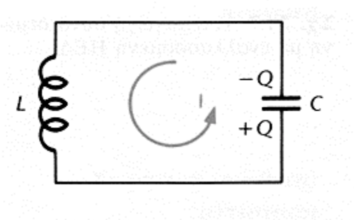
Κεφ. 1 **ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ** **(part 2, pages 10-24)**

Παράδειγμα 5. Το κύκλωμα LC

Υποθέτουμε ότι αρχικά είναι φορτισμένος ο πυκνωτής με φορτίο Q_o. Μετά το κλείσιμο του κυκλώματος και σε τυχούσα χρονική στιγμή ισχύει:



Ο 2ος κανόνας Kirchhoff (δηλ. η εξίσωση κίνησης του συστήματος LC) είναι:

$$- L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

επειδή I=dQ/dt, η εξίσωση αυτή γράφεται:

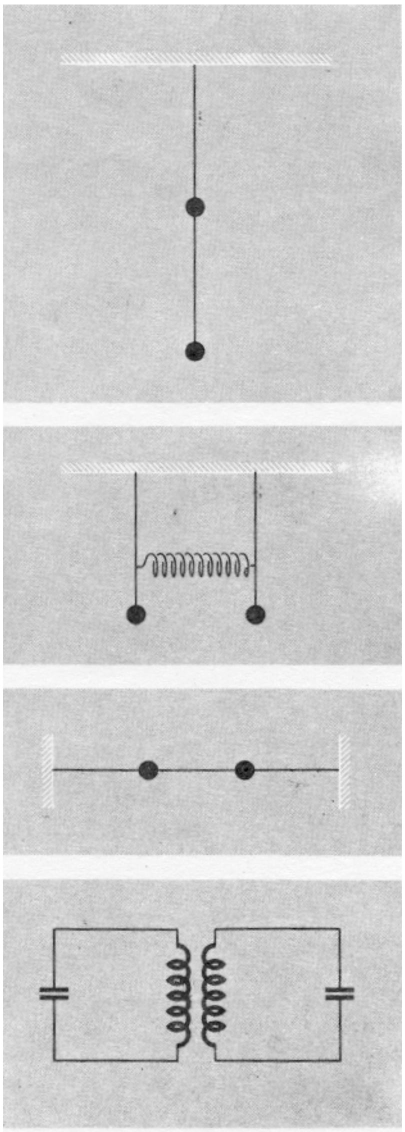
$$\frac{d^2Q}{dt^2} = - \frac{1}{LC} Q$$

η οποία κατά τα γνωστά έχει λύση της μορφής:

$$Q = A \cos(\omega t+\delta)$$

όπου $\omega = \sqrt{1/LC}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος (δηλ. για t=0 $Q=Q_o$ και I=0) και να υπολογίσουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης (Α,δ).

Συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας: η κατάσταση του συστήματος προσδιορίζεται πλήρως αν δίδονται δύο χαρακτηριστικά μεγέθη του συστήματος, όπως π.χ. $\psi_\alpha(t)$ και $\psi_\beta(t)$ ή $I_1(t)$ και $I_2(t)$,



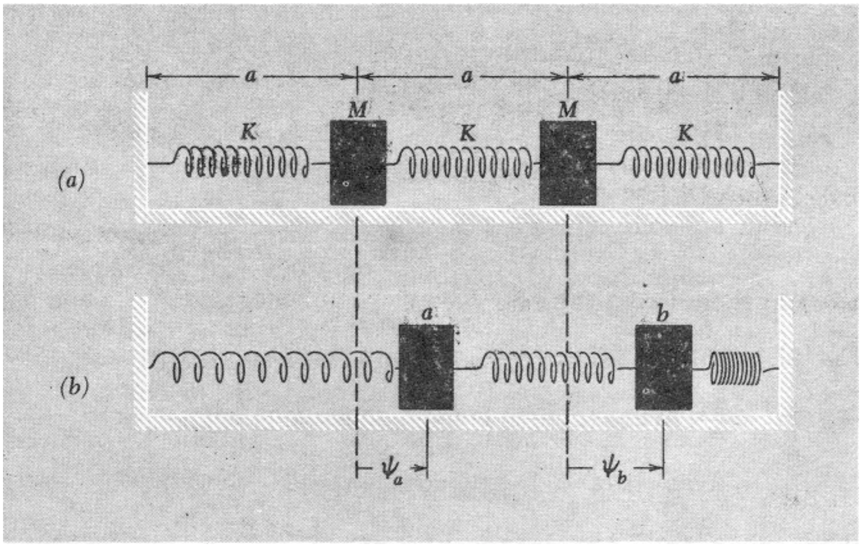
Αν οι εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος με 2 βαθμούς ελευθερίας είναι γραμμικές, τότε η γενική κίνηση του συστήματος είναι υπέρθεση 2 ανεξαρτήτων απλών αρμονικών κινήσεων, που ονομάζονται κανονικοί τρόποι ταλάντωσης, normal modes of oscilations.

