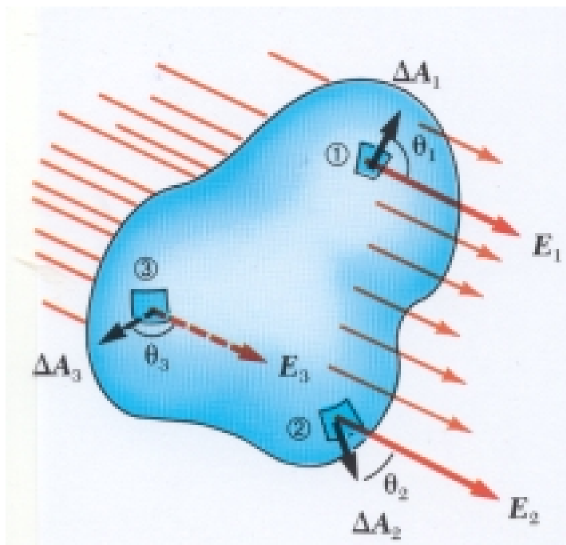
ΣΤΑΤΙΚΑ ΗΜΜ ΠΕΔΙΑ

- *Νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο*



Η ηλεκτρική ροή που διέρχεται δια μέσου μιας (τυχούσας) επιφάνειας Α είναι

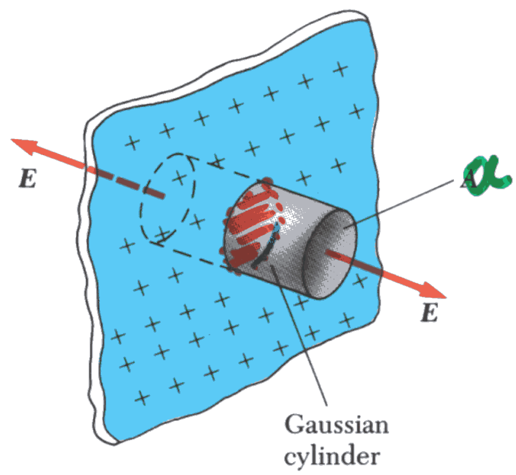
$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στην επιφάνεια Α, ενώ Ε είναι η τιμή του ηλ. πεδίου στη στοιχειώδη επιφάνεια dA (παραπάνω σχήμα).

Ο νόμος του Gauss λέει ότι η συνολική ηλ. ροή που διέρχεται δια μέσου μιάς κλειστής επιφάνειας Α ισούται με $q_{ολ}/\varepsilon_o$, όπου $q_{ολ}$ είναι το ολικό φορτίο που περικλείεται μέσα στην επιφάνεια Α, δηλ.

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{ολ}}{\varepsilon_o}$$

- *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο*



Εστω σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του επιπέδου. Λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κάθετες προς το επίπεδο (γιατί;).

Θεωρούμε σαν κλειστή επιφάνεια A, την επιφάνεια του κυλίνδρου του σχήματος. Τότε η ηλεκτρική ροή δια μέσου της A ισούται

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2E\alpha$$

ενώ το συνολικό φορτίο που περικλείεται μέσα στην A είναι: $q_{o\lambda}=\alpha\sigma$. *Συνεπώς, ο νόμος του* Gauss *δίδει* $2E\alpha=\alpha\sigma/\varepsilon_o$ *ή*

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

δηλ. το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές και δεν εξαρτάται από την απόσταση x του σημείου P από το επίπεδο.

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση x από το επίπεδο υπολογίζεται από τη σχέση E=-dV/dx, συνεπώς

$$(x) - V(0) = -\int_0^x E dx = -E \cdot x$$

όπου V(0) είναι η τιμή του δυναμικού πάνω στο επίπεδο. Αν υποθέσουμε V(0)=0, τότε το δυναμικό σε απόσταση x από το επίπεδο θα έχει τη μορφή

$$V(x) = -Ex = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x$$

- *Νόμος του Gauss σε διαφορική μορφή*

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_o} \qquad (1)$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης ή θεώρημα του Green στο κλειστό ολοκλήρωμα.

