Κεφ. 2 (part 2, pages 12-21)

Σχέση διασποράς

Εχουμε βρεί την εξίσωση κύματος: $\lambda\nu = \upsilon$, όπου $\upsilon = \sqrt{T/\mu}$ στη περίπτωση της χορδής. Οπότε

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\sqrt{T/\mu}}{\lambda}$$

ή

$$\omega = \sqrt{T/\mu}\, k$$

Η σχέση αυτή που συνδέει την γωνιακή συχνότητα ω με τον κυματαριθμό k καλείται **σχέση διασποράς** για το ταλαντούμενο σύστημα. Για την περίπτωση της χορδής, η σχέση αυτή είναι γραμμική.

Εντοπισμένα κύματα: εκείνα για τα οποία ισχύει, ω/k = σταθερό.

Μη-εντοπισμένα (ή διασκορπισμένα) κύματα: είναι εκείνα για τα οποία ισχύει ω/k συνάρτηση του λ.

Παράδειγμα: Ν σωματίδια πάνω σε χορδή

Είχαμε βρει για εγκάρσια ταλάντωση,

$$-\omega_0^2 A_{n-1} + (2\omega_0^2 - \omega^2)A_n - \omega_0^2 A_{n+1} = 0, \qquad (1)$$

όπου $\omega_o^2 = \sqrt{T/ma}$ και $y_n(t)=A_n\cos(\omega t+\varphi)$.
Αν κάνουμε ένα παραλληλισμό με την λύση που βρίκαμε στη "συνεχή" χορδή, $A_n \rightarrow A(z)=A_o\sin(kz)$ όπου $z=na$, τα πλάτη στην (1) μπορούν να γραφούν,

$$A_{n-1} = A_o \sin\,[k(n-1)a],$$
$$A_n = A_o \sin\,[kna],$$
$$A_{n+1} = A_o \sin\,[k(n+1)a],$$

αντικαθιστώντας στην (1) έχομε,

$$-\,\omega_0^2 \sin(k(n-1)a) + (2\omega_0^2 - \omega^2)\sin(kna) - \omega_0^2 \sin(k(n+1)a) = 0$$

ή

$$-\,\omega_0^2\,[\sin(kna)\cos(ka) - \cos(kna)\sin(ka)] + (2\,\omega_0^2 - \omega^2)\,\sin(kna)$$
$$-\,\omega_0^2\,[\sin(kna)\cos(ka) + \cos(kna)\sin(ka)] = 0$$

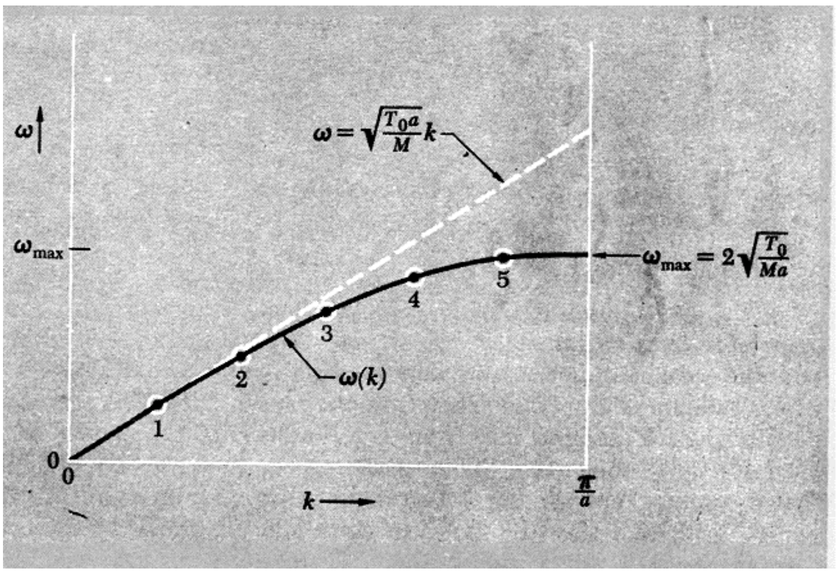
απ'όπου προκύπτει η σχέση διασποράς,

$$\omega^2 = 2\omega_0^2\,[1 - \cos(ka)] = 4\,\omega_0^2 \sin^2(\frac{ka}{2})$$

ή

$$\boxed{\omega = 2\omega_o \sin(\frac{ka}{2})}$$

όπου $\omega_o = \sqrt{T/ma}$. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η σχέση διασποράς, ω=f(k).