Οταν ενεργοποιείται μόνο ένας <u>κανονικός τρόπος ταλάντωσης</u>, τότε κάθε κινούμενο μέρος του συστήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, δηλ. ισχύουν οι σχέσεις

$$\psi_\alpha(t)=A\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$\psi_\beta(t)=B\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$$

περιγράφουν τον ίδιο κανονικό τρόπο ταλάντωσης, εφόσον (ω_1,φ_1) είναι ίδια. Η συχνότητα ω_1 είναι το χαρακτηριστικό μέγεθος για τον συγκεκριμμένο τρόπο ταλάντωσης.

Παράδειγμα 6α. Δύο συζευγμένες μάζες Μ (μόνο διαμήκεις ταλαντώσεις)



Οι εξισώσεις κίνησης για τις 2 μάζες είναι:

$$
\begin{aligned}
M\frac{d^2\psi_\alpha}{dt^2} &= -k\psi_\alpha + k(\psi_\beta - \psi_\alpha) \\
M\frac{d^2\psi_\beta}{dt^2} &= -k(\psi_\beta - \psi_\alpha) - k\psi_\beta
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Επίλυση του συστήματος των διαφ. εξισώσεων (1):

α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις 2 εξισώσεις παίρνομε:

$$M\frac{d^2}{dt^2}(\psi_\alpha + \psi_\beta) = -k(\psi_\alpha + \psi_\beta)$$

η οποία έχει λύση:

$$(\psi_\alpha+\psi_\beta)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) \qquad (2)$$

όπου $\omega_1 = \sqrt{k/M}$ και (A_1,φ_1) είναι το πλάτος ταλάντωσης και η αρχική φάση στον 1ο κανονικό τρόπο διαμήκους ταλάντωσης.

β) Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις στο σύστημα (1), λαμβάνουμε

$$M\frac{d^2}{dt^2}(\psi_\alpha - \psi_\beta) = -3k(\psi_\alpha - \psi_\beta)$$

η οποία έχει λύση:

$$(\psi_\alpha-\psi_\beta)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad (3)$$

όπου $\omega_2 = \sqrt{3k/M}$ και (A_2,φ_2) είναι το πλάτος ταλάντωσης και η αρχική φάση στον 2ο κανονικό τρόπο διαμήκους ταλάντωσης.

Μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες $\psi_\alpha(t)$ και $\psi_\beta(t)$ εύκολα από τις (2) και (3):

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= \tfrac{1}{2} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \tfrac{1}{2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \psi_\beta &= \tfrac{1}{2} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \tfrac{1}{2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad (4)$$

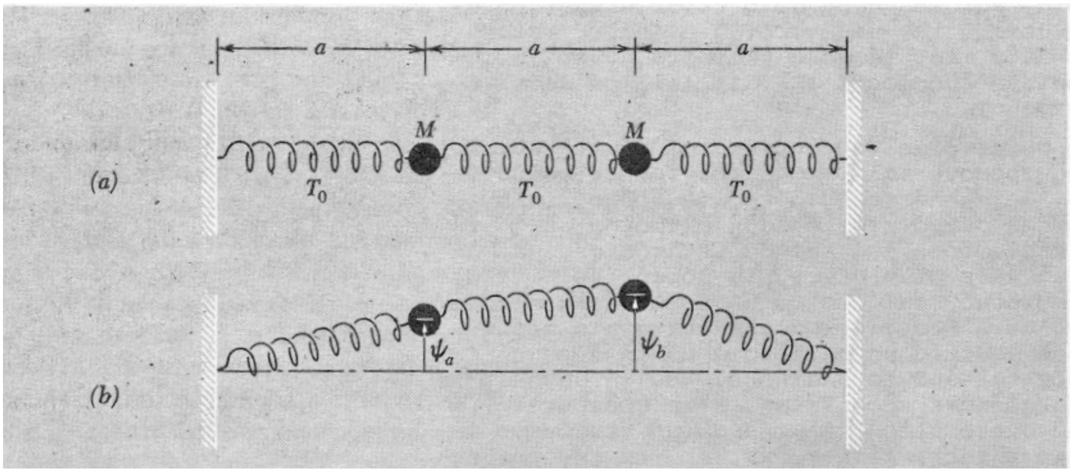
οπότε η κίνηση του καθενός σώματος είναι υπέρθεση των 2 ανεξαρτήτων απλών αρμονικών κινήσεων (δηλ. των 2 κανονικών τρόπων ταλάντωσης).

