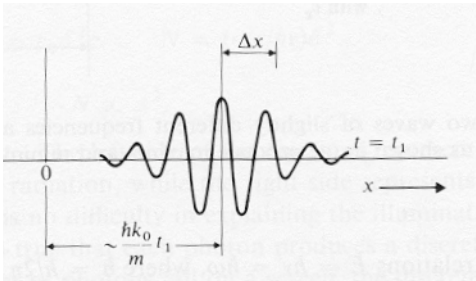
Κεφ. 6 ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ, ΚΥΜΑΤΟΠΑΚΕΤΑ, …

(part 1, pages 1-11)

Η μέχρι τώρα μελέτη μας αφορούσε κύματα ή ταλαντώσεις με μία μόνο συχνότητα ω. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την υπέρθεση πολλών κυμάτων που συνίστανται από πολλές συχνότητες. Το συνιστάμενο κύμα είναι ένα οδεύον κύμα που θα αναφέρεται σαν κυματοπακέτο ή κυματοομάδα (wave packet) (το κύμα αυτό, αν και μεταφέρει ενέργεια και ορμή, δεν διατηρεί το σχήμα του καθώς διαδίδεται). Παράδειγμα, 5-μελής ομάδα μπάσκετ που κινείται (παίζοντας) κατά μήκος ενός δρόμου.



Φασική ταχύτητα: η ταχύτητα με την οποία κινούνται οι διάφοροι διακυμάνσεις μέσα στην ομάδα (δεν μεταφέρεται ενέργεια ή πληροφορία και μπορεί να είναι μεγαλύτερη του c).

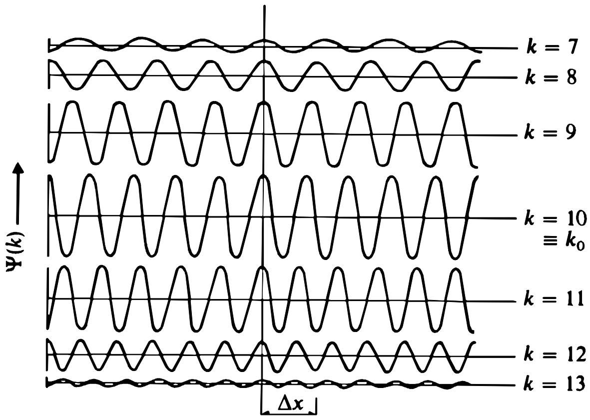
Ταχύτητα ομάδος (group velocity): η ταχύτητα με τη οποία κινείται η ομάδα σαν σύνολο.

Διαμόρφωση σήματος: Το αρμονικό (οδεύον) κύμα δεν μεταφέρει πληροφορία, ενώ το διαμορφωμένο κύμα μεταφέρει (Διαμόρφωση πλάτους ή διαμόρφωση συχνότητος).

Το διαμορφωμένο (οδεύον) κύμα γενικά αναπαρίσταται από μιά πολύπλοκη κυματοσυνάρτηση ψ(t). Για παράδειγμα, η ψ(t) μπορεί να σχηματιστεί από υπέρθεση (άθροισμα) αρμονικών συναρτήσεων της μορφής

$$A(\omega)\cos(\omega t+\varphi(\omega))$$

Για παράδειγμα, η υπέρθεση των 7 αρμονικών κυμάτων της επόμενης εικόνας, έχει παράγει το κυματοπακέτο που είδαμε προηγουμένως.



Πράγματι, δεδομένης της συνάρτησης ψ(t), μπορούμε να υπολογίσουμε τα πλάτη Α(ω) και τις σταθερές φάσης φ(ω) με μεθόδους της ανάλυσης Fourier.

Παράδειγμα: Υπέρθεση 2 αρμονικών ταλαντώσεων

Εχουμε δει από το Κεφ. 1 ότι η υπέρθεση των 2 αρμονικών ταλαντώσεων με συχνότητες ω_1 και ω_2, αντίστοιχα,

$$\psi(t) = A\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad (1)$$

(για ευκολία μας πήραμε $A_1=A_2=A$) δίδει την συνιστάμενη διαταραχή,

$$\psi(t) = A_{mod}(t)\cos(\omega t+\varphi) \qquad (2)$$

όπου $\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$ είναι η μέση συχνότητα (καλείται φέρουσα συχνότητα), $\varphi=(\varphi_1+\varphi_2)/2$ και $A_{mod}(t)$ είναι το διαμορφωμένο πλάτος,

$$A_{mod}(t)=2A\cos(\omega_{mod}t+\delta) \qquad (3)$$

Με $\omega_{mod}=(\omega_1-\omega_2)/2$ (καλείται συχνότητα διαμόρφωσης) και $\delta=(\varphi_1-\varphi_2)/2$.