Ανάλυση Fourier

Είδαμε ότι η γενική κίνηση ενός συστήματος είναι υπέρθεση όλων των μορφών ταλάντωσής του, κατ' επέκταση και στη περίπτωση της χορδής με δεδομένες οριακές συνθήκες στα άκρα της (z=0, z=L), η κίνησή της θα δίδεται από τη σχέση

$$\psi(z,t) = \sum_n A_n \sin(k_n z)\cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

όπου οι κυματαριθμοί k_n ικανοποιούν κάποιες συνοριακές συνθήκες, ενώ οι γωνιακές συχνότητες ω_n ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις διασποράς, ενώ οι σταθερές (A_n,φ_n) υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος (στο χρόνο t=0).

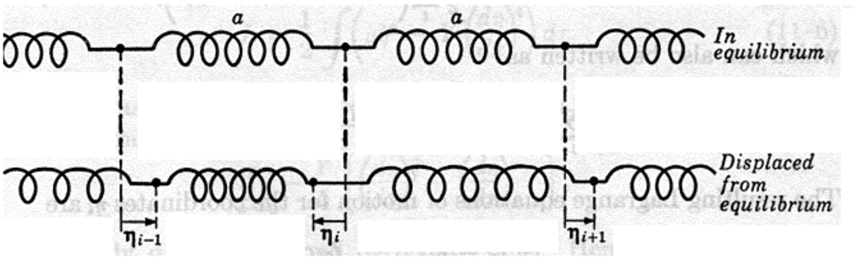
Θεώρημα: Αν f(z) είναι μιά συνάρτηση ως προς z, η οποία όμως πληροί ορισμένες **συνοριακές συνθήκες**, έστω στα σημεία z=0 και z=L. Τότε η συνάρτηση αυτή μπορεί να αναπτυχθεί σε μια σειρά τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής

$$f(z) = \sum_n [A_n \sin(k_n z) + B_n \cos(k_n z)]$$

Το ανάπτυγμα αυτό καλείται **σειρά Fourier**.

Διαμήκεις ταλαντώσεις σε αλυσίδα ταλαντωτών

Θεωρούμε N ίσες μάζες M συνδεδεμένες μεταξύ τους με (N+1) ελατήρια. Στη κατάσταση ισορροπίας οι μάζες ισαπέχουν μεταξύ τους απόσταση α. Θεωρούμε τις δύο άκρες της αλυσίδος πακτωμένες.



Η x-συνιστώσα της συνολικής δύναμης που ασκείται πάνω στη n-στή μάζα είναι:

$$\begin{aligned} F_{nx} &= -T_n + T_{n+1} = -k(\psi_n - \psi_{n-1}) + k(\psi_{n+1} - \psi_n) \\ &= -k(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1}) \end{aligned}$$

οπότε η εξίσωση κίνησης της n-στής μάζας γράφεται:

$$M\frac{d^2\psi}{dt^2} = -k(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1}) \qquad (1)$$

Για λύση κανονικής μορφής ταλάντωσης

$$\begin{gathered} \psi_1(z,t) = A_1(z)\cos(\omega t+\varphi), \\ \psi_2(z,t) = A_2(z)\cos(\omega t+\varphi), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \psi_n(z,t) = A_n(z)\cos(\omega t+\varphi) \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

προκύπτει αντικαθιστώντας στην (1)

$$-\omega^2 A_n = -\frac{k}{M}(2A_n - A_{n-1} - A_{n+1})$$

Αν καλέσουμε $\omega_o^2 = k/M$, αυτή γράφεται,

$$(2\omega_o^2 - \omega^2)A_n - \omega_o^2 A_{n-1} - \omega_o^2 A_{n+1} = 0 \qquad (2)$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι η (2) ισχύει για n=1,N, δηλ. πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα N εξισώσεων

$$(2\omega_o^2-\omega^2)A_1-\omega_o^2A_0-\omega_o^2A_2=0$$
$$(2\omega_o^2-\omega^2)A_2-\omega_o^2A_1-\omega_o^2A_3=0$$
....
$$(2\omega_o^2-\omega^2)A_n-\omega_o^2A_{n-1}-\omega_o^2A_{n+1}=0$$
....
$$(2\omega_o^2-\omega^2)A_N-\omega_o^2A_{N-1}-\omega_o^2A_{N+1}=0$$

όπου $A_o=A_{N+1}=0$. Το σύστημα αυτό επιλύεται κατά τα γνωστά και δίδει N ιδιοσυχνότητες $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_N$. Για καθεμιά ιδιοσυχνότητα ω_n, θα υπολογίσουμε τα πλάτη $A_{n1},A_{n2},..A_{n(N-1)}$. Λέμε ότι τα πλάτη αυτά ορίζουν ένα **ιδιοδυάνυσμα** $\vec{A}_n=(A_{n1},A_{n2},..A_{n(N-1)})$, το οποίον αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα ω_n.