Μπορούμε να αντιληφθούμε καλύτερα τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης ως εξής:

Από τις (4), αν αγνοήσουσε την 2α αρμονική ταλάντωση (A_2=0), τότε προκύπτει $\psi_\alpha(t)=\psi_\beta(t)$, δηλ. και τα δύο σώματα εκτελούν την ίδια ακριβώς (διαμήκη) ταλάντωση με συχνότητα ω_1, όπως φαίνεται στο σχήμα

Ομοίως από τις (4), αν αγνοήσουσε την 1η αρμονική ταλάντωση (A_1=0), τότε προκύπτει ότι $\psi_\alpha(t)=-\psi_\beta(t)$, δηλ. τα δύο σώματα εκτελούν αντίθετη (διαμήκη) ταλάντωση με συχνότητα ω_2, όπως φαίνεται στο σχήμα

Παράδειγμα 6β. Δύο συζευγμένες μάζες Μ (μόνο εγκάρσιες ταλαντώσεις).



Υποθέτομε ότι οι δύο μάζες εξαναγκάζονται να κινούνται πάνω στα κατακόρυφα επίπεδα x=a και x=2a, αντίστοιχα. (Μπορούμε να φανταστούμε ότι έχουμε κάνει μία οπή σε κάθε σώμα Μ και έχουμε περάσει μιά ακλόνητο κατακόρυφο ράβδο μέσα από κάθε οπή, έτσι ώστε τα 2 σώματα να κινούνται κατακόρυφα χωρίς τριβές πάνω στους οδηγούς).

Η y-συνιστώσα (κατακόρυφος διεύθυνση) των ασκουμένων δύναμεων επί των 2 σωμάτων είναι:

$$F_{1y} = -T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2$$

$$= -k(\ell_1 - a_o)\frac{\psi_\alpha}{\ell_1} + k(\ell_2 - a_o)\frac{\psi_\beta - \psi_\alpha}{\ell_2}$$

$$= -k(2 - \frac{a_o}{\ell_1} - \frac{a_o}{\ell_2})\psi_\alpha + k(1 - \frac{a_o}{\ell_2})\psi_\beta$$

$$F_{2y} = -T_2 \sin\theta_1 - T_3 \sin\theta_3$$

$$= -k(\ell_2 - a_o)\frac{\psi_\beta - \psi_\alpha}{\ell_2} - k(\ell_3 - a_o)\frac{\psi_\beta}{\ell_3}$$

$$= -k(2 - \frac{a_o}{\ell_2} - \frac{a_o}{\ell_3})\psi_\beta + k(1 - \frac{a_o}{\ell_2})\psi_\alpha$$

όπου ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, τα μήκη των ελατηρίων,

$$\ell_1 = \sqrt{a^2 + \psi_\alpha^2}$$

$$\ell_2 = \sqrt{a^2 + (\psi_\beta - \psi_\alpha)^2}$$

$$\ell_3 = \sqrt{a^2 + \psi_\beta^2}$$

Να θυμηθούμε τη προσέγγιση των μικρών ταλαντώσεων από το Παράδειγμα 4,

$$\frac{1}{\ell} = \left(x^2 + a^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{a}\left(1 + \varepsilon^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{8} + \ldots\right),$$

για ε<<1, όπου $\varepsilon=(x/a)^2$, οπότε τα παραπάνω μήκη των ελατηρίων γράφονται,

$$\frac{1}{\ell_1}=\frac{1}{a}[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\psi_\alpha}{a}\right)^2+\ldots]\cong\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{\ell_2}\cong\frac{1}{a},\quad \text{και} \quad \frac{1}{\ell_3}\cong\frac{1}{a}$$

