Κεφ. 2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΟΛΛΟΥΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

(part 1, pages 1-11)

Θεωρούμε ένα σύστημα με Ν βαθμούς ελευθερίας, το οποίο θα περιγράφεται από Ν συντεταγμένες $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ..., $\psi_N(t)$.

Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος θα έχουν την μορφή

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= -\alpha_{11}\psi_1 - \alpha_{12}\psi_2 - \ldots - \alpha_{1N}\psi_N, \\ \psi_2'' &= -\alpha_{21}\psi_1 - \alpha_{22}\psi_2 - \ldots - \alpha_{2N}\psi_N, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{1}$$

(όπου ο τόνος σημαίνει παράγωγο ως προς τον χρόνο). Εφόσον αναζητούμε κανονικές λύσεις της μορφής:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi), \\ \psi_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_N &= A_N\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned} \tag{2}$$

αντικαθιστώντας στην (1) προκύψει το σύστημα Ν γραμμικών εξισώσε

$$\begin{aligned} (\alpha_{11}-\omega^2)A_1 + \alpha_{12}A_2 + \ldots + \alpha_{1N}A_N &= 0, \\ \alpha_{21}A_1 + (\alpha_{22}-\omega^2)A_2 + \ldots + \alpha_{2N}A_N &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{N1}A_1 + \alpha_{N2}A_2 + \ldots + (\alpha_{NN}-\omega^2)A_N &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

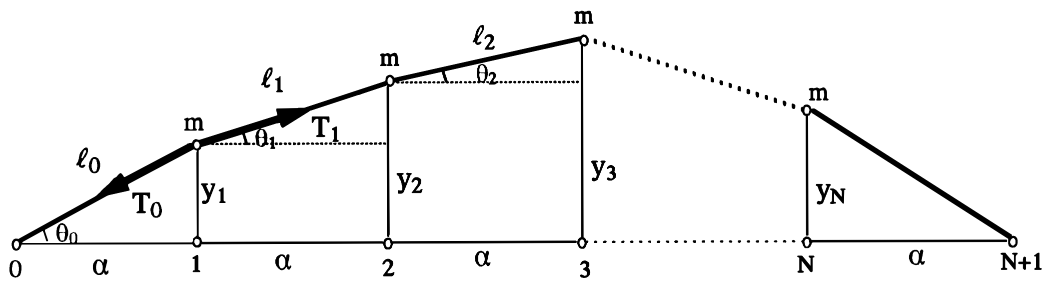
Από τη χαρακτηριστική εξίσωση λαμβάνουμε Ν κυκλικές συχνότητες ω_1, ω_2, ..., ω_N και συνεπώς προκύπτουν Ν κανονικοί τρόποι (ή κανονικές μορφές) ταλάντωσης του συστήματος.

Για κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (δηλ. για κάθε τιμή της κυκλικής συχνότητος ω), οι λόγοι των πλατών A_2/A_1, A_3/A_1, ..., A_N/A_1 υπολογίζεται από το σύστημα (3).

Αν <u>το πλήθος</u> N των κινούμενων μερών του συστήματος είναι πολύ μεγάλο (δηλ. $N \to \infty$) και <u>η απόστασή τους</u> γίνεται πολύ μικρή, μπορούμε να φανταστούμε ότι η κίνηση γειτονικών μερών δεν διαφέρει πολύ μεταξύ τους. Σ' αυτή τη περίπτωση λέμε ότι το σύστημα συμπεριφέρεται σαν ένα <u>συνεχές</u>. Τότε η μετατόπιση των κινουμένων μερών του συστήματος στη γειτονιά του σημείου (x,y,z) μπορεί να περιγραφεί από μια <u>συνεχή συνάρτηση</u> ψ(x,y,z,t) (η οποία καλείται κυματοσυνάρτηση), η οποία αντικαθιστά τις συντεταγμένες $\psi_1(t),\psi_2(t),\ldots,\ \psi_N(t)$. Αυτή η νέα περιγραφή ορίζει την έννοια του <u>κύματος</u>.

