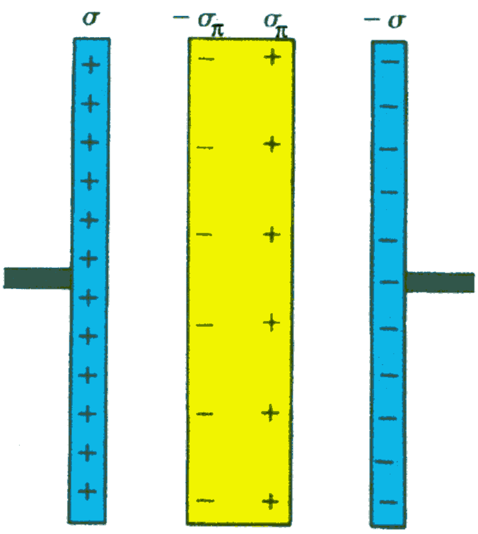
ΣΤΑΤΙΚΑ ΗΜΜ ΠΕΔΙΑ

- *Νόμος του Gauss μέσα σε διηλεκτρικό υλικό*

$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{o\lambda}/\varepsilon_o$$

όπου $q_{o\lambda}=q_{free}-q_{\pi}$ *και* $q_{\pi}=\int_A \vec{P}\cdot d\vec{A}$ *είναι το φορτίο πόλωσης (επαγόμενα φορτία).*



Συνεπώς η προηγούμενη σχέση γράφεται,

$$\oint_A (\vec{E}+\vec{P}/\varepsilon_o)\cdot d\vec{A} = q_{free}/\varepsilon_o$$

Αν καλέσουμε $\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P}$ *(D καλείται ηλεκτρική μετατόπιση), τότε ο νόμος του Gauss μέσα σε διηλεκτρικά υλικά γράφεται,*

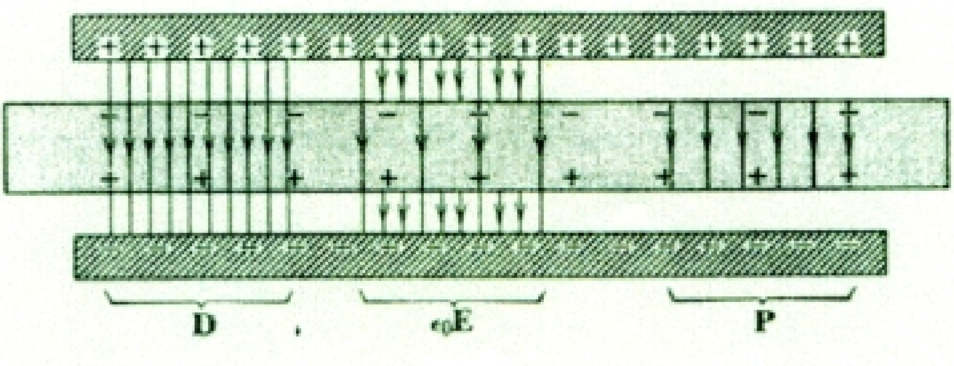
$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A}=q_{free}$$

δηλ. η ροή του D δια μέσου μιας κλειστής επιφανείας A ισούται με το πραγματικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια.

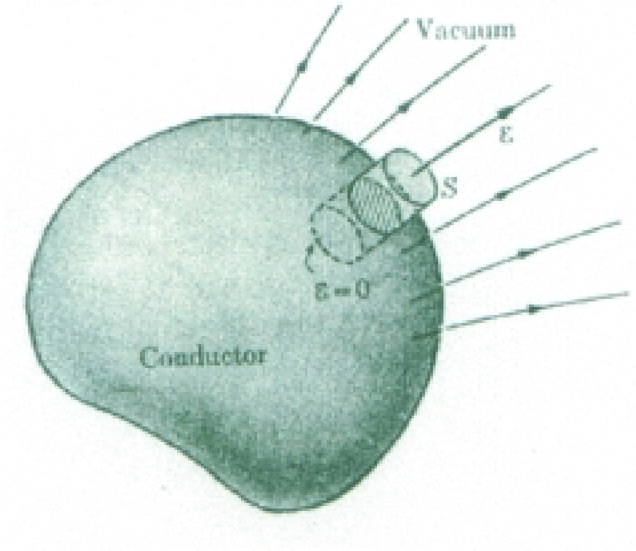
Από τον ορισμό της ηλεκτρικής μετατόπισης προκύπτει (αν ισχύει $E=E_o/\kappa$*)*

