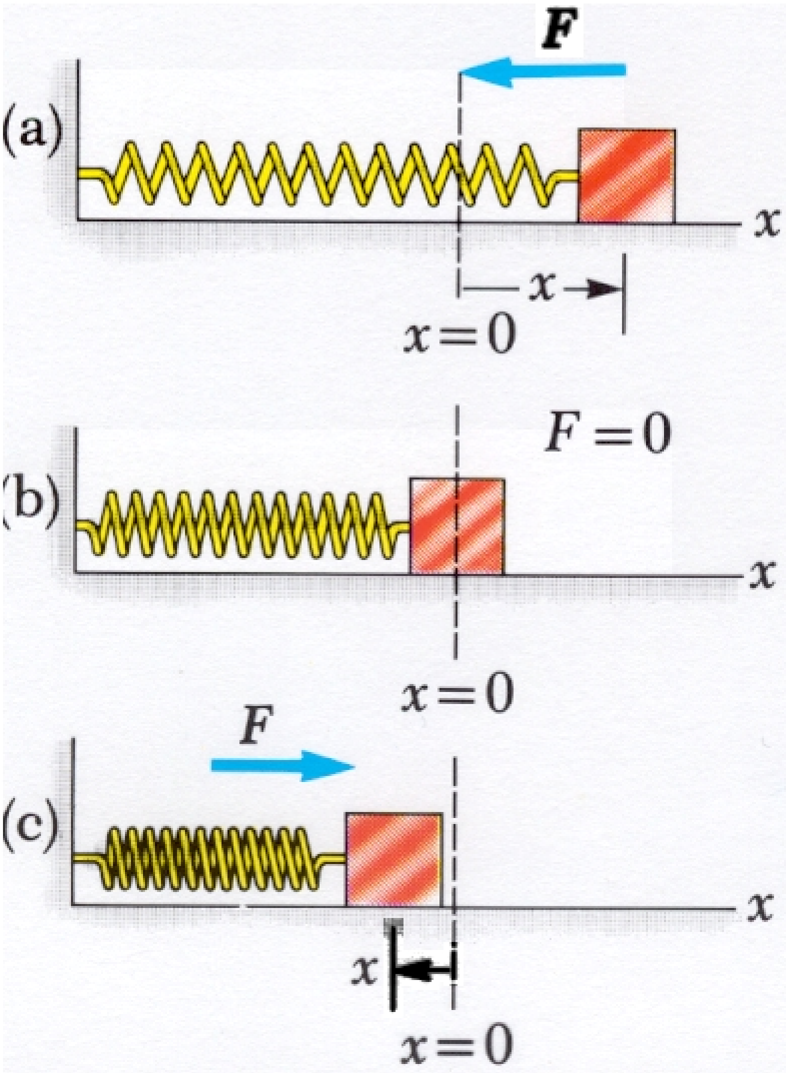
Μάθημα: Φυσική, Ακαδ. Ετος: 2000-2001
Τμήμα: Πολιτικών Μηχανικών , Πανεπιστήμιο Πάτρας
Εγχειρίδιο: **Μαθήματα Φυσικής Παν. Berkeley, τόμος 3: Κυματική**
Διδάσκων: **Αναπληρωτής Καθηγητής Μ. Βελγάκης**

Κεφ. 1 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ **(part 1, pages 1-9)**

Ενα σώμα εκτελεί <u>ταλάντωση</u> όταν η δύναμη που δρά πάνω στο σώμα είναι ανάλογη προς την απομάκρυση από την θέση ισορροπίας του και κατευθύνεται πάντοτε προς το σημείο ισορροπίας του (δύναμη επαναφοράς).



Είδη κίνησης: μεταφορική κίνηση, περιστροφική κίνηση, κύλιση, ταλάντωση, κλπ…

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ:

$$\psi = A\cos(\omega t + \varphi)$$

ψ=ψ(x,y,z,t) είναι η μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του
ή συνάρτηση κύματος
(x,y,z): η θέση του σώματος στο χρόνο t
ω: κυκλική συχνότητα (rad/sec)
A: πλάτος ταλάντωσης (μονάδες;)
ν=ω/2π: συχνότητα ταλάντωσης (Hertz ή κύκλοι/sec)
T=1/ν: περίοδος ταλάντωσης (sec)

Συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας: η θέση του συστήματος (ή η κατάστασή του, γενικώτερα) προσδιορίζεται πλήρως αν δίδεται ένα χαρακτηριστικό του μέγεθος (όπως η μετατόπιση ψ).

