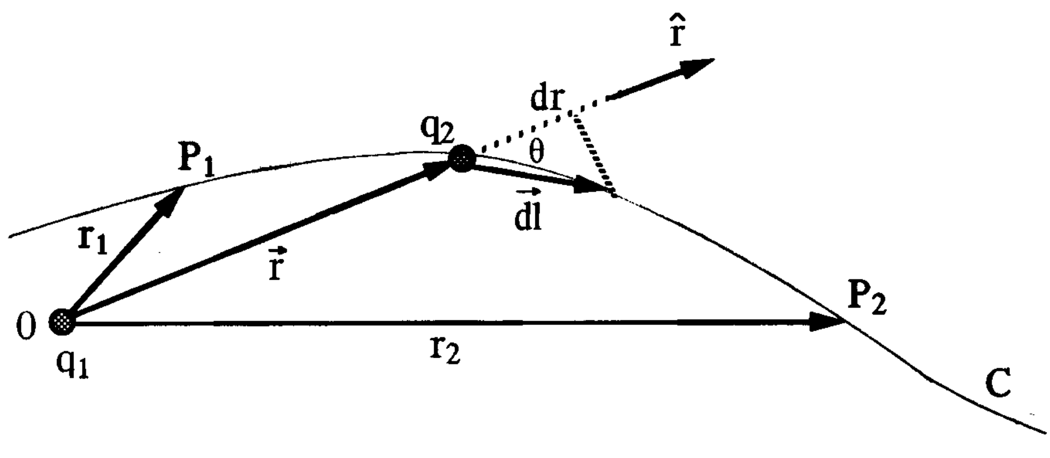
$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \quad \text{όπου} \quad k = 9\times10^9\,\frac{Nt\cdot m^2}{Cb^2}$$

Σε μερικές περιπτώσεις χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ *όπου*

$\varepsilon_o = 8.85\times10^{-12}\,\dfrac{Cb^2}{Nt\cdot m^2}$ *η διηλεκτρική σταθερά του κενού*

(ΔΥΝΑΜΙΚΗ) ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Θεωρούμε δύο σημειακά φορτία q_1, q_2 *σε* r *μεταξύ τους.*



Η μεταβολή της (ηλεκτροστατικής) δυναμικής ενέργειας του φορτίου q_2 όταν τούτο μετακινείται από το σημείο P_1 στο σημείο P_2 (θεωρούμε ότι το q_1 είναι στεθερό), ορίζεται ως εξής:

$$\Delta U \equiv U(P_2) - U(P_1) = -W_{P_1 \to P_2} \qquad (1)$$

όπου το έργο W ορίζεται ως

$$W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Η δύναμη $\vec{F} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$ ***είναι συντηρητική.***

Παρατηρούμε ότι: $\vec{F} \cdot d\vec{l} = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{l}$ ***και***

$\hat{r} \cdot d\vec{l} = 1 \cdot dl\cos\theta = dr$***, άρα το έργο ισούται,***

$$W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} k\frac{q_1 q_2}{r^2} dr = kq_1 q_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

το ολοκλήρωμα:

$$\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \left(-\frac{1}{r} \right)_{r=r_1}^{r=r_2} = -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}$$

Οπότε η δυναμική ενέργεια (1) γράφεται

$$U(r_2) - U(r_1) = -kq_1q_2(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1})$$

Εστω ότι δίδονται οι εξής συνοριακές συνθήκες: στο σημείο r_2=∞ είναι U(∞)=0, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\boxed{U(r) = k\frac{q_1q_2}{r}}$$

όπου έχομε παραλείψει το δείκτη 1.
Κατ' επέκταση, η δυναμική ενέργεια (ή ενέργεια αλληλεπίδρασης) συστήματος Ν σημειακών φορτίων είναι:

$$U(r) = \sum_{i,j=1}^{N} k\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