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης σε ένα συνεχές μέσον ονομάζονται <u>στάσιμο κύμα</u>.

Παράδειγμα 1: Ταλαντώσεις σωματιδίων πάνω σε χορδή



Θεωρούμε μιά αβαρή χορδή μήκους (N+1)α, στην οποία εφαρμόζεται τάση T και N ίσες μάζες m, τοποθετημένες κατά μήκος της χορδής ανά διαστήματα α. Τα τμήματα της χορδής που συνδέουν τις σημειακές μάζες παίζουν τον ρόλο ελατηρίων

α) <u>Εγκάρσιες ταλαντώσεις</u>:

Θεωρούμε τα ακραία σωματίδια πακτωμένα, δηλ. $y_0=y_{N+1}=0$.

Οι y-συνιστώσες των δυνάμεων που εξασκούνται πάνω στα σώματα:

$$
\begin{aligned}
F_{1y} &= -T_o \sin\theta_o + T_1 \sin\theta_1 \\
&= -k(\ell_o - a_o)\sin\theta_o + k(\ell_1 - a_o)\sin\theta_1 \\
&= -k(\ell_o - a_o)\frac{y_1 - y_o}{\ell_o} + k(\ell_1 - a_o)\frac{y_2 - y_1}{\ell_1} \\
&= -k(1 - \frac{a_o}{\ell_o})(y_1 - y_o) + k(1 - \frac{a_o}{\ell_1})(y_2 - y_1) \\
&\cong -k(2y_1 - y_2 - y_o)
\end{aligned}
$$

όπου T=kα, $T_0=T_1=\ldots=T$

Ομοίως υπολογίζουμε,

$$F_{2y} \cong -k(2y_2 - y_3 - y_1)$$
$$F_{3y} \cong -k(2y_3 - y_4 - y_2)$$
....
$$F_{Ny} \cong -k(2y_N - y_{N+1} - y_{N-1})$$

όπου $y_0=y_{N+1}=0$. Οι **εξισώσεις κίνησης γράφονται,**

μάζα 1: $$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{T}{\alpha}(2y_1 - y_2)$$

μάζα 2: $$m\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\frac{T}{\alpha}(2y_2 - y_3 - y_1)$$

μάζα 3: $$m\frac{d^2y_3}{dt^2} = -\frac{T}{\alpha}(2y_3 - y_4 - y_2)$$

. . . .

μάζα N: $$m\frac{d^2y_N}{dt^2} = -\frac{T}{\alpha}(2y_N - y_{N-1})$$

(τα σημεία 0 και (N+1)α είναι πακτωμένα, δηλ. $y_0=0$ και $y_{N+1}=0$)

Κατά τα γνωστά, εφόσον αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi), \\ \psi_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_N &= A_N \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \qquad (2)$$

αντικαθιστώντας στο προηγούμενο σύστημα των δ.ε. λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} &(2\omega_o^2 - \omega^2)A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0, \\ &\quad -\omega_o^2 A_1 + (2\omega_o^2 - \omega^2)A_2 - \omega_o^2 A_3 = 0, \\ &\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad\quad\quad -\omega_o^2 A_{N-1} + (2\omega_o^2 - \omega^2)A_N = 0, \end{aligned}$$

όπου $\omega_o^2 = T/m\alpha$

Για **N=1,** βρίσκουμε βέβαια μιά μόνο κανονική μορφή, $\omega^2 = 2\omega_o^2$,

Για **N=2**, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι,

$$(2\omega_o^2 - \omega^2)A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0$$

η οποία δέχεται 2 κανονικές μορφές (τις έχομε βρει άλλωστε):

$$\omega^2 = \omega_o^2 \quad \text{και} \quad A_2/A_1 = 1$$
$$\omega^2 = 3\omega_o^2 \quad \text{και} \quad A_2/A_1 = -1$$