$$D=\varepsilon_o E+P=\varepsilon_o E+\varepsilon_o(\kappa-1)E=\varepsilon_o\kappa E$$

Τα τρία διανύσματα D,E,P στο κενό και μέσα σε διηλεκτρική πλάκα που παρεμβάλλεται μεταξύ των οπλισμών πυκνωτού.

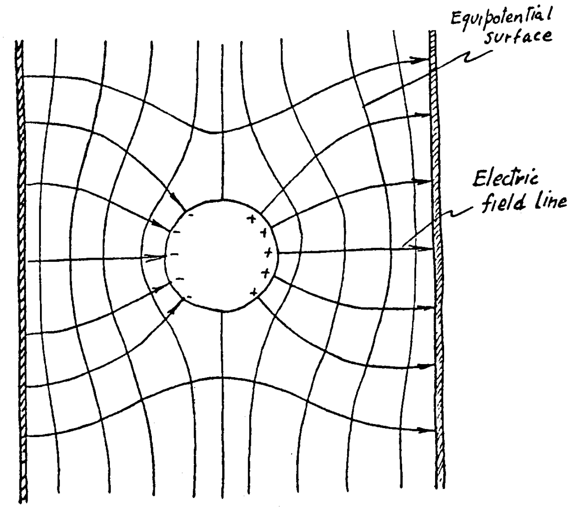


- *Ηλεκτρικό πεδίο μέσα + έξω από αγωγούς*



Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss πάνω στη κλειστή επιφάνεια S του σχήματος, βρίκουμε $E_{out}=\sigma/\varepsilon_o$, ενώ παντού μέσα στον αγωγό ισχύει: $E=0$.

- *Μεταλλική σφαίρα μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο*



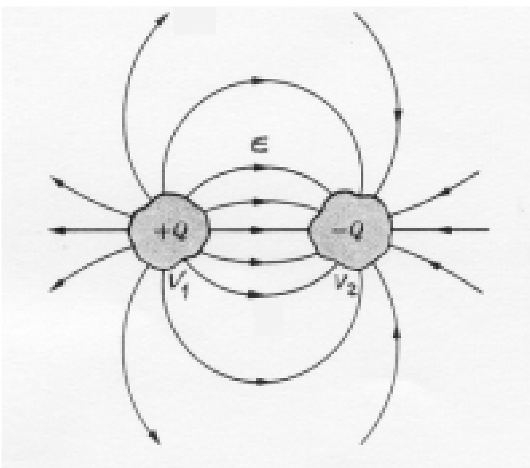
• *ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΣ ΑΓΩΓΟΥ*

ορίζεται η σταθερή ποσότης Q/V, όπου Q είναι το φορτίο του αγωγού και V το δυναμικό του (πάνω στην επιφάνειά του και στο εσωτερικό του). Η ποσότης αυτή συμβολίζεται με C (μονάδες Farads)

- *ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΓΩΓΩΝ*

Ονομάζομε πυκνωτή ένα σύστημα δύο αγωγών οι οποίοι έχουν φορτιστεί με φορτία +Q και -Q, αντίστοιχα (οι αγωγοί καλούνται οπλισμοί του πυκνωτού).

Ορίζουμε ως χωρητικότητα πυκνωτού την ποσότητα C≡Q/V, όπου Q είναι το φορτίο του ενός αγωγού (απολύτως) και $V=|V_1-V_2|$ η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών.