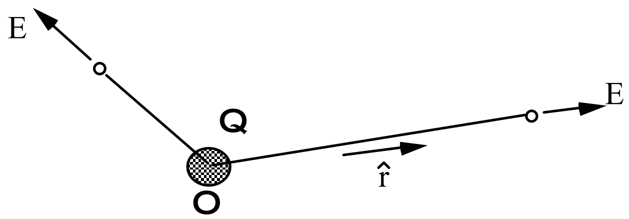
όπου r_{ij} είναι η απόσταση των σημειακών φορτίων q_i και q_j

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ***είναι ο χώρος μέσα στον οποίο φερόμενο ένα ηλεκτρικό φορτίο (το υπόθεμα q) υφίσταται ηλεκτρική δύναμη.***

Ενταση ηλεκτρικού πεδίου: $\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q}$

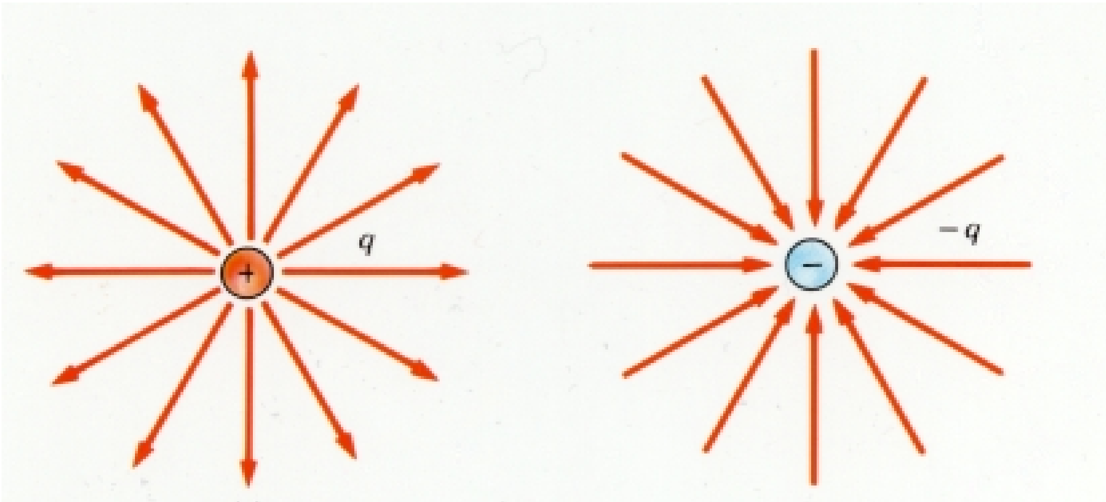
(μονάδες: Nt/Cb ή Volt/m)

Παράδειγμα σημειακού φορτίου Q:

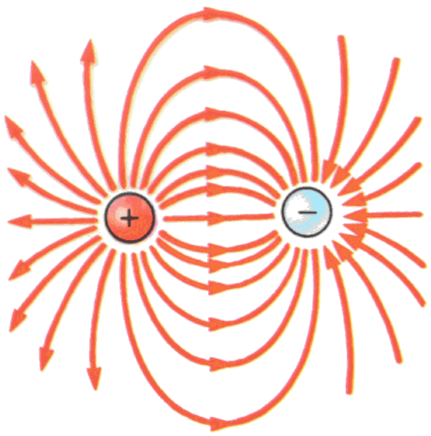


$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

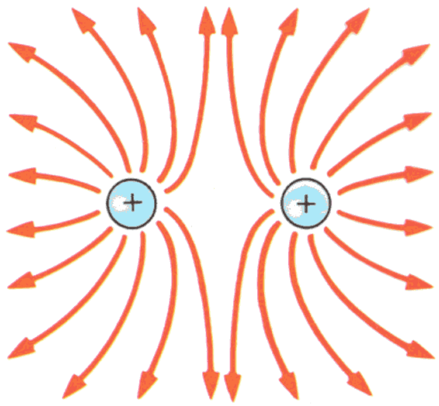
Η μορφή του πεδίου γύρω από το φορτίο



Δυναμικές γραμμές πεδίου: ***κάθε γραμμή σε κάθε σημείο της οποίας το διάνυσμα της εντάσεως $\vec{E}$ είναι εφαπτόμενο.***