Για **N=3**, η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται τώρα

$$\begin{vmatrix} (2\omega_o^2 - \omega^2) & -\omega_o^2 & 0 \\ -\omega_o^2 & (2\omega_o^2 - \omega^2) & -\omega_o^2 A_3 \\ 0 & -\omega_o^2 & (2\omega_o^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Η ορίζουσα αναπτύσσεται στη μορφή:

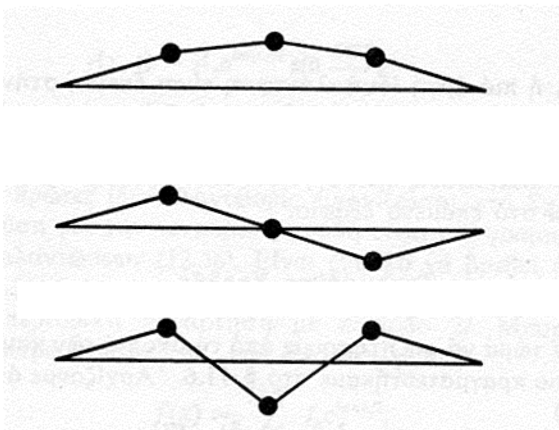
$$(2\omega_o^2 - \omega^2)^3 - 2\omega_o^4(2\omega_o^2 - \omega^2) = 0$$

και της οποίας οι ρίζες είναι: $\omega^2 = \omega_o^2$ και $\omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega_o^2$. Προκύπτουν συνεπώς 3 κανονικές μορφές ταλάντωσης:

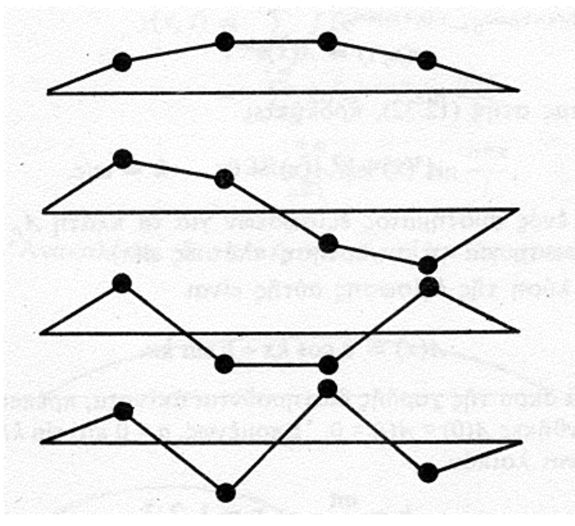
$$\omega^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_o^2 \quad \text{και } A_3/A_2/A_1 = 1/\sqrt{2}/1$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 \quad \text{και } A_3/A_2/A_1 = -1/0/1$$

$$\omega^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_o^2 \quad \text{και } A_3/A_2/A_1 = 1/-\sqrt{2}/1$$



Η πραγμάτευση είναι παρόμοια και για μεγαλύτερες τιμές του Ν. Για παράδειγμα για **Ν=4** βρίσκουμε (η απόδειξη επαφίεται ως άσκηση)



Συμπεράσματα:

Από τις παραπάνω απεικονίσεις των διαφόρων μορφών ταλάντωσης διαπιστώνομε ότι

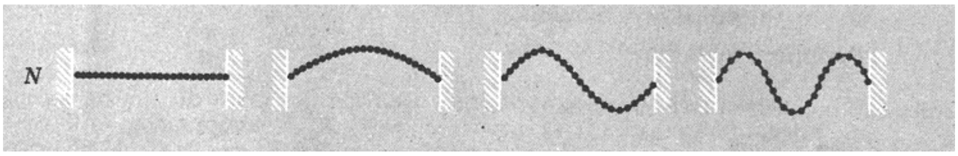
α) για κάθε N, η συχνότητα ταλάντωσης είναι μικρώτερη όταν τα γειτονικά σωματίδια ταλαντούνται προς την ίδια διεύθυνση παρά όταν κινούνται σε αντίθετες διευθύσεις,