οπότε οι δυνάμεις F_{1y},F_{2y} γράφονται (κρατώντας μόνο γραμμικούς όρους στις προσεγγίσεις ως προς τις απομακρύνσεις ψ_α,ψ_β),

$$F_{1y}=-k(1-\frac{a_o}{a})(2\psi_\alpha-\psi_\beta)$$

$$F_{2y}=-k(1-\frac{a_o}{a})(2\psi_\beta-\psi_\alpha)$$

Οι εξισώσεις κίνησης των 2 σωμάτων κατά την εγκάρσια διεύθυνση είναι,

$$\begin{aligned} M\frac{d^2\psi_\alpha}{dt^2}&=-\frac{k}{M}\left(1-\frac{a_o}{a}\right)(2\psi_\alpha-\psi_\beta) \\ M\frac{d^2\psi_\beta}{dt^2}&=-\frac{k}{M}\left(1-\frac{a_o}{a}\right)(2\psi_\beta-\psi_\alpha) \end{aligned} \qquad (1)$$

<u>Επίλυση του συστήματος των 2 διαφ. εξισώσεων</u>:

α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις 2 εξισώσεις παίρνομε:

$$M\frac{d^2}{dt^2}(\psi_\alpha+\psi_\beta)=-k(1-\frac{a_o}{a})(\psi_\alpha+\psi_\beta)$$

η οποία έχει λύση:

$$(\psi_\alpha+\psi_\beta)=A_1\cos(\omega_{1E}t+\varphi_1) \qquad (2)$$

όπου $\omega_{1E}=\sqrt{\frac{k}{M}(1-\frac{a_o}{a})}$ και (A_1,φ_1) είναι το πλάτος ταλάντωσης και η αρχική φάση στον 1ο κανονικό τρόπο εγκάρσιας ταλάντωσης.

β) Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις στο σύστημα (1), λαμβάνουμε

$$M\frac{d^2}{dt^2}(\psi_\alpha-\psi_\beta)=-3k(1-\frac{a_o}{a})(\psi_\alpha-\psi_\beta)$$

η οποία έχει λύση:

$$(\psi_\alpha-\psi_\beta)=A_2\cos(\omega_{2E}t+\varphi_2) \qquad (3)$$

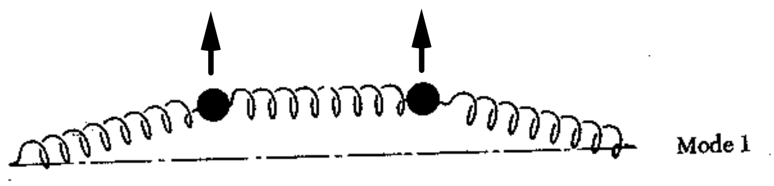
όπου $\omega_{2E}=\sqrt{\frac{3k}{M}(1-\frac{a_o}{a})}$ και (A_2,φ_2) είναι το πλάτος ταλάντωσης και η αρχική φάση στον 2ο κανονικό τρόπο εγκάρσιας ταλάντωσης.

Μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες $\psi_\alpha(t)$ και $\psi_\beta(t)$ εύκολα από τις (2) και (3):

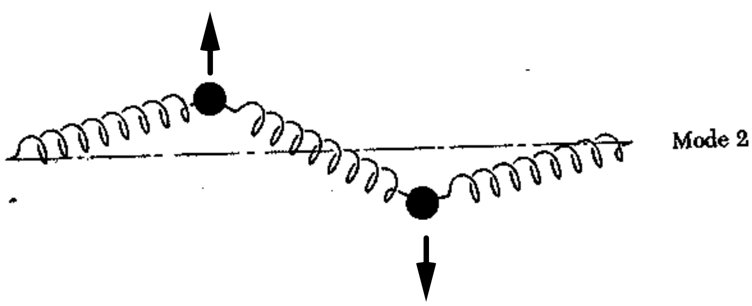
$$\begin{aligned}\psi_\alpha &= \tfrac{1}{2}A_1\cos(\omega_{1E}t+\varphi_1)+\tfrac{1}{2}A_2\cos(\omega_{2E}t+\varphi_2)\\ \psi_\beta &= \tfrac{1}{2}A_1\cos(\omega_{1E}t+\varphi_1)-\tfrac{1}{2}A_2\cos(\omega_{2E}t+\varphi_2)\end{aligned} \qquad (4)$$

οπότε η κίνηση του καθενός σώματος είναι υπέρθεση των 2 ανεξαρτήτων απλών αρμονικών κινήσεων (δηλ. των 2 κανονικών τρόπων ταλάντωσης).

