Κεφ. 3 ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Θα εξετάσουμε τη περίπτωση εφαρμογής σ' ένα σύστημα μιάς δεδομένης εξωτερικής δύναμης η οποία να εξαρτάται από το χρόνο (δηλ. **το σύστημα υποβάλλεται σε εξωτερική διέγερση**).

1η περίπτωση: Απόσβεση ελεύθερης ταλάντωσης χωρίς εξωτερική δύναμη (διέργερση).

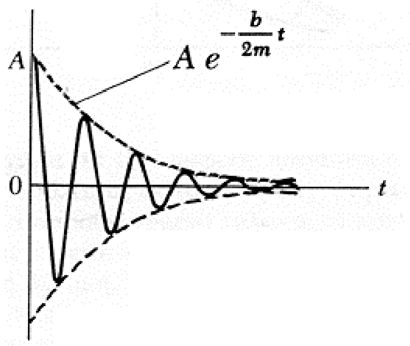
Εξίσωση κίνησης:

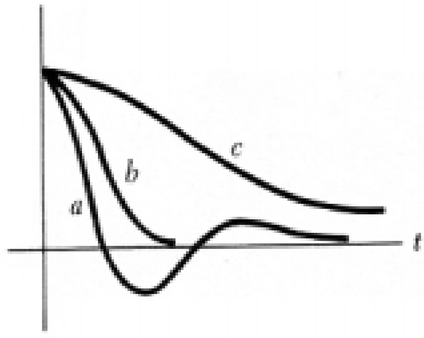
περίπτωση απλού εκκρεμούς
$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\psi - \frac{b}{M}\upsilon$$

γενικότερα
$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega_o^2\psi - \Gamma\upsilon \qquad (1)$$

Εχομε βρει τη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1) σε άσκηση

$$\psi = A_o e^{-\Gamma t/2}\cos(\omega t + \delta), \quad \text{όπου} \quad \omega = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$





2η περίπτωση: Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Θεωρούμε αρμονική εξωτερική διέργερση της μορφής: $F(t)=F_o \cos \omega t$

Τότε η εξίσωση κίνησης της ταλάντωσης με απόσβεση γράφεται

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_o^2 x+\Gamma\frac{dx}{dt}=\frac{F_o}{M}\cos(\omega t) \qquad (2)$$

Η γενική λύση της μη-ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2) είναι η επαλληλία (δηλ. το άθροισμα) των λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1) συν μιάς μερικής λύσης της (2).

Εχουμε ήδη βρει τη λύση της ομογενούς (1):

$$\psi = A_o e^{-\Gamma t/2}\cos(\omega t+\delta), \quad \text{όπου} \quad \omega=\sqrt{\omega_o^2-\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Η λύση αυτή (καλείται και **μεταβατική λύση**), διότι τείνει στο μηδέν για χρόνο t πολύ μεγαλύτερο της σταθεράς απόσβεσης του συστήματος, $\tau=2/\Gamma$. Οντως ο εκθετικός παράγοντας ($e^{-\Gamma t/2}$) μηδενίζει (σχεδόν) τη παράσταση για $t \geq 5\tau$.

Απομένει λοιπόν να βρούμε μια μερική λύση της (2) (η οποία καλείται και **μόνιμη λύση**).

Δοκιμάζουμε μιά **μερική λύση** της μορφής:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad ή \quad x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει:

$$-\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + \omega_o^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$
$$+\omega\Gamma(A\cos\omega t - B\sin\omega t) = \frac{F_o}{M}\cos\omega t$$

Ανάγουμε τους συντελεστές των συναρτήσεων sin(ωt) και cos(ωt):

$$\left(-\omega^2 A + \omega_o^2 A - \omega\Gamma B\right)\sin\omega t$$
$$+\left(-\omega^2 B + \omega_o^2 B + \omega\Gamma A - \frac{F_o}{M}\right)\cos\omega t = 0$$

Επειδή οι συναρτήσεις sin(ωt) και cos(ωt) είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, θα πρέπει οι συντελεστές τους να μηδενίζονται,

$$(\omega_o^2 - \omega^2)A - \omega\Gamma B = 0$$
$$(\omega_o^2 - \omega^2)B + \omega\Gamma A - \frac{F_o}{M} = 0$$

απ’ όπου έπεται

$$A = \frac{F_o}{M} \frac{\omega\Gamma}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega\Gamma)^2}$$

$$B = \frac{F_o}{M} \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega\Gamma)^2}$$