β) ο 1ος τρόπος ταλάντωσης δεν περιέχει "δεσμούς" (δεσμοί είναι τα σημεία τη χορδής που παραμένουν ακίνητα, εκτός βέβαια από τα σημεία εξάρτησης),

γ) ο 2ος τρόπος ταλάντωσης περιέχει ένα μόνο "δεσμό",

δ) ο 3ος τρόπος ταλάντωσης περιέχει δύο "δεσμούς", κλπ.

δηλ. έχουμε την ακόλουθο ακολουθία διεγέρσεων της χορδής για N>>1



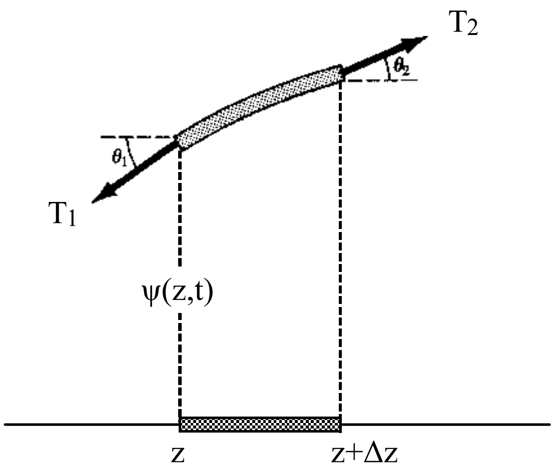
δηλ. η μετατόπιση των γειτονικών σωματιδίων διεφέρει ελάχιστα μεταξύ τους (τουλάχιστον στους χαμηλώτερους τρόπους ταλάντωσης).

Μπορούμε λοιπόν να αναζητήσουμε μιά συνάρτηση ψ(x,y,z,t) η οποία να περιγράφει τη στιγμιαία μετατόπιση όλων των σωματιδίων της χορδής [όπου (x,y,z) είναι οι συντεταγμένες σημείου της χορδής στη κατάσταση ισορροπίας], χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε το σύνολο των μετατοπίσεων y_1, y_2, y_3, ..., y_N ενός εκάστου των σωματιδίων (που είναι αδύνατο να το γνωρίζουμε για $N\rightarrow\infty$).

Γραμμικά πολωμένες ταλαντώσεις: όταν τα σωματίδια κινούνται πάντοτε παράλληλα προς τον ίδιο άξονα

Εγκάρσιες ταλαντώσεις:

Θεωρούμε ένα μικρό τμήμα της χορδής που έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του



Οι x-συνιστώσες των δυνάμεων που εξασκούνται πάνω στα τμήμα:

$$F_x = - T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = T(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

επειδή θ<<1, ισχύει $\sin\theta \approx \tan\theta$, και $\tan\theta = \frac{d\psi}{dz}$, άρα

$$Fx \cong T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) = T\left(\frac{d\psi(z+\Delta z)}{dz} - \frac{d\psi(z)}{dz}\right)$$

$$= T\frac{d}{dz}\left(\psi(z+\Delta z) - \psi(z)\right)$$

Η εξίσωση κίνησης του τμήματος της χορδής (κατά τον κατακόρυφο άξονα) θα είναι:

$$(\mu\Delta z)\frac{d^2\psi}{dz^2} = T\frac{d}{dz}\left(\psi(z+\Delta z) - \psi(z)\right)$$

όπου **(μΔz)** είναι η μάζα του τμήματος της χορδής και **μ** καλείται γραμμική πυκνότης της χορδής (gr/cm), άρα

$$\mu\frac{d^2\psi}{dz^2} = T\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi(z+\Delta z) - \psi(z)}{\Delta z}\right)$$