Αν κάνουμε ένα παραλληλισμό με την λύση που βρίκαμε στη “συνεχή” χορδή (όπως κάναμε και στη περίπτωση των εγκαρσίων ταλαντώσεων)

$$A_n \rightarrow A(z)=A_o\sin(kz), \quad \text{όπου } z=na$$

δηλ.

$$A_{n-1}=A_o\sin k(n-1)a,$$
$$A_n=A_o\sin kna,$$
$$A_{n+1}=A_o\sin k(n+1)a,$$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχομε,

$$(2\omega_o^2-\omega^2)\sin(kna)-\omega_o^2\sin\big(k(n-1)\big)-\omega_o^2\sin\big(k(n+1)\big)=0$$

απ’ όπου προκύπτει η γνωστή μας σχέση διασποράς,

$$\omega = 2\omega_o \sin(\frac{ka}{2}),$$

όπου $\omega_o = \sqrt{T/ma}$. Η γενική λύση για διαμήκεις ταλαντώσεις θα είναι

$$\psi_n(z,t) = A_o \sin(kna) \cos(\omega t + \varphi), \quad n=1,N$$

Εφαρμόζοντας τις **συνοριακές συνθήκες**: **ψ=0** στο σημείο **z=Na=L**

δηλαδή, $\mathbf{\sin kL = 0}$

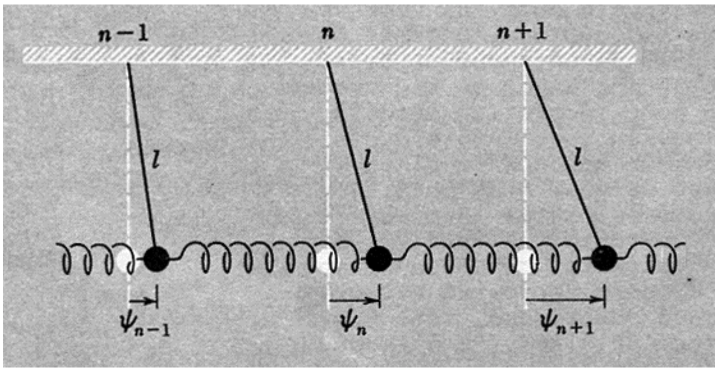
έπεται $\mathbf{kL = \pi, 2\pi, 3\pi, ..., N\pi}$

ή

$$k_1=\pi/L,$$
$$k_2=2\pi/L=2k_1,$$
$$k_3=3\pi/L=3k_1,$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .,$$
$$k_N=N\pi/L=Nk_1,$$

Παράδειγμα: Ν συζευγμένα μαθηματικά εκκρεμή

Θεωρούμε Ν μαθηματικά εκκρεμή, καθένα μήκους l, τα οποία συζεύγνυνται μεταξύ τους μέσω ελατηρίων σταθεράς k.



Υποθέτουμε ότι οι μετατοπίσεις είναι πολύ μικρές, ώστε η κίνηση των σωμάτων να περιορίζεται περίπου στον οριζόντιο άξονα (κατά συνέπεια να θεωρήσουμε μόνο διαμήκεις ταλαντώσεις στα ελατήρια).

Η (οριζοντία) δύναμη που δέχεται το σώμα n είναι (δέστε και το παράδειγμα του απλού εκκρεμούς)

$$F_n = - Mg \sin\theta_n - k(\psi_n-\psi_{n-1}) + k(\psi_{n+1}-\psi_n)$$

όπου $\sin\theta_n \cong \psi_n / \ell$. Συνεπώς η εξίσωση κίνησης της n-στής μάζας κατά τον εφαπτομενικό άξονα είναι

$$M\ell\frac{d^2\theta_n}{dt^2} = -Mg\frac{\psi_n}{\ell} - k(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})$$

όμως $\theta_n \approx \sin\theta_n \approx \psi_n/\ell$ (σε rads), άρα η εξίσωση γράφεται,

$$M\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -Mg\frac{\psi_n}{\ell} - k(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})$$

ή

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\psi_n - \frac{k}{M}(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})$$

ή

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\omega_o^2\psi_n - \omega_1^2(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1}) \qquad (1)$$

όπου $\omega_o^2 = g/\ell$ και $\omega_1^2 = k/M$.