Στο παράδειγμα των δύο φορτισμένων παραλλήλων επιπέδων πλακών έχομε βρει ότι το πεδίο μεταξύ των πλακών είναι ομογενές με ένταση $E=|V_2-V_1|/d$ (ενώ εκτός των πλακών $E=0$). Αν σ είναι η επιφανειική πυκνότης φορτίου πάνω στις πλάκες, έχομε βρεί ότι $E=\sigma/\varepsilon_o$. Συνεπώς

$$|V_2-V_1|=Ed=d\sigma/\varepsilon_o=d(\sigma A)/(\varepsilon_o A)$$

όμως $\sigma A=Q$, άρα

$$C \equiv \frac{Q}{|V_2 - V_1|} = \varepsilon_o \frac{A}{d}$$

Αν μεταξύ των δύο οπλισμών παρεμβάλλεται διηλεκτρικό υλικό, η σχέση τροποποιείται

$$C = \kappa\varepsilon_o \frac{A}{d}$$

κ είναι η διηλεκτρική σταθερά του διηλ. υλικού (γενικά, $C=\kappa C_o$).

- *(ΔΥΝΑΜΙΚΗ) ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ*

Εστω q το φορτίο του αγωγού στον οποίο προσθέτομε φορτίο dq, άρα δαπανούμε έργο *dW=Vdq, όπου* $V=V_{αγωγού}-V_\infty$ *(ενώ* $V_\infty=0$*), δηλ. V=q/C. Συνεπώς για να φορτιστεί ο αγωγός θα δαπανήσουμε έργο*

$$W=\int dW=\int_0^Q Vdq=\int_0^Q \frac{q}{C}dq=\frac{Q^2}{2C}$$

(το έργο αυτό είναι δαπανώμενο, δηλ. $W=-Q^2/2C$*). Η ηλεκτρική ενέργεια U που αποθηκεύεται μέσα στον αγωγό ισούται*

$$U_{τελ}-U_{αρχ}=-W_{αρχ\rightarrow τελ}$$

Υποθέτοντας $U_{αρχ}=0$ *και παραλείποντας τον δείκτη, προκύπτει*

$$U=\frac{1}{2C}Q^2$$

(πράγματι U>0, εφόσον αυξάνεται η ενέργεια του αγωγού). Ισοδύναμα η σχέση αυτή γράφεται

$$U=\frac{1}{2C}Q^2=\frac{1}{2}CQ^2=\frac{1}{2}QV$$

Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί κατά τον ίδιο τρόπο και για τη περίπτωση της φόρτιση πυκνωτού, οπότε καταλήγουμε στην ίδια σχέση για την *ενέργεια που αποθηκεύεται μέσα στο πυκνωτή,*

$$U = \frac{1}{2C} Q^2$$

με τη διαφορά ότι τώρα Q είναι το (απόλυτο) φορτίο ενός οπλισμού.

Στη περίπτωση του πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς, η σχέση αυτή γράφεται,

$$U = \tfrac{1}{2} C V^2 = \tfrac{1}{2} (\varepsilon_o \frac{A}{d})(Ed)^2 = (\tfrac{1}{2} \varepsilon_o E^2)(Ad)$$

Η ποσότης (Ad) παριστά τον όγκο του πεδίου, οπότε η ποσόστης ($\varepsilon_o E^2/2$) παριστά την πυκνότητα ενέργειας του ηλεκ. πεδίου.