(a)



(a)

Ιδιότητες των δυναμικών γραμμών:

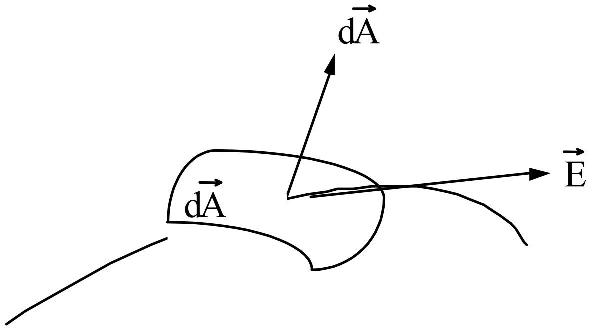
1. Οι γραμμές εκκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία (ή στο άπειρο στην περίπτωση πλεονάζοντος φορτίου).

2.Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ μεταξύ τους.

3.Είναι πάντοτε κάθετες προς την επιφάνεια ενός αγωγού.

Ηλεκτρική ροή

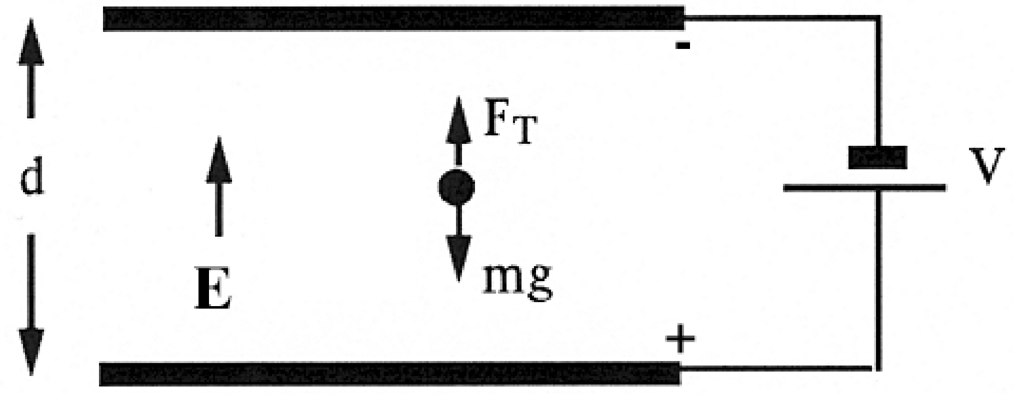
Η ποσότης $d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot dA\cos\theta$ ορίζεται ως στοιχειώδης ηλεκτρική ροή που διαπερνά τη στοιχειώδη επιφάνεια $d\vec{A}$ (μονάδες: Nt-m^2/Cb ή Volt-m)



Η συνολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια επιφάνεια A ορίζεται ως $\Phi_E = \int_A \vec{E}\cdot d\vec{A}$, όπου το διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στην επιφάνεια A. To $\vec{E}$ είναι η τιμή του πεδίου στη στοιχειώδη περιοχή $d\vec{A}$.

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ MILLIKAN

Είδαμε ότι *το ηλεκτρικό φορτίο απαντάται στη φύση μόνον σε διακριτές ποσότητες, δηλ. ακέραια πολλαπλάσια μιας στοιχειώδους ποσότητος.*



όπου F_T=6πrηυ η αντίσταση τριβής από τον αέρα (νόμος Stokes). Η εξίσωση κίνησης της σταγόνας στον κατακόρυφο άξονα (κατακόρυφη πτώση):

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - 6\pi r\eta\upsilon \qquad (1)$$

Η σταγόνα αποκτά οριακή ταχύτητα όταν το δεύτερο μέρος ισούται με μηδέν. Επεται,

$$\upsilon_o = \frac{mg}{6\pi r\eta} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3 g}{6\pi r\eta} = \frac{2\rho r^2 g}{9\eta} \qquad (2)$$

(δεν ελάβαμε υπόψιν την άνωση του αέρα, διαφορετικά έπρεπε να αντικαταστήσουμε τη πυκνότητα ρ με ρ-ρ_α). Μετρώντας την ταχύτητα υ_o, μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτίνα r.