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, d\Omega \qquad (2)$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στον όγκο Ω που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια Α και dΩ είναι ο στοιχειώδης όγκος.

Αν ρ είναι η πυκνότητα φορτίου στο χώρο, τότε το συνολικό φορτίο που περικλείεται μέσα στο χώρο Ω είναι

$$q_{o\lambda} = \int_\Omega \rho d\Omega \qquad (3)$$

οπότε αντικαθιστώντας τις (2)-(3) στην (1), λαμβάνουμε,

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, d\Omega = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\Omega} \rho dV$$

που γράφεται

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_o}) d\Omega = 0$$

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε Ω, έπεται ότι η ολοκληρώσιμη συνάρτηση πρέπει να ισούται με μηδέν, δηλ.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

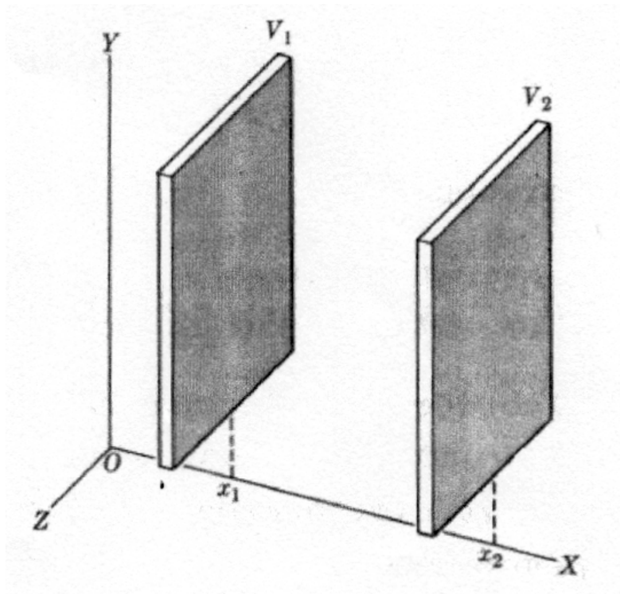
Η σχέση αυτή εκφράζει τον νόμο του Gauss σε διαφορική μορφή.

Επειδή $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, *η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί και σαν εξίσωση του V,*

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

η οποία καλείται εξίσωση του Poisson.
Αν ρ=0, τότε η προηγούμενη σχέση λέγεται εξίσωση Laplace. (Εχουμε χρησιμοποιήσει την ταυτότητα: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$. *Ο τελεστής* ∇^2 *λέγεται Λαπλασιανή).*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: *Δύο παράλληλες φορτισμένες πλάκες (σε απόσταση d) σε δυναμικά V_1 και V_2, αντίστοιχα. Βρείτε το δυναμικό παντού.*



Λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου, το πεδίο και το δυναμικό θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από το x, οπότε στο χώρο μεταξύ των πλακών η εξίσωση Laplace $\vec{\nabla}^2 V = 0$ γράφεται,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι προφανής. Μιά πρώτη ολοκλήρωση δίδει,

$$dV/dx=c$$

όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Καλούμε τη σταθερά αυτή (–E), δηλ. dV/dx=-E, η οποία ολοκληρούμενη από x_1 x δίδει,

$$(x)-V(x_1)=-E\cdot(x-x_1)$$

Προφανώς αν θέσουμε $x=x_2$, προκύπτει η γνωστή μας σχέση

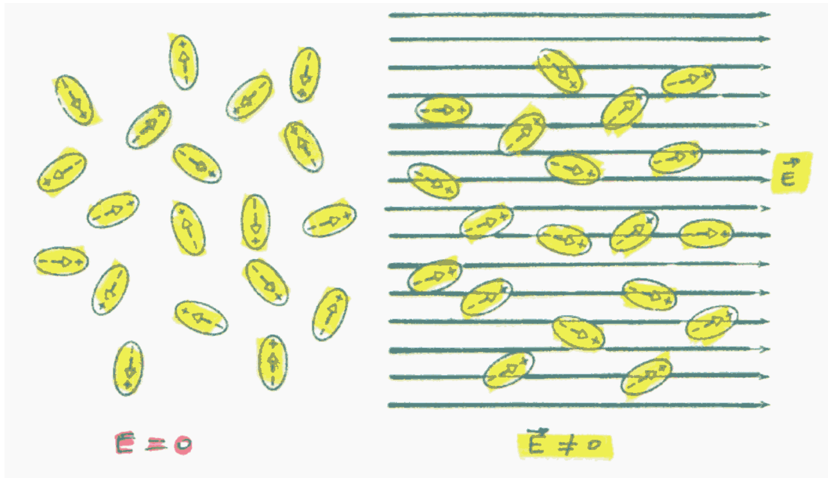
$$E=-\frac{V(x_2)-V(x_1)}{x_2-x_1}=-\frac{V_2-V_1}{d}$$