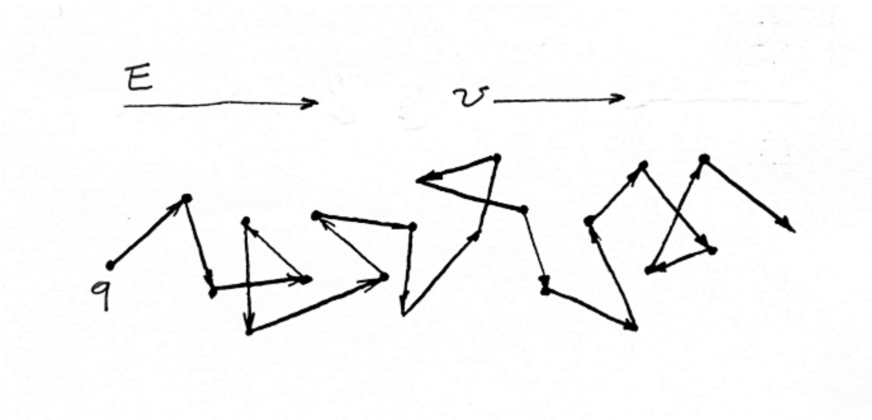
Συνεπώς, η ενέργεια αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί σε πιο γενική μορφή

$$U = \int_{\text{όγκος}} (\tfrac{1}{2} \varepsilon_o E^2) d\Omega$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε όλο τον χώρο Ω (πρακτικά εκεί όπου εκτείνεται το ηλεκτρικό πεδίο).

• *ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ*

<u>Μεταλλικοί αγωγοί</u>: τα ελεύθερα φορτία είναι τα ηλεκτρόνια σθένους του μετάλλου



Πυκνότης ρεύματος

$$J=I/A$$

όπου Α το εμβαδόν της κάθετης διατομής. Στη περίπτωση ενός είδους ελευθέρων φορτίων

$$J=qnυ$$

*όπου **υ** είναι η ταχύτης μετατόπισης και **n** η συγκέντρωση των φορτίων.*

Αν υποθέσομε ότι η μέση δύναμη f που ασκείται πάνω σ'ένα ελεύθερο φορτίο από το εξωτερικό πεδίο Ε είναι

$$f=qE$$

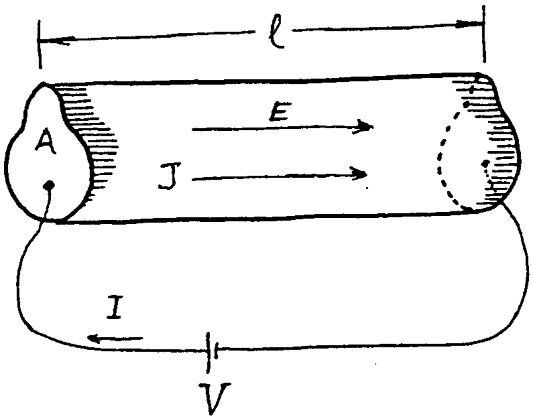
τότε η μέση ταχύτης μετατόπισης θα είναι ανάλογη της f (γιατί;), δηλ.

$$\upsilon=\mu f=\mu qE$$

Η σταθερά αναλογίας μ καλείται συντελεστής ευκινησίας, οπότε η πυκνότης ρεύματος γράφεται

$$J=q^2 n\mu E=\sigma E \qquad (1)$$

Η σχέση (1) καλείται νόμος του Ohm. Η σταθερά $\boldsymbol{\sigma=\mu n q^2}$ *καλείται ηλεκτρική αγωγιμότης και η ποσότης* $\boldsymbol{\rho=1/\sigma}$ *ειδική αντίσταση*



Αν V είναι η εφαρμοζόμενη τάση στα άκρα του αγωγού, τότε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι E=V/l, οπότε η (1) γράφεται

$$J=\sigma E=\sigma V/l$$

Αν I είναι η ένταση του ρεύματος που διαπερνά κάθετα την διατομής του αγωγού εμβαδού A, τότε I=JA, άρα

$$I = \frac{\sigma A}{l} V = \frac{V}{R}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή σαν νόμος του Ohm. Η σταθερά R καλείται αντίσταση του αγωγού (μονάδες 1Ohm). Οι αγωγοί που υπακούουν στον νόμο του Ohm καλούνται ωμικοί αγωγοί ή αντιστάσεις. Συμβολική παράσταση αντίστασης:

