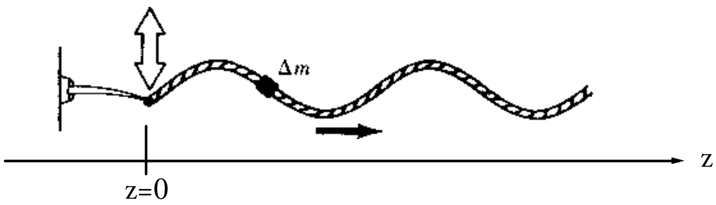
Κεφ. 4 ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ (pages 1-17)
(Traveling Waves)

Εξετάσουμε **ανοικτά συστήματα**, δηλ. συστήματα χωρίς σύνορα.

Οδεύοντα κύματα είναι **διαταραχές** (που μεταφέρουν ενέργεια και ορμή) που διαδίδονται στον ανοικτό χώρο με ορισμένη ταχύτητα διάδοσης.

Αρμονικά οδεύοντα κύματα σε χορδή



Εστω πηγή στο σημείο z=0 που παράγει μιά αρμονική ταλάντωση: $A\cos(\omega t)$

Μια διαταραχή που παράγεται στο σημείο z=0 στη χρονική στιγμή t=0, θα φθάσει στο σημείο z στο χρόνο $(t-\frac{z}{\upsilon})$, όπου υ καλείται **φασική ταχύτης** του κύματος

άρα στη περίπτωση αρμονικής ταλάντωσης που θεωρούμε, το **οδεύον κύμα** θα έχει τη μορφή στο z

$$\psi(z,t) = A\cos(t-\frac{z}{\upsilon})$$

όμως

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\upsilon/\nu} = \frac{2\pi\nu}{\upsilon} = \frac{\omega}{\upsilon}$$

άρα

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t - kz)$$

Η ποσότης $\varphi = (\omega t - kz)$ καλείται **φάση** του κύματος (η αρχική φάση φ_o έχει ληφθεί ίση με μηδέν)

Σχέσεις διασποράς

Δεν περιμένουμε να βρούμε διαφορετικούς νόμους διασποράς από αυτούς που βρήκαμε για τα στάσιμα κύματα σε χορδές.

Θεωρούμε το παράδειγμα μιάς άπειρης γραμμικής διάταξης συζευμένων μαθηματικών εκκρεμών, η οποία διεγείρεται από μιά πηγή στο σημείο z=0 με διαταραχή της μορφής $A\cos(\omega t)$.

Εχουμε βρει την εξίσωση κίνησης του n-στού εκκρεμούς στο παράδειγμα της αλυσίδας N απλών εκκρεμών

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\omega_o^2\psi_n - \omega_1^2(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})$$

όπου $\omega_o^2 = g/l$ και $\omega_1^2 = k/M$.

Υποθέτουμε ότι το οδεύον κύμα που φθάνει στο n-στό εκκρεμές έχει τη μορφή

$$\psi_n = A\cos(\omega t - kz), \quad z=na$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης παίρνουμε,

$$(\omega_o^2 - \omega^2)\cos(\omega t - kna) =$$

$$-\omega_1^2[2\cos(\omega t - kna) - \cos(\omega t - kna + ka) - \cos(\omega t - kna - ka)]$$

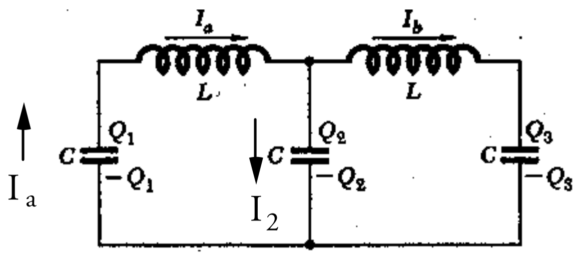
ή

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 4\omega_1^2 \sin^2(\frac{ka}{2})$$

που είναι ο ίδιος **νόμος διασποράς** με εκείνο των συζευμένων εκκρεμών. Και άλλα παραδείγματα αν θεωρήσουμε, πάλι ο νόμος διασποράς δεν προκύπτει διαφορετικός.