Συνεπώς η μόνιμη λύση θα είναι:

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (3)$$

Τα πλάτη έχουν υπολογιστεί παραπάνω και αναφέρονται ως: A: πλάτος απορρόφησης και B: ελαστικό πλάτος

Η προηγούμενη λύση μπορεί να τεθεί και σε διαφορετική μορφή, ως ακολούθως:

$$x = A\sin\omega t + B\cos\omega t = B(\cos\omega t + \frac{A}{B}\sin\omega t) =$$

$$[\text{καλώ } \frac{A}{B} = -\tan\delta] \; = B(\cos\omega t - \tan\delta\sin\omega t)$$

$$= B(\cos\omega t - \frac{\sin\delta}{\cos\delta}\sin\omega t) = \frac{B}{\cos\delta}\cos(\omega t + \delta) = Z\cos(\omega t + \delta)$$

όπου

$$Z = \frac{B}{\cos\delta} = \frac{B}{\sqrt{1+\tan^2\delta}} = \frac{B}{\sqrt{1+(-A/B)^2}} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

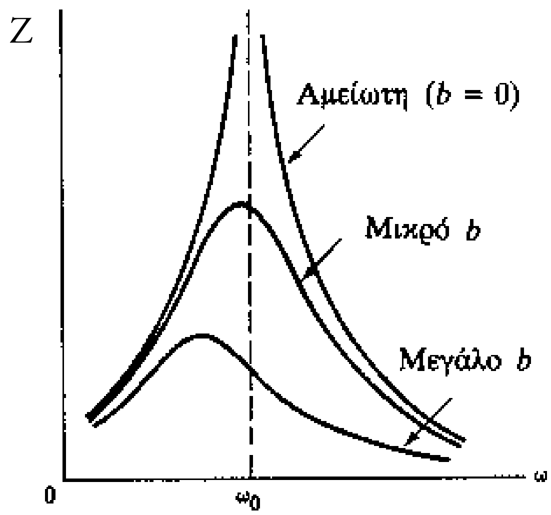
$$= \frac{F_o}{M} \frac{1}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (\omega\Gamma)^2}}$$

και $$\tan\delta = -\frac{A}{B} = -\frac{\omega\Gamma}{\omega 2 - \omega_o^2}$$

Συνεπώς η λύση (3) μπορεί να γραφεί και υπό τη μορφή:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad (4)$$

όπου οι σταθερές (Z,δ) έχουν υπολογιστεί παραπάνω. Η εξάρτηση του πλάτους Z από την συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Παρατηρούμε ότι το πλάτος γίνεται μέγιστο όταν $\omega = \omega_o$. (η σταθερά απόσβεσης συμβολίζεται με b αντί Γ).



Απορροφούμενη ισχύς από τον ταλαντωτή είναι:

$$P(t) = F(t)\,\upsilon(t) = F_o\cos\omega t\,(\omega A\cos\omega t - B\omega\sin\omega t)$$

άρα η **μέση απορροφούμενη ισχύς** μέσα σε μια περίοδο ταλάντωσης T είναι

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T F_o \cos\omega t\,(\omega A\cos\omega t - B\omega\sin\omega t)dt$$

$$= \frac{F_o\omega A}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\,dt - \frac{F_o\omega B}{T}\int_0^T \cos\omega t\ \sin\omega t\,dt$$

Τα ολοκληρώματα ισούται προς,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\,dt = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t\ \sin\omega t\,dt = 0$$

οπότε η μέση ισχύς γίνεται

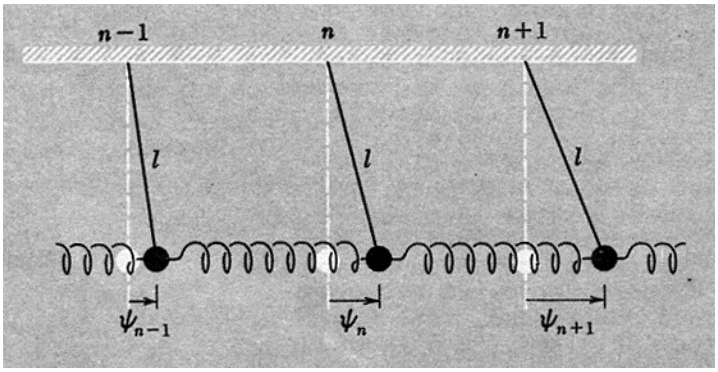
$$\overline{P} = \frac{1}{2}F_o\omega A = \frac{F_o}{2M}\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\omega\Gamma)^2} = P_o\frac{(\omega\Gamma)^2}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(\omega\Gamma)^2}$$

όπου $P_o=F_o/(2M\Gamma)$. Αυτή είναι η **μέση ισχύς εισόδου**, δηλ. τόση ισχύ παρέχει ο εξωτερικός διεγέρτης στο σύστημα.