Αν υποθέσουμε ότι η σταγόνα φέρει αρνητικό φορτίο q, εξίσωση κίνησης τώρα γράφεται (κίνηση προς τα κάτω),

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = qE + mg - 6\pi r\eta\upsilon \qquad (3)$$

οπότε η νέα οριακή ταχύτητα γράφεται

$$\upsilon_1 = \frac{qE + mg}{6\pi r\eta} \qquad (4)$$

Μετρώντας την ταχύτητα υ_1 μπορούμε να υπολογίσουμε το φορτίο q. Παρατηρούμε ότι σε οποιεσδήποτε μετρήσεις τα φορτία q βρίσκονται μεταξύ τους σε σχέση απλών ακεραίων αριθμών, που συνεπάγεται ότι το φορτίο των σταγονιδίων είναι ακέραιο πολλαπλάσιο μιας θεμελιώδους ποσότητας e.

Ηλεκτρόλυση

Εστω διάλυμα ηλεκτρολύτου, π.χ. $NaCl \rightarrow Na^{+} + Cl^{-}$ μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο.
Αν μέσα σε χρόνο t φθάνουν N ιόντα στα ηλεκτρόδια, το συνολικό φορτίο που πηγαίνει (ή αποσπάται) από κάθε ηλεκτρόδιο είναι Q=Nνe (ν το σθένος του ιόντος) και η συνολική μάζα που εναποτίθεται στο (ή αφαιρείται από) κάθε ηλεκτρόδιο είναι M=Nm (m είναι ν μάζα του ιόντος). Οπότε προκύπτει

$$\frac{Q}{M} = \frac{\nu e}{m}$$

Αν N_A είναι ο αριθμός Avogadro, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\frac{Q}{M} = \frac{\nu e}{m} = \frac{N_A \nu e}{N_A m} = \frac{\nu F}{MB}$$

όπου MB είναι το (γραμμο)μοριακό βάρος του ιόντος και $F=6.0225\times10^{4}$Cb είναι η σταθερά του Faraday.

ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΦΟΡΤΙΟΥ:

Γραμμική πυκνότης φορτίου: $\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{dQ}{dL}$

(L: μήκος γραμμής)

Επιφαν. πυκνότης φορτίου: $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dQ}{dA}$

(A: εμβαδόν επιφαν.)

πυκνότης φορτίου όγκου: $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{dQ}{dV}$

(V: όγκος σώματος)

ΕΝΤΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ:

$$\vec{E} = \int_{\Sigma} k \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$

(ΔΥΝΑΜΙΚΗ) ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΦΟΡΤΙΩΝ:

είναι το ολικό έργο που δαπανάται για να συγκεντρωθούν τα φορτία στο σύστημα και δίδεται συναρτήσει του πεδίου,

$$U = \int_{\Omega} \tfrac{1}{2}\varepsilon_o E^2 d\Omega$$

όπου το ολοκλήρωμα ολοκληρώνεται στον όγκο του πεδίου Ω. Η ποσότης $\boxed{\tfrac{1}{2}\varepsilon_o E^2}$ *καλείται πυκνότης ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου.*

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ: η δυναμική ενέργεια δια του φορτίου υποθέματος,

$$V = \frac{U}{q}$$

(μονάδες: Volts)

Εχομε ορίσει τη δυναμική ενέργεια

$$U(P_2) - U(P_1) = -q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Στη 1-διάσταση, η σχέση αυτή γράφεται

$$U(x_2) - U(x_1) = -q \int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx$$

η οποία ακόμη γράφεται,

$$\lim_{(x_2 - x_1) \to 0} \frac{U(x_2) - U(x_1)}{(x_2 - x_1)} = -q \lim_{(x_2 - x_1) \to 0} \frac{1}{(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx$$