Δύο συζευγμένα LC κυκλώματα (§1.4 Παράδειγμα 10)

Υποθέτουμε ότι αρχικά (t=0) έχει φορτιστεί ο 1ος πυκνωτής από τα αριστερά με φορτίο Q_{01}. Στη συνέχεια αποκαθίσταται το κύκλωμα του σχήματος και έχουμε τα ρεύματα που έχουν σχεδιαστεί (δηλ. εκφορτίζεται ο 1ος πυκνωτής και φορτίζονται οι υπόλοιποι).



Εφαρμογή 2ου κανόνα Kirchhoff (εξισώσεις κίνησης)

$$L\frac{dI_a}{dt}+\frac{Q_2}{C}-\frac{Q_1}{C}=0$$
$$L\frac{dI_b}{dt}+\frac{Q_3}{C}-\frac{Q_2}{C}=0 \qquad (1)$$

Παραγωγίζοντας ως προς t τις (1),

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2}+\frac{1}{C}\frac{dQ_2}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ_1}{dt}=0$$
$$L\frac{d^2I_b}{dt^2}+\frac{1}{C}\frac{dQ_3}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ_2}{dt}=0 \qquad (2)$$

Ομως βλέπουμε από το κύκλωμα ότι: $I_a=-dQ_1/dt$ (διότι εκφορτίζεται ο 1ος πυκνωτής), $I_2=dQ_2/dt$, $I_b=dQ_3/dt$, και εφαρμόζοντας τον 1ο κανόνα του Kirchhoff στον ένα από τους δύο κόμβους των κυκλωμάτων: $I_a=I_2+I_b$ ή $I_2=I_a-I_b$, συνεπώς

$$L\frac{d^2I_a}{dt^2}=-\frac{I_a-I_b}{C}-\frac{I_a}{C}$$
$$L\frac{d^2I_b}{dt^2}=-\frac{I_b}{C}+\frac{I_a-I_b}{C} \qquad (3)$$

Η (3) γράφεται

$$\frac{d^2I_a}{dt^2}=-\frac{2I_a}{LC}+\frac{I_b}{LC}$$
$$\frac{d^2I_b}{dt^2}=\frac{I_a}{LC}-\frac{2I_b}{LC}$$

ή κομψότερα

$$\frac{d^2 I_a}{dt^2} = -2\omega_o^2 I_a + \omega_o^2 I_b$$
$$\frac{d^2 I_b}{dt^2} = +\omega_o^2 I_a - 2\omega_o^2 I_b \qquad (4)$$

όπου $\omega_o^2 = 1/LC$. Η επίλυση του συστήματος μας είναι . γνώριμη. Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) προκύπτει

$$\frac{d^2}{dt^2}(I_a + I_b) = -\omega_o^2 (I_a + I_b)$$

η οποία παριστά ταλάντωση με λύση της μορφής

(τρόπος 1) $(I_a+I_b) = A\cos(\omega_o t+\varphi)$ (5α)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (4) προκύπτει

$$\frac{d^2}{dt^2}(I_a - I_b) = -3\omega_o^2 (I_a - I_b)$$

που και αυτή παριστά ταλάντωση με λύση της μορφής

(τρόπος 2) $(I_a-I_b) = B\cos(\omega_1 t+\delta)$ (5β)