Η διαφορική εξίσωση (1) είναι μεν γραμμική, αλλά είναι συζευγμένη με άλλες 2 διαφορικές εξισώσεις, δηλ. συνολικά έχουμε ένα σύστημα N διαφ. εξισώσεων.

Αναζητούμε λύσεις κανονικών τρόπων ταλάντωσης, της μορφής

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= A_1 \cos(\omega t+\varphi), \\ \psi_2(t) &= A_2 \cos(\omega t+\varphi), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_n(t) &= A_n \cos(\omega t+\varphi) \end{aligned} \qquad (2)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (1), λαμβάνουμε

$$-\omega^2 A_n = -\omega_o^2 A_n - \omega_1^2 (2A_n - A_{n-1} - A_{n+1})$$

ή

$$(\omega_o^2 + 2\omega_1^2 - \omega^2) A_n - \omega_1^2 A_{n-1} - \omega_1^2 A_{n+1} = 0 \qquad (3)$$

που ισχύει για n=1,N, άρα προκύπτει το γραμμικό σύστημα N εξισώσεων

$$\begin{aligned} &(\omega_o^2 + 2\omega_1^2 - \omega^2) A_1 - \omega_1^2 A_0 - \omega_1^2 A_2 = 0 \\ &(\omega_o^2 + 2\omega_1^2 - \omega^2) A_2 - \omega_1^2 A_1 - \omega_1^2 A_3 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(\omega_o^2 + 2\omega_1^2 - \omega^2) A_n - \omega_1^2 A_{n-1} - \omega_1^2 A_{n+1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (4)$$

(όπου $A_o=0$). Κατά τα γνωστά, για μη μηδενικές λύσεις (A_1, A_2, A_3,..., A_N), θα πρέπει η ορίζουσα (διαστάσεων N×N) να ισούται με μηδέν,

$$\begin{vmatrix} (\omega_o^2+2\omega_1^2-\omega^2) & -\omega_1^2 & 0 & 0 & \ldots \\ -\omega_1^2 & (\omega_o^2+2\omega_1^2-\omega^2) & -\omega_1^2 & 0 & \ldots \\ 0 & -\omega_1^2 & (\omega_o^2+2\omega_1^2-\omega^2) & -\omega_1^2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

Από το ανάπτυγμα της ορίζουσας υπολογίζονται N ρίζες για το ω^2 και για κάθε ρίζα ω_i, οι (4) θα μας δόσουν τα πλάτη (A_1, A_2,.. A_{N-1}).

Αν κάνουμε ένα παραλληλισμό με την λύση που βρίκαμε στη “συνεχή” χορδή (όπως κάναμε και στη περίπτωση των εγκαρσίων ταλαντώσεων). Αντιστοιχούμε δηλ. στη διάκριτη μεταβλητή A_n την συνεχή μεταβλητή A(z), όπου z=na, που βρίκαμε στη περίπτωση της χορδής, δηλ. $A(z)=A_o\sin(kz)$, οπότε έχουμε τις αντιστοιχίες,

$$A_{n-1} = A_o \sin k(n-1)a,$$
$$A_n = A_o \sin kna,$$
$$A_{n+1} = A_o \sin k(n+1)a,$$

Αντικαθιστώντας στην (4) προκύπτει,

$$(\omega_o^2+2\omega_1^2-\omega^2)\sin(kna)-\omega_1^2\sin\big(k(n-1)a\big)-\omega_1^2\sin\big(k(n+1)a\big)=0$$

απ’ όπου προκύπτει η σχέση διασποράς,

$$\boxed{\omega^2=\omega_o^2+\omega_1^2\sin^2(\frac{ka}{2})}$$

όπου $\omega_o^2=g/\ell$ και $\omega_1^2=k/M$.

Στη επόμενο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της σχέσης διασποράς $\omega = f(k)$ για συζευγμένα εκκρεμή για διαμήκεις ταλαντώσεις