Η ταχύτης του σώματος:

$$\upsilon = \frac{d\psi}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

Η επιτάχυνση του σώματος:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

Η δύναμη επαναφοράς: $F = ma = -\omega^2 m\psi$

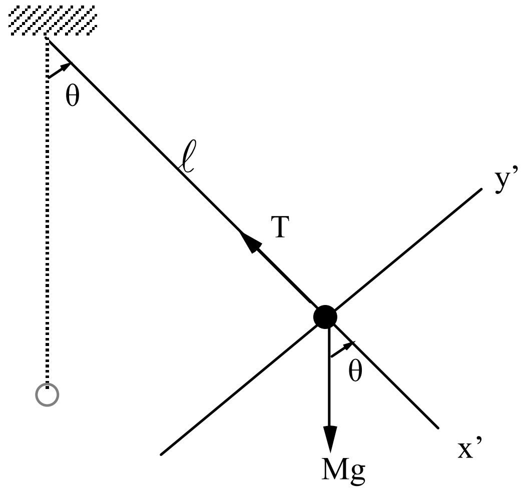
δηλ. επανακαλύπτουμε τον νόμο του Hooke, $F=-k\psi$, όπου $k=m\omega^2$

Η ενέργεια του σώματος:

$$E = \frac{1}{2}k\psi^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ:

Παράδειγμα 1. Απλό ή μαθηματικό εκκρεμές:



Εξισώσεις κίνησης του σώματος Μ (στο σύστημα $x'y'$):

άξονας x' (κυκλική κίνηση): $T - Mg\cos\psi = M\frac{\upsilon^2}{\ell}$ (1)

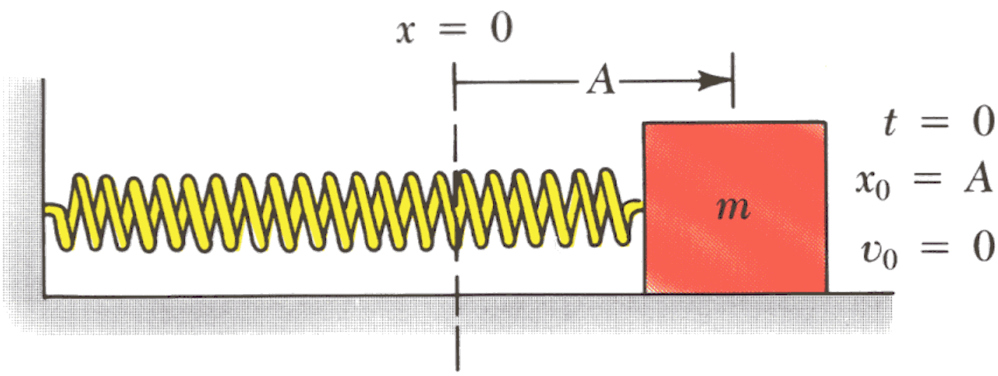
άξονας y' (επιτρόχιος κίνηση): $-Mg\sin\psi = Ma_t$ (2)

όπου $a_t = \ell\frac{d^2\psi}{dt^2}$ είναι η επιτρόχιος επιτάχυνση (ενώ η ποσότης $a_r = \upsilon^2/\ell$ είναι η κεντρομόλος επιτάχυση).

Επίλυση του συστήματος:

Η (2) γράφεται $\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\psi$. Για μικρές γωνίες $\sin\psi \cong \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \ldots$, άρα $\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\psi$. Η λύση της είναι ψ=Asin(ωt+φ), όπου $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Οι σταθερές ολοκλήρωσης (A,φ) υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλ. για t=0 ισχύουν τις εξισώσεις, ψ(0)=Asin(φ) και ψ′(0)=-ωAcos(φ) με άγνωστους τα (A,φ).

Παράδειγμα 2. Σώμα M προσδεδεμένο στο άκρο ελατηρίου:



(προσοχή στο σημείο 0, δηλ. την αρχή του x άξονα)

Η ασκούμενη δύναμη επί του σώματος: F=-kx

Η εξίσωση κίνησης του σώματος M (κατά τον άξονα x):

$$- kx = Ma$$

ή

$$- kx = M \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$

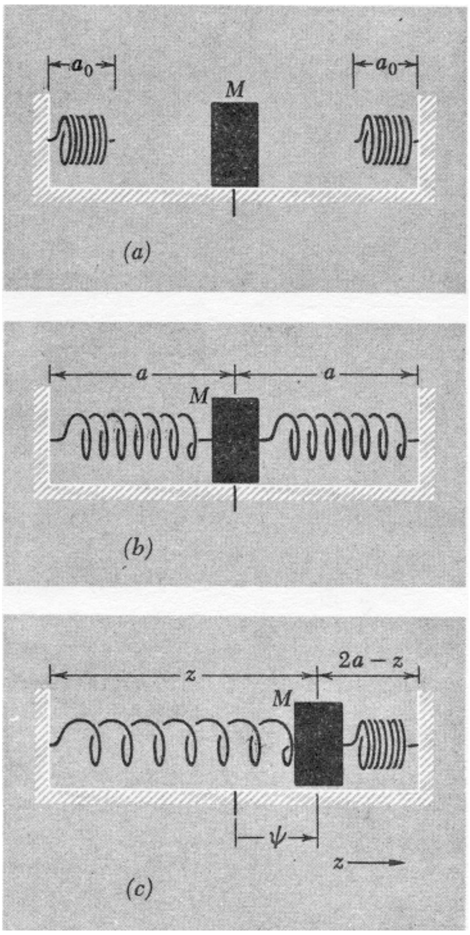
Η (1) είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως και η λύση της είναι: (σημειώνουμε ότι η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας ψ≡x)

$$\psi = A \cos(\omega t+\delta)$$

Επίλυση της (1):