όπου $\omega_1=\sqrt{3}\,\omega_o$. Οι σχέσεις (5) δίδουν

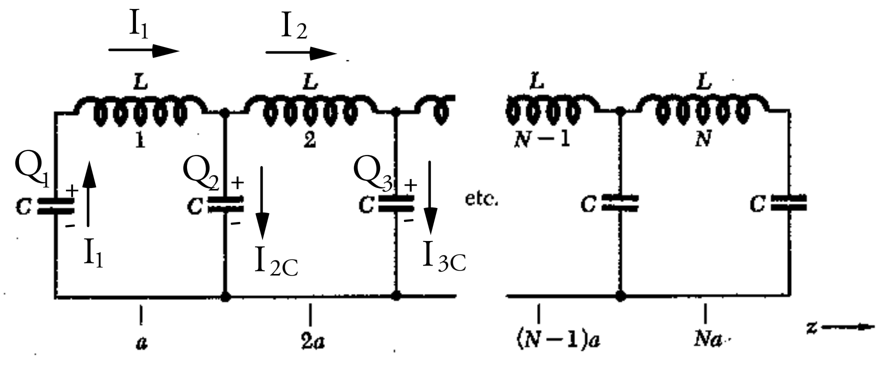
$$I_a = ½A\cos(\omega_o t+\varphi) + ½B\cos(\omega_1 t+\delta)$$
$$I_b = ½A\cos(\omega_o t+\varphi) - ½B\cos(\omega_1 t+\delta)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

τρόπος 1: $I_a=I_b$ ή $Q_1=-Q_3$ και $Q_2=0$,
τρόπος 2: $I_a=-I_b$ και $I_2=2I_a$ ή $Q_1=Q_3$ και $Q_2=-2Q_1$.

N συζευγμένα LC κυκλώματα (§2.4 Παράδειγμα 4)

Θεωρούμε μιά ακολουθία N συγευγμένων LC κυκλωμάτων. Υποθέτουμε ότι αρχικά (t=0) έχει φορτιστεί ο 1ος πυκνωτής από τα αριστερά με φορτίο Q_{01}. Στη συνέχεια αποκαθίσταται το κύκλωμα του σχήματος και έχουμε τα ρεύματα που έχουν σχεδιαστεί (δηλ. εκφορτίζεται ο 1ος πυκνωτής και φορτίζονται οι υπόλοιποι).



Εφαρμογή 2ου κανόνα Kirchhoff (εξισώσεις κίνησης)

$$
\begin{aligned}
L\frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_1}{C} &= 0\\
L\frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_3}{C} - \frac{Q_2}{C} &= 0\\
&\cdots\\
L\frac{dI_n}{dt} + \frac{Q_{n+1}}{C} - \frac{Q_n}{C} &= 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Παραγωγίζοντας ως προς t τις (1),

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2}+\frac{1}{C}\frac{dQ_2}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ_1}{dt}=0$$
$$L\frac{d^2I_2}{dt^2}+\frac{1}{C}\frac{dQ_3}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ_2}{dt}=0 \qquad (2)$$
$$\cdots$$
$$L\frac{d^2I_n}{dt^2}+\frac{1}{C}\frac{dQ_{n+1}}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dQ_n}{dt}=$$

Ομως βλέπουμε από το κύκλωμα ότι: $I_1=-dQ_1/dt$ (διότι εκφορτίζεται ο 1ος πυκνωτής), $I_{2c}=dQ_2/dt$, $I_{3c}=dQ_3/dt$, και εφαρμόζοντας τον 1ο κανόνα του Kirchhoff στον πρώτο κόμβο του κυκλώματος: $I_1=I_{2c}+I_2$ ή $I_{2c}=I_1-I_2$. Παρομοίως, $I_{3c}=I_2-I_3$, ... κλπ. Συνεπώς,

$$L\frac{d^2I_1}{dt^2}=-\frac{I_1-I_2}{C}-\frac{I_1}{C}$$
$$L\frac{d^2I_2}{dt^2}=-\frac{I_2-I_3}{C}+\frac{I_1-I_2}{C} \qquad (3)$$
$$\cdots$$
$$L\frac{d^2I_n}{dt^2}=-\frac{I_n-I_{n+1}}{C}+\frac{I_{n-1}-I_n}{C}$$

η οποία γράφεται,

$$\frac{d^2I_1}{dt^2}=-\omega_o^2(I_1-I_0)+\omega_o^2(I_2-I_1)$$
$$\frac{d^2I_2}{dt^2}=-\omega_o^2(I_2-I_1)+\omega_o^2(I_3-I_2) \qquad (4)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^2I_n}{dt^2}=-\omega_o^2(I_n-I_{n-1})+\omega_o^2(I_{n+1}-I_n)$$

όπου I_o=0 και $\omega_o^2 = 1/LC$.