Παίρνοντας το όριο για $\Delta z \to 0$,

$$\mu \frac{d^2\psi}{dt^2} = T \frac{d}{dz} \underset{\Delta z \to 0}{\text{Oρ}} \left(\frac{\psi(z+\Delta z) - \psi(z)}{\Delta z} \right)$$

άρα

$$\mu \frac{d^2\psi}{dt^2} = T \frac{d}{dz} \left(\frac{d\psi(z)}{dz} \right) = T \frac{d^2\psi(z)}{dz^2}$$

ή

$$\boxed{\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = \frac{\mu}{T} \frac{d^2\psi}{dt^2}}$$

η οποία καλείται <u>εξίσωση κύματος</u>. Η ποσότης **μ/T** έχει μονάδες (Kgr/m)/Nt=(Kgr/m)/(Kgr-m/sec^2)=(m/sec)$^{-2}$, δηλ. μονάδες ταχύτητος στο τετράγωνο, οπότε συμβολίζουμε $\upsilon^2 = T/\mu$ (η ταχύτης αυτή καλείται φασική ταχύτης). Οπότε η **εξίσωση κύματος** γράφεται,

$$\boxed{\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{d^2\psi}{dt^2}}$$

Στη περίπτωση χορδής για εγκάρσια κύματα βρίκαμε: $\upsilon = \sqrt{T/\mu}$. Η εξίσωση κύματος επιδέχεται ποικίλες κατηγορίες λύσεων.

α) στασιμά κύματα

Εστω ότι ενδιαφερόμαστε για κανονικές μορφές ταλάντωσης

$$\psi(z,t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi),$$

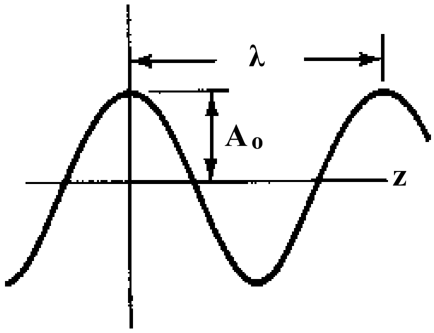
οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύματος λαμβάνουμε:

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = - \frac{\omega^2}{\upsilon^2} A(z)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης έχει τη μορφή,

$$A(z) = A_o \cos(\Omega z + \delta),$$

όπου $\Omega = \omega / \upsilon = \omega / \sqrt{T/\mu}$.



Η "**περίοδος**" ως προς τη μεταβλητή z λέγεται **μήκος κύματος λ**, δηλ. $\Omega = 2\pi/\lambda$, ή

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega/\upsilon} = \frac{2\pi\upsilon}{2\pi\nu} = \frac{\upsilon}{\nu}, \quad \text{επομένως} \quad \boxed{\lambda\nu = \upsilon}$$

Αυτή είναι χαρακτηριστική εξίσωση για όλα τα κύματα. Η σταθερά υ καλείται ταχύτης του κύματος. Οπότε το στάσιμο κύμα θα έχει τη μορφή:

$$\psi(z,t) = A_o \cos(\frac{2\pi}{\lambda} z + \delta)\cos(\omega t + \varphi),$$

Η ποσότης $k=2\pi/\lambda$ καλείται **κυματικός αριθμός** (μονάδες rad/m).