Για ραβδόμορφο αγωγό ισχύει $R = \frac{l}{\sigma A} = \rho \frac{l}{A}$

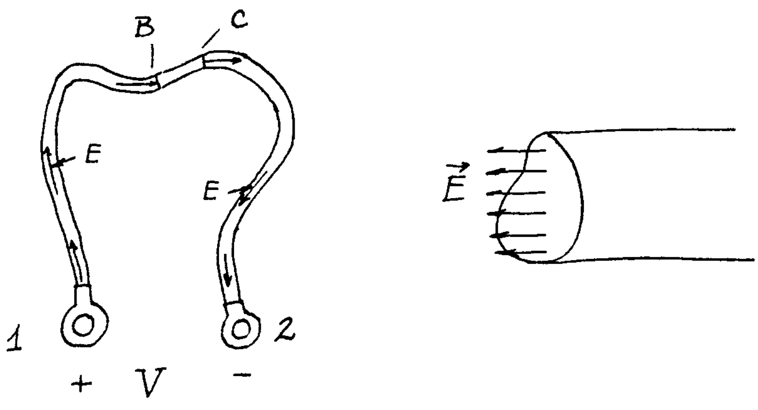
Ηλεκτρεγερτική δύναμη: $\mathcal{E}_c = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$

ισούται με το έργο που καταναλίσκεται κατά την μετακίνηση του φορτίου q=1 κατά *μήκος ενός κλειστού δρόμου C μέσα στο πεδίο.*

Τάση (ή διαφορά δυναμικού) μεταξύ των σημείων A και B

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

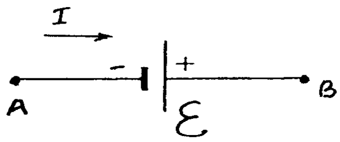
Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον αγωγό είναι παντού το ίδιο κατά μέτρον (αν όμως I=0 τότε E=0!)



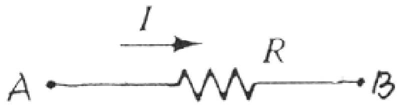
Αν $I_B \neq I_C$, τότε θα είχαμε συσσώρευση φορτίο στο σημείο B ή C, που είναι άτοπο.

- *Στοιχεία κυκλώματος*

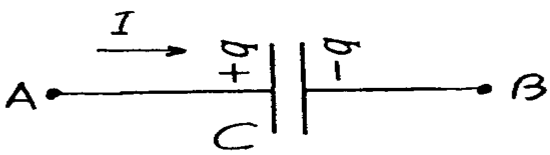
1. *Ηλεκτρική πηγή:* $V_B\text{-}V_A=E\text{-}Ir$



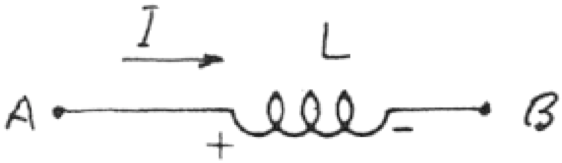
2. *Ηλεκτρική αντίσταση:* $V_A\text{-}V_B=IR$



3. *Πυκνωτής:* $V_A\text{-}V_B=q/C$ *(φόρτιση)*

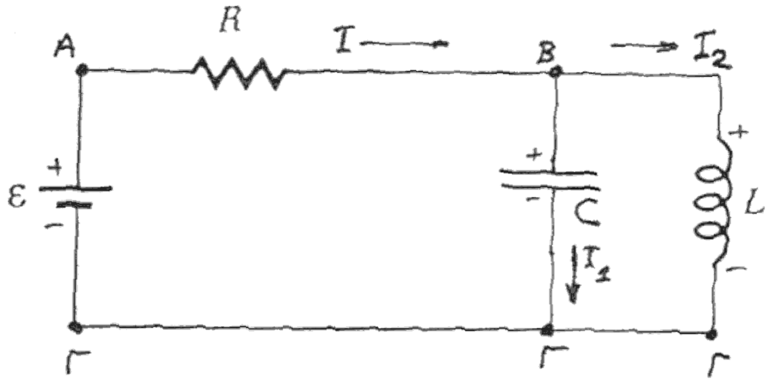


4. *Πηνίο:* $V_A\text{-}V_B=LdI/dt$ *(φόρτιση)*



- *Κανόνες (ή νόμοι) Kirchhoff*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Θεωρούμε το ακόλουθο κύκλωμα



- κύκλωμα ABCΓEA:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_\Gamma) + (V_\Gamma - V_A) = 0$$

ή $$IR + \frac{q}{C} - E = 0 \qquad (1)$$

όπου q είναι το φορτίο του πυκνωτή.