Οι εξισώσεις αυτές είναι ίδιες με τις εξισώσεις κίνησης αλυσίδας ταλαντωτών που βρήκαμε σε προηγούμενα μαθήματα,

$$M\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -k(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})$$

όπου είχαμε βρεί τη σχέση διασποράς:

$$\omega = 2\omega_0 \sin^2(\frac{ka}{2}), \quad \text{όπου} \quad \omega_o = \sqrt{k/M}$$

Επομένως, αν επαναλάβουμε τα ίδια βήματα όπως και στη περίπτωση της αλυσίδας ταλαντωτών, θα βρούμε την ίδια σχέση διαποράς, με μόνη διαφορά τον ορισμό της ιδιοσυχνότητας $\omega_o = \sqrt{1/LC}$.

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε την φασική ταχύτητα σε μια γραμμή μεταφοράς αποτελούμενη από N συζευγμένα LC κυκλώματα στο όριο χαμηλών συχνοτήτων (δηλ. μικρά k<<1 ή a<<1)

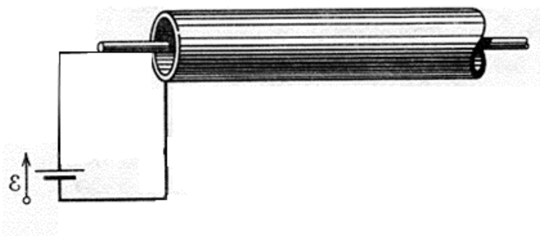
$$\omega = 2\omega_o \sin(\frac{ka}{2}) = 2\omega_o(\frac{ka}{2} + ...)$$

οπότε η φασική ταχύτητα ισούται με

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \omega_o a = a\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (5)$$

Γραμμή μεταφοράς κύματος (§4.2 Παράδειγμα 5, τροποποιημένο)

Θεωρούμε σαν γραμμή μεταφοράς κύματος ένα **ομοαξονικό καλώδιο**



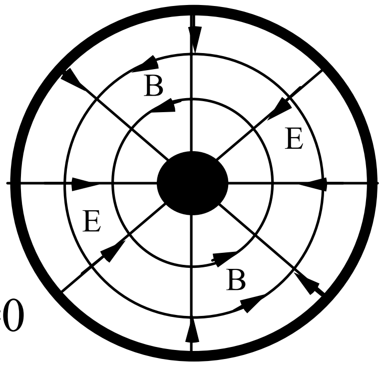
Γνωρίζουμε από τον Ηλεκτρισμό ότι:

(α) η χωρητικότης κυλινδρικού πυκνωτού (ανά μονάδα μήκους a) είναι

$$C = 2\pi\varepsilon_o \frac{a}{\ln(R_2/R_1)}$$

όπου ε_o=8.85x10^{-12}Cb^2/Nt.m^2 είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού και R_2 είναι η ακτίνα του κυλινδρικού κέλυφους και R_1 η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού,

Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου (αξονική διεύθυνση) και του μαγνητικού πεδίο (ομοαξονικές κυλινδρικές επιφάνειες)



Στον εξωτερικό χώρο: E=0, B=0

(β) ενώ ο συντελεστής αυτεπαγωγής κυλινδρικού πυκνωτού (ανά μονάδα μήκους a) είναι

$$L = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{\ln(R_2/R_1)}{a}$$

($\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A·m είναι η μαγνητική διαπερατότης του κενού). Οπότε η φασική ταχύτητα (5) γράφεται,

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1}{\mu_o \varepsilon_o}} = c$$

Η ποσότης $c \approx 3 \times 10^8$m/sec καλείται **ταχύτης του φωτός** στο κενό.
Αν εισαχθεί κάποιο διηλεκτρικό υλικό μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτού, τότε οι σχέσεις που δίδουν τα L, C τροποποιούνται ως εξής:

$$C = 2\pi\varepsilon\varepsilon_o \frac{a}{\ln(R_2/R_1)}, \text{ και } L = \frac{\mu\mu_o}{2\pi}\frac{\ln(R_2/R_1)}{a}$$