Η μεγίστη απορροφούμενη ισχύς λαμβάνεται όταν $\omega=\omega_o$, όπως φαίνεται και από το προηγούμενο σχήμα. Λέμε τότε ότι το σύστημα **συντονίζεται** στην εξωτερική διέγερση.

Παράδειγμα: Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις σε σύστημα Ν συζευγμένων μαθηματικών εκκρεμών

Θεωρούμε Ν μαθηματικά εκκρεμή, καθένα μήκους l, τα οποία συζεύγνυνται μεταξύ τους μέσω ελατηρίων σταθεράς k και τα οποία υπόκεινται στην επίδραση μιάς διεγείρουσας εξωτερικής δύναμης με αυθαίρετη συχνότητα ω. Υποθέτουμε ότι υπάρχει απόσβεση.



Η εξίσωση κίνησης της n-στής μάζας (έχουμε βρει)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega_o^2\psi_n - \omega_1^2(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1}) \qquad (1)$$

όπου $\omega_o^2 = g/\ell$ και $\omega_1^2 = k/M$.

Στη **συνεχή** πρόσεγγιση, παρατηρούμε ότι:

$$\psi_n(t) \to \psi(z,t), \quad \text{όπου } z=na$$

οπότε

$$\psi_{n-1}(t) \to \psi(z-a,t) = \psi(z,t) - \frac{d\psi(z,t)}{dt}\frac{a}{1!} + \frac{d^2\psi(z,t)}{dt^2}\frac{a^2}{2!} - \ldots$$

$$\psi_{n+1}(t) \to \psi(z+a,t) = \psi(z,t) + \frac{d\psi(z,t)}{dt}\frac{a}{1!} + \frac{d^2\psi(z,t)}{dt^2}\frac{a^2}{2!} + \ldots$$

οπότε η παρένθεση στην (1) γράφεται:

$$(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1}) = -\frac{d^2\psi(z,t)}{dt^2}a^2$$

συνεπώς η (1) γράφεται:

$$\frac{d^2\psi(z,t)}{dt^2} = -\omega_o^2\psi_n - \omega_1^2 a^2 \frac{d^2\psi(z,t)}{dt^2} \qquad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι γνωστή σαν **κυματική εξίσωση Klein-Gordon**.

Υποθέτουμε ότι όλα τα σωματίδια διεγείρονται στην ίδια ταλάντωση με συχνότητα ω, δηλ.

$\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t+\varphi)$

οπότε

$$\frac{d^2\psi(z,t)}{dt^2} = -\,\omega^2 A(z)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\frac{d^2\psi(z,t)}{dz^2} = \frac{d^2A(z)}{dz^2}\cos(\omega t+\varphi)$$

αντικατάσταση στη (2)

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{a^2\omega_1^2} A(z) \qquad (3)$$

Επίλυση της (3):

1) Για $(\omega_o^2 - \omega^2) < 0$, η (3) παριστάνει κυματική ταλάντωση, καθόσον η (3) γράφεται,

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = -k^2 A(z), \quad k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_o^2)}{a^2\omega_1^2} > 0$$

Η λύση της είναι: $A(z) = A\sin kz + B\cos kz$

συνεπώς η γενική λύση είναι:

$$\psi(z,t) = (A \ \sin kz + B \ \cos kz) \cos(\omega t + \varphi)$$

2) Για $(\omega_o^2 - \omega^2) > 0$, η (3) παριστάνει ένα εκθετικό κύμα, καθόσον η (3) γράφεται,

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = \kappa^2 A(z), \quad \text{όπου } \kappa^2 = \frac{(\omega_o^2 - \omega^2)}{a^2\omega_1^2} > 0$$

Η λύση της είναι: $A(z) = Ae^{-\kappa z} + Be^{+\kappa z}$

συνεπώς η γενική λύση είναι:

$$\psi(z,t) = (A \ e^{-\kappa z} + B \ e^{+\kappa z}) \cos(\omega t + \varphi) .$$