Το δεύτερο μέρος ισούται με την ένταση του πεδίου Ε, ενώ το πρώτο είναι η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας, συνεπώς προκύπτει

$$-\frac{dU(x)}{dx} = qE(x) \qquad (1)$$

Εισάγοντας το δυναμικό V προκύπτει

$$-\frac{dV(x)}{dx} = E(x) \qquad (2)$$

Στις 3-διαστάσεις, οι σχέσεις (1) και (2) παίρνουν τη μορφή,

$$-\vec{\nabla} U(x, y, z) = q\overline{E}(x, y, z)$$
$$-\vec{\nabla} V(x, y, z) = \vec{E}(x, y, z) \qquad (3)$$

Παράδειγμα: Δυναμικό στο σημείο Σ που απέχει απόσταση r από σημειακό φορτίο Q.
Οι εξισώσεις (2) ή (3) γράφονται για την συντεταγμένη r,

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = E \qquad (4)$$

όπου οι συναρτήσεις V ή E είναι συναρτήσεις των σφαιρικών συντεταμένων (r,θ,φ) γενικώς.

Στη περίπτωση του σημειακού φορτίου έχομε βρεί ότι $E = k\frac{Q}{r^2} = E(r)$, δηλ. η ένταση E (όπως και το δυναμικό V) εξαρτάται μόνο από το r, οπότε η (4) ολοκληρώνεται,

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E dr$$

όπου $V_2=V(r_2)$ και $V_1=V(r_1)$.
Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα,

$$V_2 - V_1 = -kQ\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{kQ}{r_2} - \frac{kQ}{r_1}$$

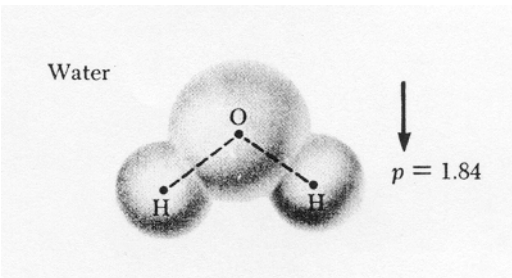
Αν πάρουμε σαν συνοριακές συνθήκες: $r_2=\infty$, $V(r_2)=0$, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$V(r) = \frac{kQ}{r}$$

(όπου παραλείψαμε τον δείκτη-1)

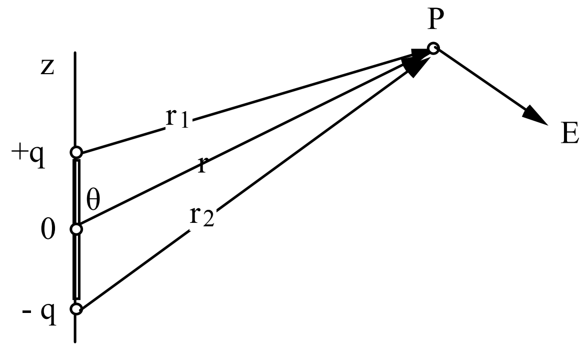
Το ηλεκτρικό δίπολο

Θεωρούμε δύο αντίθετα φορτία +q, -q που βρίσκονται σε απόσταση α μεταξύ τους. Ορίζεται σαν διπολική ροπή του διπόλου η ποσότης p=αq.



Η διπολική ροπή του μορίου H_2O είναι: $p=1.84$Debyes $= 6.1\times10^{-30}$ Cb-m.

Υπολογίζουμε το δυναμικό και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P που απέχει απόσταση r από το κέντρο του διπόλου (που λαμβάνεται ως αρχή των αξόνων, 0)



Δυναμικό στο σημείο P:

$$V = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

Για α<<r, ισχύει: $r_2 - r_1 \approx a\cos\theta$ και $r_2 r_1 \approx r^2$, οπότε η σχέση γράφεται,