όπου ε είναι η (σχετική) διηλεκτρική σταθερά του υλικού και μ η (σχετική) μαγνητική διαπερατότης του υλικού. Οπότε αντικαθιστώντας στην (5), η φασική ταχύτης γράφεται

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Ο λόγος $\eta = \frac{c}{\upsilon} = \sqrt{\mu\varepsilon}$ καλείται δ**είκτης διάθλασης** του υλικού. Δείκτης διάθλασης μερικών υλικών:

Υλικό	n	(για λ=5893A°)
αέρας	1.00029	
νερό	1.33	
γυαλί	1.50	

Τα ακόλουθα μεγέθη τροποποιούνται μέσα σε διηλεκτρικά υλικά ως εξής:

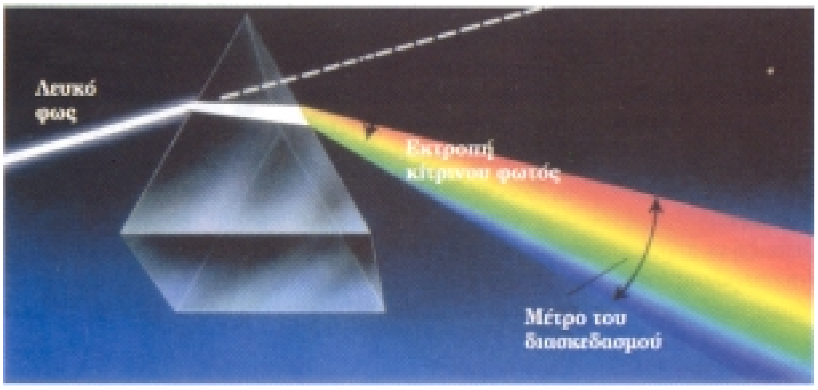
$$\nu = \text{δεν επηρεάζεται από το υλικό μέσο}$$

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_o}{n}$$

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{n\omega}{c} = nk_o$$

όπου τα μεγέθη λ_o και k_o αναφέρονται ως προς το κενό.

Δείκτης διάθλασης και μήκος κύματος

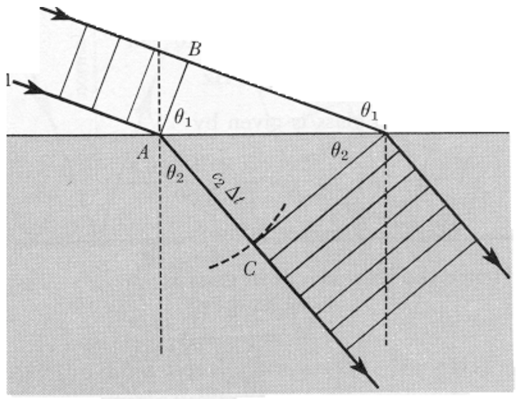


Το φως εκτρέπεται από την ευθύγραμμο πορεία του όταν προσπέσει σε διαφανές υλικό. Η εκτροπή αυτή είναι αντίστροφα ανάλογη του μήκους κύματος του φωτός. Τώρα το αναδυόμενο φυσικό φως από οπτικό μέσον εκτρέπεται σε διαφορετικές γωνίες που είναι ανάλογες του λ, δηλ. διασπείρεται, με συνέπεια να αναλύεται σε όλα τα χρώματα από τα οποία αποτελείται το προσπίπτον φως. (Το φυσικό φως αποτελείται από ένα συνεχές τμήμα και από ένα διακριτό τμήμα, δηλ. το λ παίρνει τιμές στο διάστημα [α,β], αλλά και τις διακριτές τιμές $[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N]$).

Νόμοι διάθλασης

Θεωρούμε μια μονοχρωματική δέσμη φωτός (δηλ. το λ έχει μια συγκεκριμένη τιμή), να προσπίπτει σε μια διαχωριστική επιφάνεια 2 οπτικών μέσων.