- κύκλωμα ABLΓEA:

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_\Gamma) + (V_\Gamma - V_A) = 0$$

ή $$IR + L\frac{dI_2}{dt} - E = 0 \qquad (2)$$

- κύκλωμα BLΓCB:

$$(V_B - V_\Gamma) + (V_\Gamma - V_A) = 0$$

$$ή \qquad L\frac{dI_2}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \qquad (3)$$

(στη πραγματικότητα η (3) προκύπτει αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2))

- *κόμβος A:* $\qquad I = I_1 + I_2 \qquad (4)$

Θεωρούμε το σύστημα των εξισ. (2)-(4). Επειδή $I_1 = \frac{dq}{dt}$*, παραγωγίζοντας την (3) ως προς t λαμβάνουμε:*

$$I_1 = LCI_2'' \qquad (5)$$

όπου ο τόνος σημαίνει παράγωγο ως προς t. Αντικαθιστώντας τις (4)-(5) στη (2) παίρνομε

$$LCI_2'' + \frac{L}{R}I_2' + I_2 = \frac{E}{R} \qquad (6)$$

Επίλυση της διαφ. εξίσωσης (6).

Η γενική λύση της (5) ισούται με το άθροισμα των λύσεων της ομογενούς διαφορ. εξίσωσης:

$$LCI_2'' + \frac{L}{R}I_2' + I_2 = 0 \quad (7)$$

συν μια μερική λύση της (6), η οποία εν προκειμένω είναι μια σταθερά, δηλ. (E/R).

Για να λύσουμε την ομογενή εξίσωση (7), δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής: $I_2 = Ae^{\lambda t}$*, όπου A και λ σταθερές που θα προσδιοριστούν. Αντικαθιστώντας την λύση αυτή στην (7), προκύπτει το τριώνυμο,*

$$LC\lambda^2 + \frac{L}{R}\lambda + 1 = 0$$

οι ρίζες του οποίου είναι

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{(\frac{1}{2RC})^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: (i) Αν η διακρίνουσα είναι θετική, τότε η λύση της (7) έχει τη μορφή,

$$I_2 = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (8)$$

η οποία για t→∞ τείνει στο μηδέν (απεριοδική λύση). (ii) Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική, ορίζουμε $\omega^2 = \frac{1}{LC} - (\frac{1}{2RC})^2$*, οπότε οι δύο ρίζες γράφονται:*

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm i\omega$$

(i είναι η μιγαδική μονάδα). Τότε η λύση της (7) έχει τώρα τη μορφή (περιοδική λύση),

$$I_2 = e^{-\frac{t}{2RC}}(Ae^{i\omega t} + Be^{i\omega t}) = I_{02}e^{-\frac{t}{2RC}}cos(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

(iii) Αν η διακρίνουσα ισούται με μηδέν, δηλ. $4R^2C=L$, τότε η λύση της (7) έχει τη μορφή

$$I_2 = Ae^{-t/(2RC)} + Bte^{-t/(2RC)} \qquad (10)$$

Τελικά η γενική λύση της (7) θα είναι οι λύσεις (8)-(10) στις οποίες θα πρεπει να προστεθεί και η μερική λύση (E/R). Αντίστροφα τώρα, αντικαθιστώντας το I_2 στις (5) και (4), θα πάρουμε τα ρεύματα I_1 και I, αντίστοιχα, η δε (3) δίδει το φορτίο q.