ΧΡΟΝΟΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΗΜΜ ΠΕΔΙΑ

• *ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ*

Η παραπάνω σχέση (1) πολλ/ζόμενη επί I γράφεται

$$IE = I^2 R + LI\frac{dI}{dt}$$

Η ποσότης IE παριστάνει την ισχύ που παρέχει η ηλεκτ. πηγή, η ποσότης I^2R την ισχύ που καταναλίσκεται σε θερμότητα από την αντίσταση, ενώ η ποσότης LI(dI/dt) παριστάνει την ισχύ που αποθηκεύεται μέσα στο πηνίο. Αν καλέσουμε αυτή την ενέργεια U_m, τότε $\frac{dU_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$, και συνεπώς η ολική ενέργεια που αποθηκεύεται μέσα στο πηνίο ισούται

$$U_m = \int_0^I LI dI = \tfrac{1}{2} LI^2$$

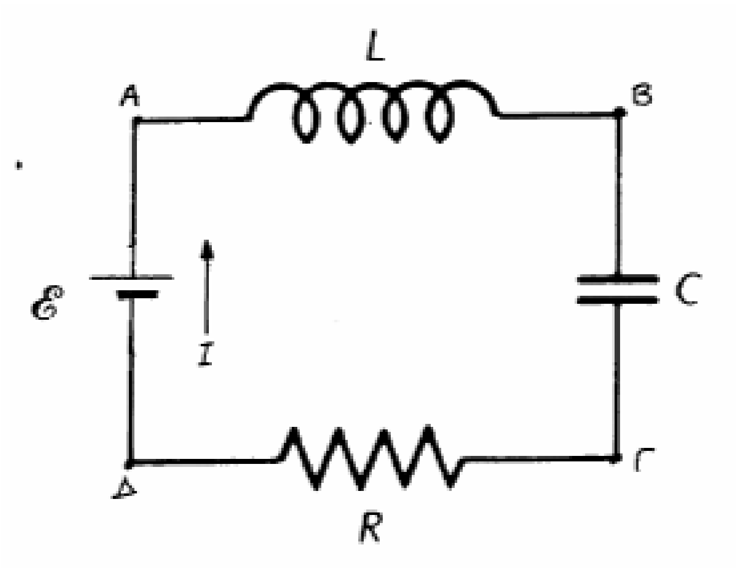
Εχομε δει και μια άλλη έκφραση για την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου

$$U_m = \int_{\Omega} \frac{B^2}{2\mu_o} d\Omega$$

όπου Ω είναι ο όγκος του χώρου όπου εκτείνεται το μαγν. πεδίο. Η ποσότης ($B^2/2\mu_o$) καλείται πυκνότης ενέργειας του μαγν. πεδίου.

- ***Παράδειγμα**: το κύκλωμα RLC*

Θεωρούμε τα στοιχεία R,L,C συνδεδεμένα σε σειρά με dc πηγή ΗΕΔ ε.



Εφαρμόζουμε τον 2ο κανόνα Kirchhoff στο κύκλωμα, έχουμε

$$(V_A\text{-}V_B)+(V_B\text{-}V_\Gamma)+(V_\Gamma\text{-}V_\Delta)+(V_\Delta\text{-}V_A)=0$$

ή

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{C}+IR-E=0 \qquad (1)$$

οπότε παραγωγίζοντας την (1) ως προς t και λαμβάνοντας υπόψιν ότι I=dq/dt, παίρνουμε

$$I^{''}+\frac{R}{L}I^{'}+\frac{1}{LC}I=0 \qquad (2)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παράγωγο ως προς t. Εχουμε επιλύσει την ομογενή διαφορική εξίσωση (2) και είχαμε βρει διάφορες λύσεις. Για παράδειγμα, στη περίπτωση της περιοδικής λύσης είχαμε βρει

$$I=I_o e^{-(R/2L)t}\sin(\omega t+\varphi) \qquad (3)$$

όπου (I_o,φ) *αυθαίρετες σταθερές προσδιοριζόμενες από τις αρχικές συνθήκες και* $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^2}$ *η συχνότητα ταλάντωσης. Η συχνότητα* $\omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ *καλείται ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος.*

Αν απλώς κάναμε αντικατάσταση του I=dq/dt στην (1), θα είχε προκύψει η εξίσωση

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L} \qquad (4)$$

η οποία είναι μη-ομογενής (αλλά με σταθερό μη-γραμμικό όρο). Οι λύσεις της (4) είναι το άθροισμα των λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης [η οποία έχει μορφή με την (2)] συν μια μερική λύση, που εν προκειμένω είναι (E/L), οπότε ας πούμε για περιοδική λύση θα έχουμε

$$q = q_o e^{-(R/2L)t} \sin(\omega t + \delta) + \tfrac{E}{L} \qquad (5)$$

όπου (q_o,δ) αυθαίρετες σταθερές προσδιοριζόμενες από τις αρχικές συνθήκες και $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$ *η συχνότητα ταλάντωσης.*

Αφήνεται σαν άσκηση να επιβεβαιώσετε ότι η λύση (5) δίδει τη λύση (3).