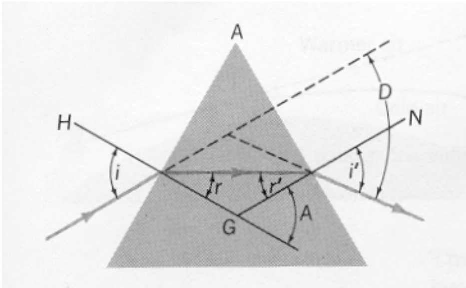
Μέτωπο κύματος (η επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία βρίσκονται σε φάση).
Εστω ότι η ισοφασική επιφάνεια (AB) καταλαμβάνει μετά από χρόνο Δt τη θέση (CD).



Από τα ορθογώνια τρίγωνα BAD και ACD έχουμε: $(BD)=l_1=x\sin\theta_1$ και $(AC)=l_2=x\sin\theta_2$ (x είναι η υποτείνουσα). Ομως $l_1=\upsilon_1\Delta t$ και $l_2=\upsilon_2\Delta t$, οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει: $\upsilon_1\Delta t=x\sin\theta_1$ και $\upsilon_2\Delta t=x\sin\theta_2$, ή διαιρώντας κατά μέλη, $\upsilon_1/\upsilon_2=\sin\theta_1/\sin\theta_2$. Εισάγοντες τους δείκτες διάθλασης, $n=c/\upsilon$, λαμβάνουμε τον νόμο του Snell:

$$\boxed{n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2}$$

Παρατήρηση: Ο δείκτης διάθλασης $n=\frac{c}{\upsilon}=\frac{c}{\lambda\nu}=\frac{c/\nu}{\lambda}$ ελαττώνεται (↓) καθώς αυξάνεται (↑) το λ.



Η χρωματική διασπορά του φωτός από το πρίσμα δικαιολογείται ως εξής:

Εστω ότι εξωτερικά του πρίσματος υπάρχει κενό (ή και αέρας) οπότε $n_1=1$ (η γωνία προσπτώσεως i=σταθερή). Εφόσον $n_2\downarrow$ (ελαττώνεται) καθώς το $\lambda\uparrow$(αυξάνεται), έπεται από το νόμο του Snell (εφόσον $n_2 \sin r$=σταθερό) ότι η γωνία διάθλασης $r\uparrow$ (αυξάνεται) καθώς το $\lambda\uparrow$. Τότε όμως η γωνία $r'=A-r\downarrow$ (όπου Α είναι η θλαστική γωνία του πρίσματος), και τελικά (εφόσον $n_2 \sin r' = \sin i'$) η γωνία ανάδυσης $i'\downarrow$. Τότε η γωνία εκτροπής $D=i+i'-A\downarrow$ (καθώς το $\lambda\uparrow$), δηλ. για μεγαλύτερα μήκη κύματος (για το ερυθρό), η γωνία εκτροπής ελαττώνεται (ενώ για το ιώδες αυξάνεται) και έτσι δικαιολογείται η χρωματική διασπορά του φυσικού φωτός από πρίσμα.

Ενέργεια κύματος, Ροή ενέργειας, Σύνθετη αντίσταση

Θα αναφερθούμε σε κύματα που διαδίδονται σε συνεχές μέσον, όπως τη χορδή, και μάλιστα εγκάρσια κύματα για να έχουμε καλύτερη εποπτική εικόνα.

Εχομε δει ότι η (ολική) ενέργεια ενός μεμονωμένου αρμονικού ταλαντωτού (που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση $\psi=A\cos(\omega t+\varphi)$) ισούται με,

$$E=\tfrac{1}{2}kA^2=\tfrac{1}{2}\omega^2 MA^2 \qquad (1)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι ένα (εγκάρσιο) αρμονικό κύμα (της μορφής $\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$) διαδίδεται κατά μήκος της χορδής (που ταυτίζεται με την διεύθυνση +x). Τότε σε ένα μικρό τμήμα της χορδής, μήκους Δx και μάζας Δm, η ενέργειά του θα είναι κατ' αναλογίαν,

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}\,\omega^2(\Delta m)A^2 \qquad (2)$$

Αν μ είναι η γραμμική πυκνότης της χορδής, τότε Δm=μΔx,

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\mu(\Delta x)A^2 \qquad (3)$$