Η διαφορική εξίσωση $d^2x/dt^2=- k/Mx$ γράφεται: $x''=-k/Mx$. Πολλαπλασιάζομε και τα τα δύο μέλη επί x', οπότε προκύπτει, $x'x''=-k/Mxx'$ ή $\frac{d}{dt}\frac{(x')^2}{2} = -\frac{k}{M}\frac{d}{dt}\frac{x^2}{2}$ ή $(x')^2+k/Mx^2=c$ ή $x' = \pm\sqrt{c-k/Mx^2}$ ή $x' = \pm\sqrt{k/M}\sqrt{cM/k-x^2}$. Ονομάζομε $\omega = \sqrt{k/M}$ και $\alpha^2 = cM/k$, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γράφεται, $x' = \pm\omega\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ ή $\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \pm\omega dt$. Ολοκληρώνοντάς την $\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \pm\omega\int dt$ παίρνουμε, $\sin^{-1}(x/\alpha)=\pm\omega t+\varphi$. Αντιστρέφοντας τη συνάρτηση αυτή έχουμε, $x=\alpha\sin(\pm\omega t+\varphi)$ ή αν καλέσουμε, $A=\pm\alpha$ και $\delta=\pm\varphi+90^o$ λαμβάνουμε τη γενική λύση της (1) στη γενική μορφή: $x=A\cos(\omega t+\delta)$, όπου οι αυθαίρετες σταθερές (A,φ) προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες της θέσης $x(0)$ και και της ταχύτητος $x'(0)$.

Παράδειγμα 3. Σώμα Μ προσδεδεμένο σε δύο ελατήρια (διαμήκεις ταλαντώσεις):



Η ασκούμενη δύναμη επι του σώματος:

$$F = -k(z-a_o) + k(2a-z-a_o) = -2k(z-a)$$

k: είναι η σταθερά και των ελατηρίων

2a: η απόσταση των σταθερών τοιχωμάτων εξάρτησης των ελατηρίων

a_o: το φυσικό μήκος κάθε ελατηρίου
z: η z-συντεταγμένη του σώματος ως προς το αριστερό τοίχωμα

Η εξίσωση κίνησης του σώματος Μ (κατά τον άξονα z, διαμήκης ταλάντωση) είναι:

$$- 2k(z-a) = Ma$$

ή

$$- 2k(z-a) = M \frac{d^2z}{dt^2}$$

Η μετατόπιση του σώματος από την θέση ισορροπίας του είναι: $\psi=z-a$

οπότε η εξ. κίνησης γράφεται:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = - \frac{2k}{M}\psi$$

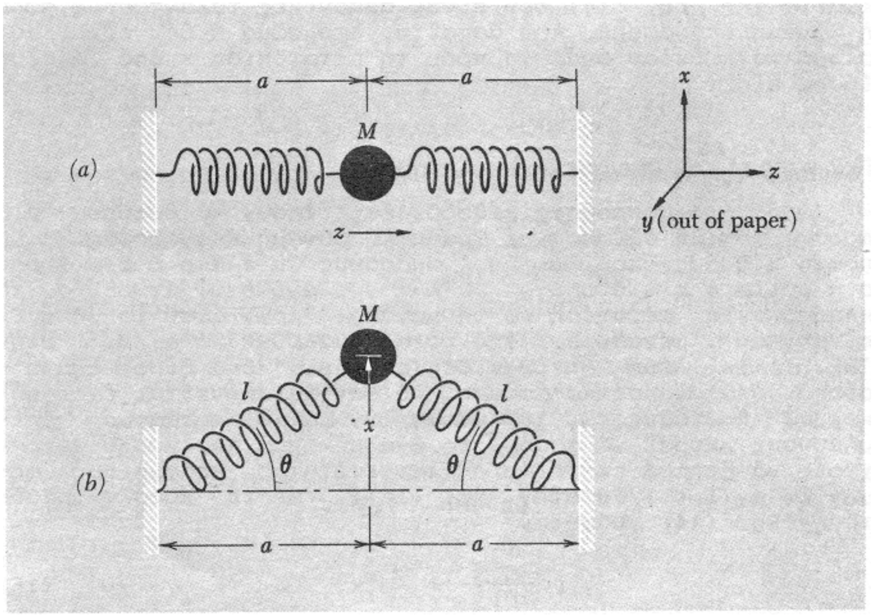
Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι:

$$\Psi=A\cos(\omega_\Delta t+\delta)$$

όπου $\omega_\Delta = \sqrt{2k/M}$

Παράδειγμα 4. Σώμα Μ προσδεδεμένο σε δύο ελατήρια (εγκάρσιες ταλαντώσεις):