$$\boxed{V(r,\theta) = k\,\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

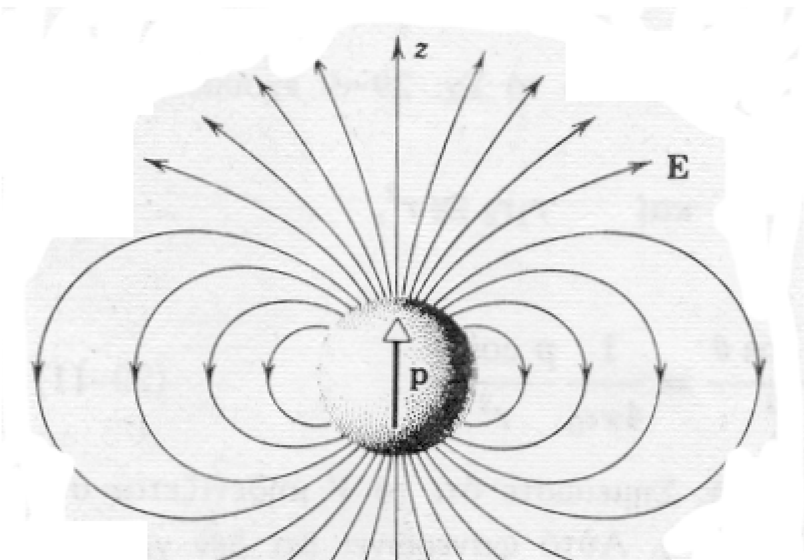
Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζεται

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta})kp\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$= kp(\hat{r}\frac{2\cos\theta}{r^3} + \hat{\theta}\frac{\sin\theta}{r^3})$$

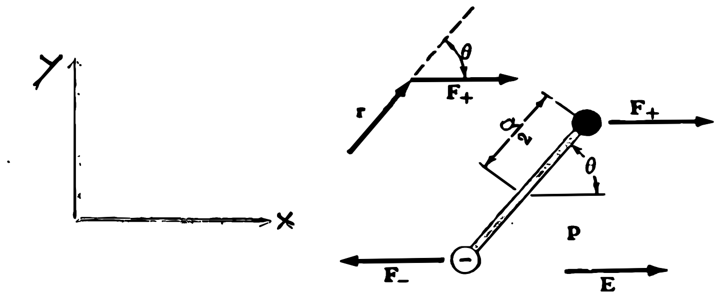
άρα

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kp}{r^3}(\hat{r}2\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta)}$$



Δυναμική ενέργεια ηλεκτρικού διπόλου μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο.

Το ζεύγος των δυνάμεων πάνω στο δίπολο



Η ροπή του ζεύγους:

$$\vec{\tau} = \vec{\alpha} \times \vec{F}_+ = \vec{\alpha} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

(περίπτωση του σχήματος: $\vec{\tau} = -pE\sin\theta\,\hat{z}$*)*
Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του διπόλου όταν περιστραφεί από γωνία $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ *(ως προς το εξωτερ. πεδίο E) είναι*

$$U(\theta_2) - U(\theta_1) = -W(\theta_1 \rightarrow \theta_2) = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta$$

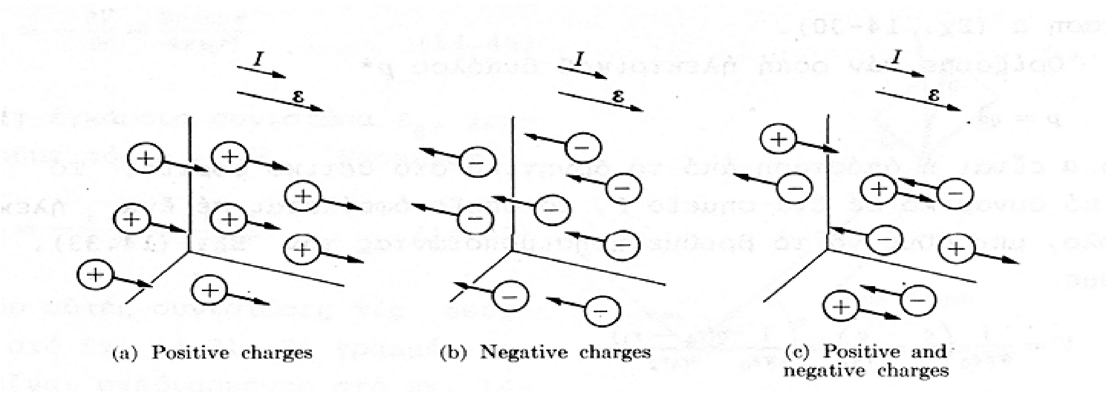
$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} pE\sin\theta\, d\theta = -pE(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