Ο ρυθμός ροής της ενέργειας που μεταφέρεται κατά μήκος της χορδής (δηλ. η ισχύς του κύματος) είναι

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\mu\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)A^2$$

Αν πάρουμε το όριο Δt→0 και Δx→0, τότε η ροή ισχύος γράφεται (αποκλειστικά για κύμα που οδεύει προς μια κατεύθυνση),

$$P = \frac{dE}{dt} = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\mu\frac{dx}{dt}A^2 = \tfrac{1}{2}\,\mu\upsilon\,\omega^2 A^2 \qquad (4)$$

όπου $\upsilon = \sqrt{T/\mu}$ και T η ασκούμενη τάση. Ορίζουμε σαν εμπέδηση ή σύνθετη αντίσταση (impedance) της γραμμής μεταφοράς την ποσότητα,

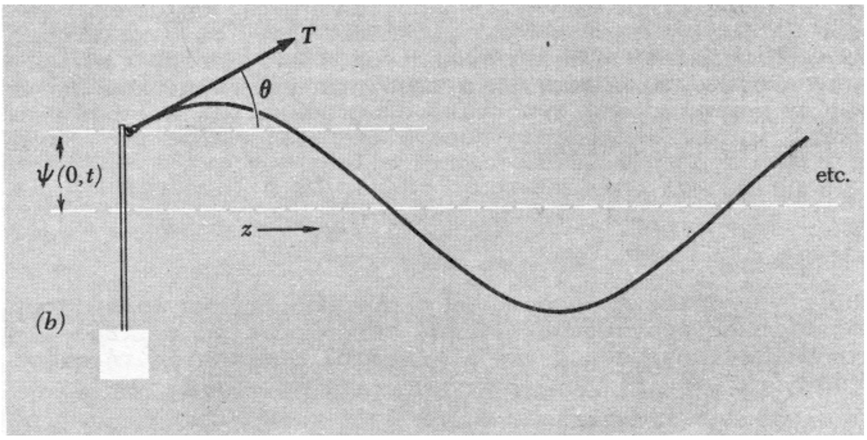
$$\boxed{Z = -T\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial t}} \qquad (5)$$

Για οδεύοντα κύματα: ψ(x,t)=Acos(kx-ωt) η εμπέδηση της χορδής για οδεύοντα κύματα ισούται:

$$Z = T\frac{k}{\omega} = \mu\upsilon^2\frac{k}{\omega} = \upsilon\mu = \sqrt{\mu T}\,.$$

Τα κύματα μεταφέρουν ενέργεια και ορμή, που προσφέρεται από τις γεννήτριες των κυμάτων (δηλ. τους πομπούς). Λέμε ότι οι πομποί ακτινοβολούν. Αν π.χ. η χορδή (ο δέκτης) διεγείρεται από μια εξωτερική πηγή (τον πομπό), τότε απορροφά ακτινοβολία.

Θα δούμε την ιδέα της εμπέδησης, μελετώντας τη κίνηση μιάς χορδής, μήκους L, η οποία συγκρατείται στο σημείο x=L με τάση T από ένα υποστήριγμα, ενώ στο σημείο x=0 διεγείρεται από μιά εγκάρσια δύναμη (μέσω του ακροδέκτου της πηγής).



Η εγκάρσια δύναμη που ασκεί η χορδή πάνω στον ακροδέκτη της πηγής στο σημείο x=0 είναι