Μπορούμε να αντιληφθούμε καλύτερα τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης ως εξής:
Από τις (4), αν αγνοήσουσε την 2α αρμονική ταλάντωση (A_2=0), τότε προκύπτει $\psi_\alpha(t)=\psi_\beta(t)$, δηλ. και τα δύο σώματα εκτελούν την ίδια ακριβώς (εγκάρσια) ταλάντωση με συχνότητα ω_{1E},



Ομοίως από τις (4), αν αγνοήσουσε την 1η αρμονική ταλάντωση (A_1=0), τότε προκύπτει ότι $\psi_\alpha(t)=-\psi_\beta(t)$, δηλ. και τα δύο σώματα εκτελούν αντίθετη (εγκάρσια) ταλάντωση με συχνότητα ω_{2E},



Συστηματική αναζήτηση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (normal modes)

Θεωρούμε ένα φυσικό σύστημα με 2 βαθμούς ελευθερίας το οποίο περιγράφεται από 2 χαρακτηριστικές μεταβλητές, έστω $\psi_\alpha(t)$ και $\psi_\beta(t)$. Εστω ότι έχουμε βρει 2 ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ας τάξης, οι οποίες περιγράφουν την κινητική κατάσταση του συστήματος, της μορφής,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_\alpha}{dt^2} &= -\alpha_{11}\psi_\alpha - \alpha_{12}\psi_\beta \\ \frac{d^2\psi_\beta}{dt^2} &= -\alpha_{21}\psi_\alpha - \alpha_{22}\psi_\beta \end{aligned} \qquad (1)$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα διεγείρεται μόνο σε ένα συγκεκριμμένο τρόπο ταλάντωσης με κυκλική συχνότητα ω, που σημαίνει ότι οι μεταβλητές $\psi_\alpha(t)$ και $\psi_\beta(t)$ θα έχουν τη μορφή,

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= A\cos(\omega t+\varphi) \\ \psi_\beta &= B\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned} \qquad (2)$$

(ίδια ω και φ). Αν οι σχέσεις (2) είναι λύσεις των εξισώσεων (1), τότε θα πρέπει να ικανοποιούν τις (1). Αρα, αντικαθιστώντες στις (1) προκύπτει,

$$\begin{aligned} -\omega^2\psi_\alpha &= -\alpha_{11}\psi_\alpha - \alpha_{12}\psi_\beta \\ -\omega^2\psi_\beta &= -\alpha_{21}\psi_\alpha - \alpha_{22}\psi_\beta \end{aligned}$$

ή

$$(\alpha_{11}-\omega^2)\psi_\alpha+\alpha_{12}\psi_\beta=0$$
$$\alpha_{21}\psi+(\alpha_{22}-\omega^2)\psi_\beta=0 \qquad (3)$$

δηλ. καταλήγουμε σε ένα ομογενές σύστημα N=2 γραμμικών (αλγεβρικών) εξισώσεων. Για να έχει μη μηδενική λύση το ομογενές σύστημα, θα πρέπει η χαρακτηριστική ορίζουσα να ισούται με μηδέν, δηλ.

$$\begin{vmatrix}(\alpha_{11}-\omega^2) & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & (\alpha_{22}-\omega^2)\end{vmatrix}=0$$

απ'όπου λαμβάνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση,

$$(\alpha_{11}-\omega^2)(\alpha_{22}-\omega^2)-\alpha_{12}\alpha_{21}=0$$

Η εξίσωση αυτή είναι ένα τριώνυμο ως προς ω^2, άρα γενικά θα πρέπει να έχει 2 μη-μηδενικές λύσεις, $(\omega^2)_1$ και $(\omega^2)_2$. Οι λύσεις αυτές λέγονται ιδιοσυχνότητες του συστήματος (στη Γραμμική Αλγεβρα, λέγονται ιδιοτιμές του πίνακα),

$$(\omega^2)_{1,2}=\frac{1}{2}(\alpha_{11}+\alpha_{22})\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2+4(\alpha_{12}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{22})}$$

Για κάθε ιδιοσυχνότητα ω_1 ή ω_2, μπορούμε να υπολογίσουμε τις λύσεις ψ_α και ψ_β από τις εξισ. (3),

$$\frac{\psi_\beta}{\psi_\alpha}=\frac{B_1}{A_1}=\frac{\omega_1^2-\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \qquad \text{(mode 1)}$$

$$\frac{\psi_\beta}{\psi_\alpha} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} \qquad \text{(mode 2)}$$

(στη Γραμμική Αλγεβρα, οι λύσεις ψ_α και ψ_β λέγονται ιδιοδιανύσματα του πίνακα).