• *ΠΟΛΩΣΗ ΤΟΥ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ*

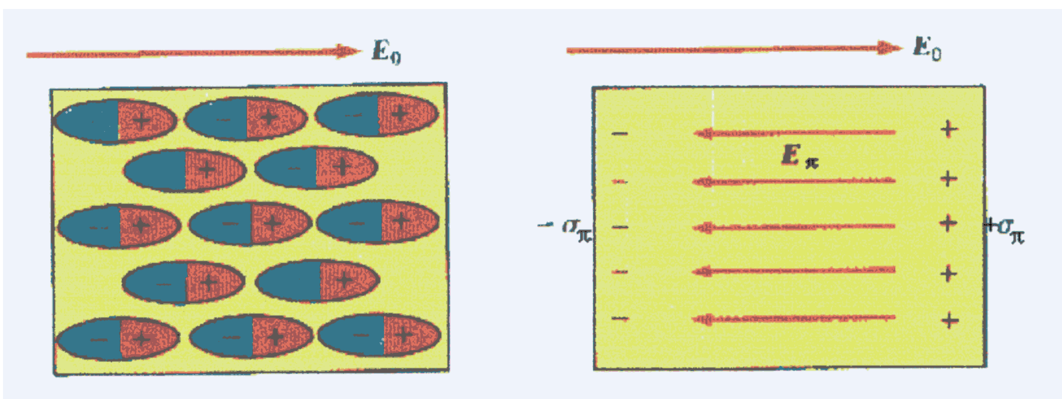
είναι ο (συλλογικός) προσανατολισμός των διπολικών μορίων ενός διηλεκτρικού υλικού κατά την διεύθυνση του εφαρμοζόμενου (εξωτερικού) ηλεκτρικού πεδίου E_o.

Πόλωση $\vec{P}$ *(το μέγεθος) καλείται η διπολική ροπή του μέσου ανά μονάδα όγκου.*

• *Υλικό με μόνιμες διπολικές ροπές*



• *Διηλεκτρική πλάκα μέσα σε ηλ. πεδίο*



Η συνολική διπολική ροπή μέσα στη πλάκα είναι

$$P(Al) = (\sigma_\pi l)A$$

όπου l *είναι το πάχος της πλάκας και* σ_π *η επιφανειακή πυκνότητα των φορτίων* *πόλωσης. Προκύπτει επομένως* $P = \sigma_\pi$ *(γενικά ισχύει:* $\sigma_\pi = \hat{n} \cdot \vec{P}$*)*

- *Πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό που οφείλεται στα φορτία πόλωσης (προσοχή στη φορά)*

$$E_\pi = \sigma_\pi / \varepsilon_o = P / \varepsilon_o$$

Συνεπώς, το συνολικό πεδίο μέσα σε διηλεκτρικό είναι

$$E = E_o - E_\pi = E_o - P / \varepsilon_o$$

Αν υποθέσω ότι $E=E_o/\kappa$ *(η σταθερά κ καλείται διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού υλικού, όμως στο βιβλίο ορίζεται* $\varepsilon=\kappa\varepsilon_o$*. Για τον αέρα ή το κενό* $\kappa=1$*), τότε προκύπτει*

$$P = \varepsilon_o(E_o - E) = \varepsilon_o(\kappa - 1)E$$

Η ποσότης $\chi=\kappa-1$ *καλείται ηλεκτρική επιδεκτικότης*