$$F_y = -T\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1}$$

Η ισχύς που απορροφάται από τη χορδή (ή που ακτινοβολείται από τη πηγή) ισούται

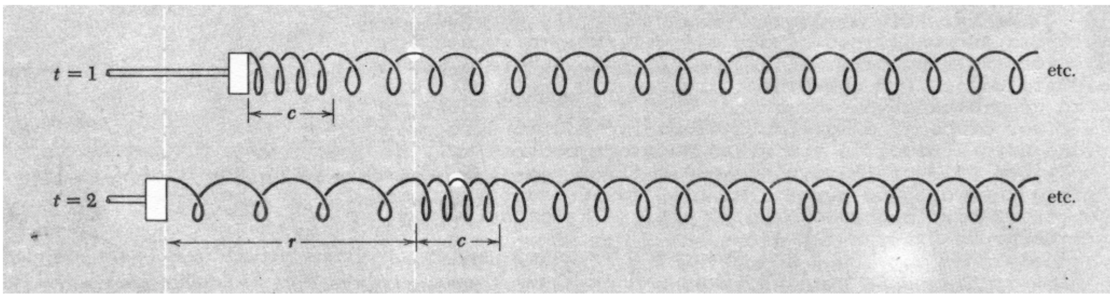
$$P = F_y \frac{d\psi}{dt} = -T \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d\psi}{dt} = Z\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \qquad (2)$$

όπου (dψ/dt) είναι η εγκάρσια ταχύτης της χορδής (να μην μπερδευτεί με την φασική ταχύτητα υ του κύματος).

Η ενέργεια που ακτινοβολείται από την πηγή (και που κατ' επέκταση απορροφάται από τη χορδή) μεταφέρεται σαν οδεύον κύμα από το σημείο x=0 προς το σημείο x=L. Γενικά, η ακτινοβολούμενη ισχύς που διαπερνά το (τυχόν) σημείο x, δίδεται από την (2),

$$P(x,t) = Z\left[\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right]^2 \qquad (2\alpha)$$

Παράδειγμα: Διαμήκη κύματα σε ελατήρια.



Για οδεύοντα κύματα, η εμπέδηση σε ελατήρια είναι πάλι

$$Z = \sqrt{\mu T}$$

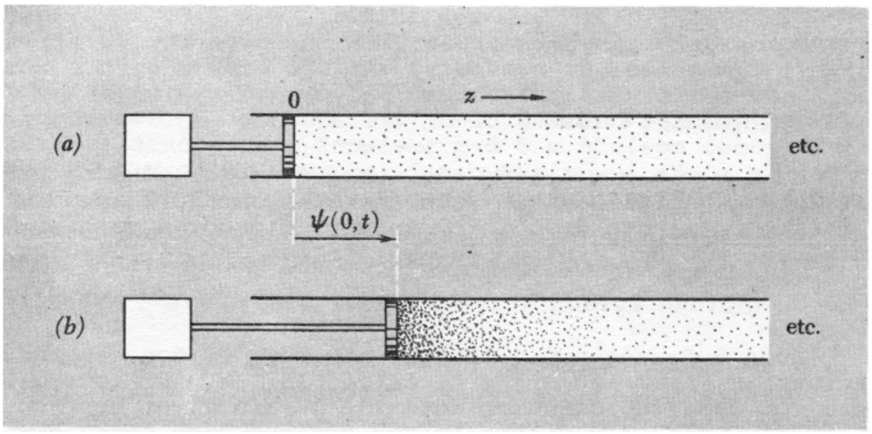
όπου T=ka είναι η τάση στη κατάσταση ισορροπίας των ελατηρίων, όπου η φασική ταχύτης του διαμήκους κύματος σε ελατήριο είναι: $\upsilon = \sqrt{T/\mu}$.

Παράδειγμα: Ηχητικά κύματα σε αέρια

Τα ηχητικά κύματα είναι διαμήκη. Για οδεύοντα κύματα σε αέρια (και άλλα ελαστικά μέσα), η φασική ταχύτης διάδοσης του διαμήκους κύματος είναι,

$$\upsilon = \sqrt{\gamma P_o / \rho_o}$$

όπου P_o είναι η πίεση ισορροπίας και ρ_o η πυκνότητα ισορροπίας και γ μια σταθερά των αερίων.



Ενώ η εμπέδηση είναι,

$$Z = \sqrt{\mu T}$$

όπου $T=\gamma P_o$ και $\mu=\rho_o$. Για τον αέρα σε κανονικές συνθήκες, $\gamma=1.4$, $P_o=1at=1.01\times10^5 Nt/m^2$, και $\rho_o=1.29 Kgr/m^3$, οπότε βρίσκουμε $\upsilon=332 m/s$ και $Z=428\ (Nt/m^2)/(m/s)$.