Αν πάρουμε ως $\theta_1=90^o$ και $U(\theta_1)=0$ (και παραλείποντας τον δείκτη 2), η δυναμική ενέργεια του διπόλου μέσα σε εξωτερικό πεδίο Ε (υπό γωνία θ ως προς το πεδίο) παίρνει τη μορφή,

$$\boxed{U(\theta) = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

δηλ. η δυναμική ενέργεια του διπόλου γίνεται ελαχίστη όταν θ=0, συνεπώς τα δίπολα τείνουν να προσανατολίζονται κατά τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.

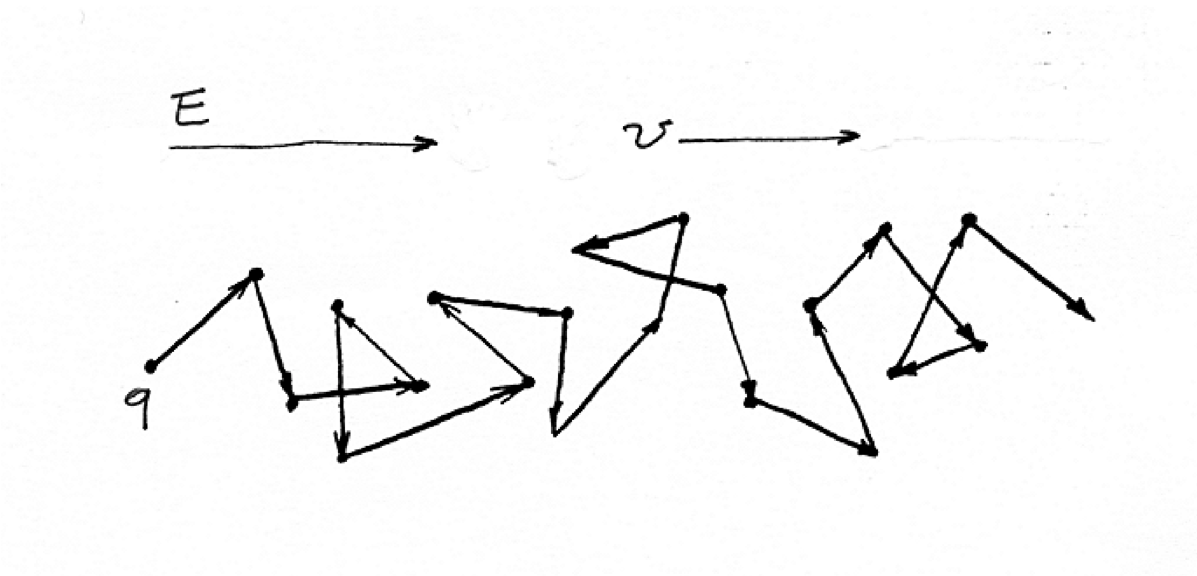
Ηλεκτρικό ρεύμα*: *είναι η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων



Ενταση ηλεκτρικού ρεύματος ορίζεται το ηλεκτρικό φορτίο, που διαπερνά μια *διατομή κάθετη προς τη διεύθυνση ροής των φορέων, ανά μονάδα χρόνου*

$$I=Nq/t=Q/t \quad ή \quad I=dQ/dt$$

όπου q είναι το φορτίο ενός φορέα και Q=Nq (μονάδες ρεύματος: Ampere).



Πυκνότης ρεύματος: το ρεύμα που διαπερνά κάθετα την μονάδα διατομής

$$J=I/A \quad ή \quad J=dI/dA$$

όπου A το εμβαδόν της κάθετης διατομής. Αποδεικνύεται εύκολα ότι: ***J=qnυ*** *(όπου* ***υ*** *είναι η ταχύτης μετατόπισης και* ***n*** *η συγκέντρωση των φορέων).*