Τώρα, η γενική λύση του συστήματος (1) θα είναι υπέρθεση των δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης,

$$\psi_\alpha = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$\psi_\beta = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Οι 4 ανεξάρτητες σταθερές A_1, φ_1, A_2, φ_2 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος $\psi_\alpha(0)$, $\psi_\beta(0)$, $\psi'_\alpha(0)$, $\psi'_\beta(0)$.

Διακροτήματα (beats)

Σύμφωνα με το θεώρημα της υπέρθεσης, η κίνηση ενός σύστημα με πολλούς ελευθερίας είναι υπέρθεση όλων των ανεξαρτήτων αρμονικών ταλαντώσεων που μπορεί να διεγερθεί, δηλ. η συνιστάμενη διαταραχή του συστήματος θα έχει τη μορφή (γιά 2 βαθμούς ελευθερίας)

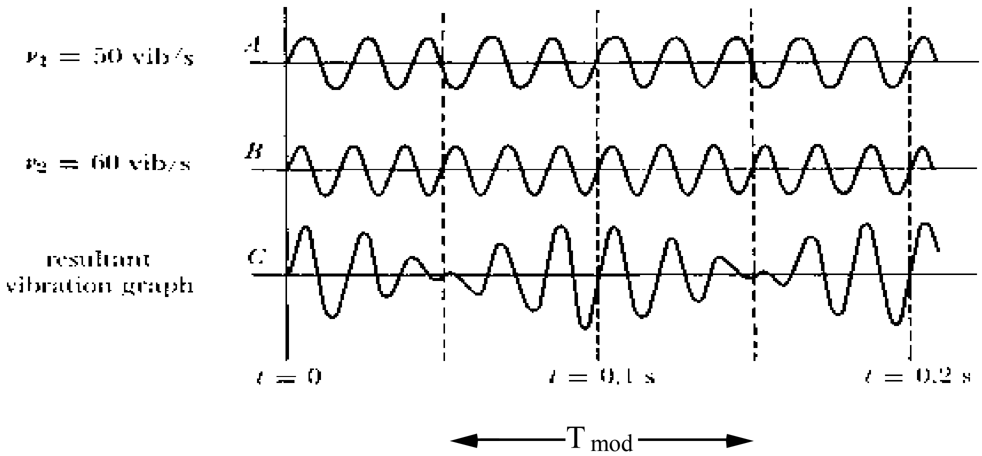
$$\psi(t) = A_1 \sin(\omega_1 t+\varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

Για ευκολία μας παίρνουμε $A_1=A_2=A$, οπότε

$$\psi(t) = A\,[\sin(\omega_1 t+\varphi_1) + \sin(\omega_2 t+\varphi_2)]$$

$$= 2A\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$$
$$= 2A\sin(\omega t+\varphi)\cos(\omega_{mod}t+\delta) = A_{mod}(t)\sin(\omega t+\varphi)$$

όπου $\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$, $\varphi=(\varphi_1+\varphi_2)/2$, $\delta=(\varphi_1-\varphi_2)/2$, $\omega_{mod}=(\omega_1-\omega_2)/2$ και $A_{mod}(t)=2A\cos(\omega_{mod}t+\delta)$.



Εφόσον το συνιστάμενο πλάτος ταλάντωσης είναι περιοδική συνάρτηση, $A_{mod}(t+T)=A_{mod}(t)$, λαμβάνουμε την συχνότητα διακροτήματος,

$$\nu = \nu_1 - \nu_2$$

Θεώρημα του Fourier: Αν ψ(t) είναι μιά περιοδική συνάρτηση ως προς t, τότε η συνάρτηση αυτή μπορεί να παρασταθεί από μια σειρά τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής

$$\psi(t) = \sum_n [A_n \sin(2\pi\omega_n t+\varphi) + B_n\cos(2\pi\omega_n t+\varphi)]$$

a) κάθε σετ (ω_n, A_n,B_n) ορίζει την n-στή αρμονική

b) $(A_n^2+B_n^2)$ ορίζει την ένταση της n-στής αρμονικής

Στο ακόλουθο σχήμα παρίσταται η ένταση του φωνήεντος α εκφωνούμενο στη θεμελιώδη συχνότητα 200Hz. Δίπλα έχει αναλυθεί ο ήχος α στις θεμελιώδεις συχνότητες που το απαρτίζουν.