- ***Παράδειγμα**: κύκλωμα RLC σε ac τάση*

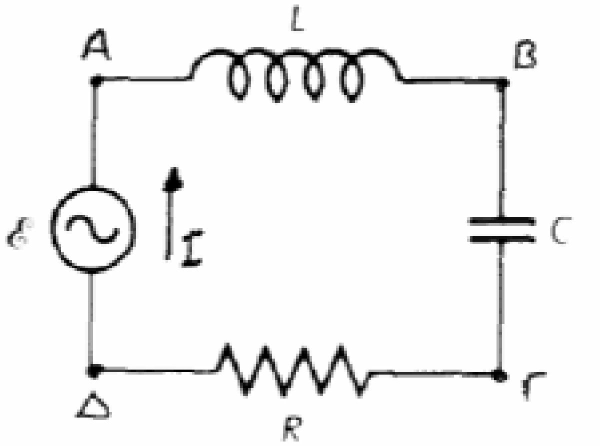
Θεωρούμε τα στοιχεία R,L,C συνδεδεμένα σε σειρά με πηγή ac τάσης, $E_o sin\omega t$.

Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα Kirchhoff στο κύκλωμα, παίρνουμε

$$(V_A-V_B)+(V_B-V_\Gamma)+(V_\Gamma-V_\Delta)+(V_\Delta-V_A)=0$$

ή

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{C}+IR-E_o sin\omega t=0 \qquad (1\alpha)$$



Για την επίλυση της (1) ακολουθείται η ίδια διαδικασία όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, οπότε προκύπτει η εξίσωση,

$$I''+\frac{R}{L}I'+\frac{1}{LC}I=\omega E_o cos(\omega t) \qquad (2\alpha)$$

όμως τώρα δεν μας ενδιαφέρουν και πολύ οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, διότι ο παράγων της απόσβεσης $e^{-(R/2L)t}$ μηδενίζει *πολύ γρήγορα τις λύσεις αυτές, αλλά μας ενδιαφέρει κυρίως η μερική λύση η οποία εν προκειμένω έχει την μορφή Asin(ωt-φ), όπου (A,φ) είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν αντικαθιστώντας την λύση αυτή στην εξίσωση (2α).*

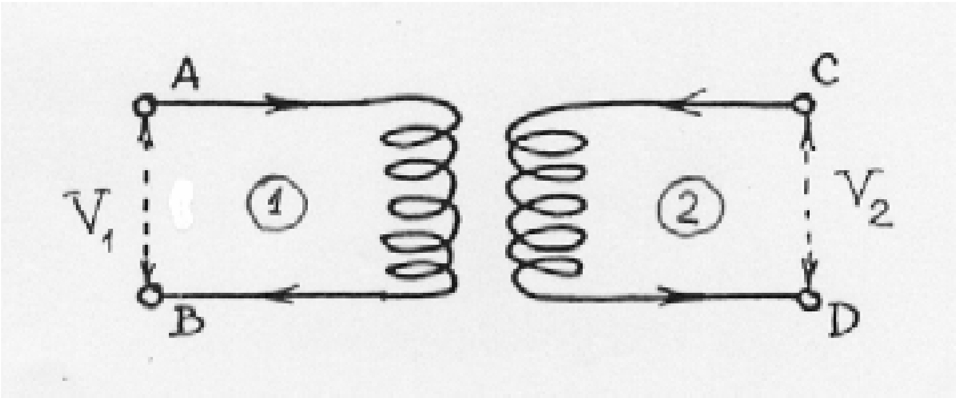
Αφήνεται σαν άσκηση να αποδείξετε ότι:

$$A = \frac{E_o}{\sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}}, \quad tan\varphi = \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}$$

Η ποσότητα $Z = \sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}$ *καλείται εμπέδηση ή σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος, ενώ η ποσότης* $X_C = \frac{1}{\omega C}$ *καλείται χωρητική αντίσταση και η ποσότης* $X_L = \omega L$ *καλείται επαγωγική αντίσταση. Τα μεγέθη* Z, X_C, X_L *μετρώνται σε Ohms.*

- ***Παράδειγμα**: δύο συζευγμένα κυκλώματα*

Θεωρούμε δύο κυκλώματα σε σύζευξη, δηλ. ότι μεταβολή λαμβάνει χώρα στο ένα γίνεται



αισθητή από το άλλο. Αν για παράδειγμα το 1ο κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα I_1, τότε η μαγν. ροή που διαπερνά το 2ο κύκλωμα θα είναι ανάλογος του I_1, δηλ.

$$\Phi_2 = M I_1,$$

όπου η σταθερά αναλογίας M καλείται ***συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής*** *μεταξύ των δύο κυκλωμάτων (μονάδες 1Henry).*

Αν τώρα μεταβάλλεται το I_1, αυτό θα έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση επαγωγικής τάσης στο 2ο κύκλωμα ίση με

$$E_{2\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα Kirchhoff στα δύο κυκλώματα παίρνουμε αντίστοιχα

$$
\left.
\begin{aligned}
I_1 R_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} &= V_1 \\
I_2 R_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} &= V_2
\end{aligned}
\right. \qquad (1)
$$

όπου V_1 και V_2 είναι οι τάσεις (ac ή dc) που εφαρμόζονται στα δύο κυκλώματα και (R_1,L_1), (R_2,L_2) τα χαρακτηριστικά στοιχεία των δύο κυκλωμάτων αντίστοιχα. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (1) είναι 1ης τάξεως και λύνεται εύκολα.