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών:

Εχουμε στα σημεία z=0 και z=L, $\psi(z,t)=0$

$$\text{στο } z=0 \quad \therefore \quad \cos(\frac{2\pi}{\lambda}0+\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta=\pi/2$$

$$\text{στο } z=L \quad \therefore \quad \sin(\frac{2\pi}{\lambda}L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{L} = \boldsymbol{\pi},\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi},\ \mathbf{3}\boldsymbol{\pi}, \ldots$$

άρα

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2L},\quad \mathbf{2L/2},\quad \mathbf{2L/3},\quad \mathbf{2L/4},\quad \mathbf{2L/5}, \ldots,\quad \mathbf{2L/n}$$

ή

$$\boldsymbol{\lambda_1 = 2L, \quad \lambda_2=\lambda_1/2, \quad \lambda_3=\lambda_1/3, \quad \lambda_4=\lambda_1/4, \ ...., \quad \lambda_n=\lambda_1/n}$$

και οι αντίστοιχες συχνότητες,

$$\nu_1 = \frac{\upsilon}{\lambda_1}, \quad \nu_2=2\nu_1, \quad \nu_3=3\nu_1, \quad \nu_4=4\nu_1, \ ...., \ \nu_n=n\nu_1$$

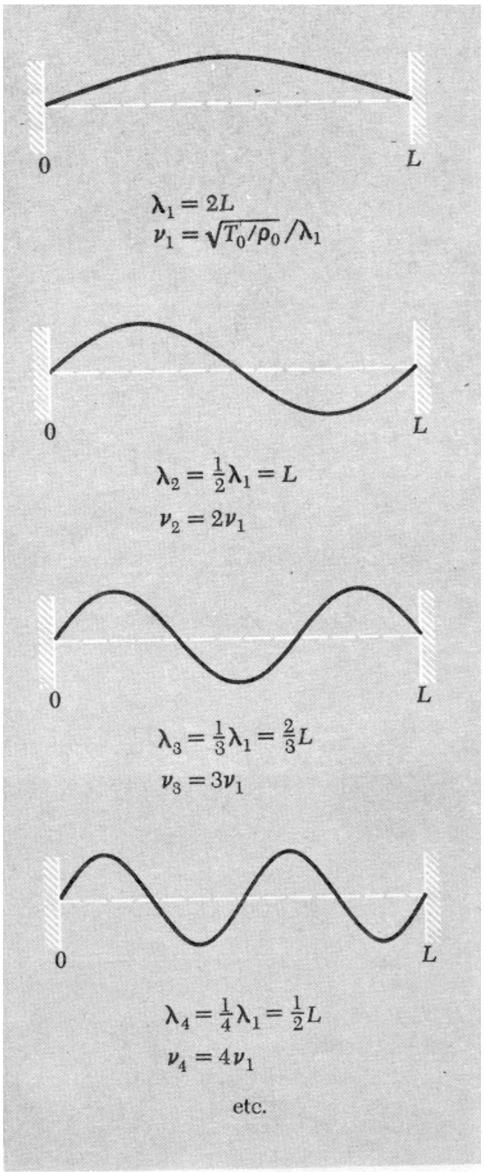
Η ακολουθία: ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, ..., ν_n, ορίζει την ακολουθία των αρμονικών του συστήματος, δηλ.

1η (ή θεμελιώδης) αρμονική, **2η** αρμονική, **3η** αρμονική, ...

Ομως αν θέλουμε γιά t=0 να μην υπάρχει διέργεση, ψ(z,0)=0, τότε θα πρέπει φ=π/2, οπότε το στάσιμο κύμα θα έχει τη μορφή:

$$\boxed{\psi(z,t) = A_o \sin(kz) \cos(\omega t),}$$

Στο επόμενο σχήμα φαίνονται διαδοχικά οι ταλαντώσεις 1ης αρμονικής, 2ας αρμονικής, 3ης αρμονικής , και 4ης αρμονικής, στις οποίες μπορεί να διεγερθεί η χορδή.


0
L
$\lambda_1 = 2L$
$\nu_1 = \sqrt{T_0/\rho_0}/\lambda_1$
0
L
$\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 = L$
$\nu_2 = 2\nu_1$
0
L
$\lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_1 = \frac{2}{3}L$
$\nu_3 = 3\nu_1$
0
L
$\lambda_4 = \frac{1}{4}\lambda_1 = \frac{1}{2}L$
$\nu_4 = 4\nu_1$
etc.