Η κίνηση είναι πάνω στο επίπεδο zx, όμως με τον εξαναγκασμό ότι το σώμα κινείται πάνω στη κατακόρυφο z=a (η υπόθεση αυτή δεν περιορίζει τη γενικότητα του προβλήματος).



Θεωρούμε το σώμα σε τυχούσα θέση. Η x-συνιστώσα της ασκούμενης δύναμης επί του σώματος είναι:

$$F_x = -T_1 \sin\theta_1 - T_2 \sin\theta_2$$

$$= -k(\ell - a_o)\frac{x}{\ell} - k(\ell - a_o)\frac{x}{\ell}$$

$$= -2k(1 - \frac{a_o}{\ell})x$$

k: είναι η σταθερά κάθε ελατηρίου

ℓ: το μήκος κάθε ελατηρίου, $\ell = \sqrt{x^2 + a^2}$

a_o: το φυσικό μήκος κάθε ελατηρίου

2a: η απόσταση των σταθερών τοιχωμάτων εξάρτησης των ελατηρίων

z: η z-συντεταγμένη του σώματος ως προς το αριστερό τοίχωμα

Η εξίσωση κίνησης του σώματος Μ κατά την εγκάρσια διεύθυνση (άξονας x) είναι,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -2k(1 - \frac{a_o}{\ell})x \qquad (1)$$

α) Προσέγγιση μαλακού ελατηρίου, $a_o \ll \ell$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{M}x$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$x = A\cos(\omega_E t + \delta)$$

όπου $\omega_E = \sqrt{2k/M}$, δηλ. ίση με εκείνην των διαμήκων ταλαντώσεων (που δεν αληθεύει γενικά)

β) Προσέγγιση μικρών ταλαντώσεων, x<<α:

$$\frac{1}{\ell} = \left(x^2 + a^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{a}\left(1+\varepsilon^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{8} + \ldots\right),$$

όπου $\varepsilon=(x/\alpha)^2$, άρα η διαφ. εξ. (1) γράφεται:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{M}\left(1-\frac{a_o}{\ell}\right)x = -\frac{2k}{M}x\left(1 - \frac{a_o}{a}\left[1 - \frac{x}{2a} + \frac{3x^2}{8a^2} + \ldots\right]\right)$$

$$= -\frac{2k}{M}x\left(1 - \frac{a_o}{a}[1]\right) = -\frac{2k(a - a_o)}{Ma}x$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής (στη 1η προσέγγιση) είναι:

$$x = A\cos(\omega_E t + \delta)$$

όπου $\omega_E = \sqrt{\frac{2k}{M}(1-\frac{a_o}{a})} = \omega_\Delta \sqrt{1-\frac{a_o}{a}}$.

Επεται ότι $\frac{\omega_\Delta}{\omega_E} = \frac{1}{\sqrt{1-a_o/a}} > 1$,

δηλ. οι διαμήκεις είναι πιό γρήγορες από τις εγκάρσιες

Ορολογία διαφορικών εξισώσεων:

1. Ομογενής διαφ. εξίσωση: όταν κάθε όρος της εξίσωσης περιέχει και την εξηρτημένη μεταβλητή ψ, π.χ. $3t\frac{d\psi}{dt} = \psi \cos\psi$.

2. Γραμμική διαφ.εξίσωση: είναι οι εξισώσεις εκείνες που είναι γραμμικές ως προς την εξηρτημένη μεταβλητή ψ, δηλ. περιέχουν μόνο την δύναμη των ψ, ψ΄,ψ΄΄, κλπ. π.χ. $\frac{d\psi}{dt} = \cos\psi + t$ δεν είναι γραμμική διαφ. εξίσωση.

3. Τάξη της διαφ. εξίσωση: είναι η μεγαλύτερη παράγωγος της εξηρτημένης μεταβλητής ψ, π.χ. $\frac{d^3\psi}{dt^3} = e^{-t} + t + \frac{d^2\psi}{dt^2}$ είναι 3ης τάξεως .

4. Θεώρημα των ομογενών διαφορικών εξισώσεων:
αν $\psi_1(t)$ και $\psi_2(t)$ είναι λύσεις της εξίσωσης, τότε και το άθροισμά τους είναι λύση της εξίσωσης (αρχή της υπέρθεσης).