Η ταλάντωση (2) παριστάνει μια σχεδόν αρμονική ταλάντωση με (αρμονικά) διαμορφωμένο πλάτος με συχνότητα ω_{mod}. Γενικά, τα πλάτος (3) θα μπορούσε να έχει πιό σύνθετη μορφή.

Παράδειγμα: Υπέρθεση 2 οδευόντων κυμάτων

Εστω ότι ένας πομπός παράγει 2 κύματα της μορφής (1) στη θέση $x=0$, δηλ.

$$A\cos(\omega_1 t+\varphi_1),\ \ A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

Επειδή καθένα κύμα δίδει ένα οδεύον κύμα στη θέση x, της μορφής

$$A\cos(k_1x-\omega_1 t+\varphi_1),\ \ A\cos(k_2x-\omega_2 t+\varphi_2)$$

η υπέρθεση των 2 κυμάτων στη θέση x δίδει το συνιστάμενο κύμα,

$$\psi(x,t) = A\cos(k_1x-\omega_1t+\varphi_1) + A\cos(k_2x-\omega_2t+\varphi_2) \quad (4)$$

απ' όπου λαμβάνουμε το διαμορφωμένο (κατά πλάτος) οδεύον κύμα

$$\psi(t) = A_{mod}(x,t)\cos(kx-\omega t+\varphi) \qquad (5)$$

όπου $\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$, $k=(k_1+k_2)/2$, $\varphi=(\varphi_1+\varphi_2)/2$ και $A_{mod}(x,t)$ είναι το διαμορφωμένο πλάτος,

$$A_{mod}(x,t)=2A\cos(k_{mod}x-\omega_{mod}t+\delta) \qquad (6)$$

με $\omega_{mod}=(\omega_1-\omega_2)/2$, $k_{mod}=(k_1-k_2)/2$ και $\delta=(\varphi_1-\varphi_2)/2$.

Ταχύτητα διαμόρφωσης

Από την (6), για να παρακολουθήσουμε μια συγκεκριμένη τιμή του πλάτους διαμόρφωσης, θα πρέπει η φάση της συνάρτησης να είναι σταθερή,

$$(k_{mod}x-\omega_{mod}t+\delta)=\sigma\tau\alpha\theta.$$

την οποίαν διαφορίζοντας έχουμε, $k_{mod}dx-\omega_{mod}dt=0$, απ΄ όπου έπεται η ταχύτητα διαμόρφωσης,

$$\upsilon_{mod} \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_{mod}}{k_{mod}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} \qquad (7)$$

Είναι η ταχύτητα μιας συγκεκριμένης τιμής του πλάτους διαμόρφωσης.

Λόγω όμως των σχέσεων διασποράς, $\omega_1=\omega(k_1)$ και $\omega_2=\omega(k_2)$, οι οποίες μπορούν να αναπτυχθούν κατά Taylor γύρω από τη μέση τιμή k όπου $k=(k_1+k_2)/2$, ή

$$\omega_1 = \omega(k) + \frac{d\omega}{dk}(k_1 - k) + \frac{d^2\omega}{dk^2}\frac{(k_1 - k)^2}{2} + ..,$$
$$\omega_2 = \omega(k) + \frac{d\omega}{dk}(k_2 - k) + \frac{d^2\omega}{dk^2}\frac{(k_2 - k)^2}{2} + ...$$

συνεπώς,

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{d\omega}{dk}(k_1 - k_2) + ...$$

Αντικαθιστώντας στην (7) προκύπτει, $\upsilon_{mod} = \dfrac{d\omega}{dk} + ...$

Ταχύτητα ομάδας: $\upsilon_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

δηλ. η ομάδα δεν διαδίδεται με τη μέση ταχύτητα $\bar{\upsilon}=(\omega_1+\omega_2)/(k_1+k_2)$, όπως θα περίμενε κανείς, αλλά με τη ταχύτητα $\upsilon_g=d\omega/dk$. (Εχομε δεί στο Κεφ.4 ότι η ταχύτητα $\upsilon=\omega/k$ καλείται φασική ταχύτητα).

Παράδειγμα: Ραδιοφωνικά κύματα AM

Η φέρουσα συχνότης $\in$ [500-1600]KHz

Η διεγείρουσα τάση που εφαρμόζεται στη κεραία του στο πομπό έχει διαμορφωμένο πλάτος της μορφής,

$$A_{mod}(t)=A_o+\sum_{\omega_{mod}} A(\omega_{mod})\cos(\omega_{mod}t+\delta)$$

όπου η διαφορά $(A_{mod}(t)-A_o)$ είναι ανάλογη της πίεσης ενός ηχητικού κύματος (λειτουργία μικροφώνου).
Οι συχνότητες διαμόρφωσης ω_{mod} για ηχητικά κύματα βρίσκονται μέσα στην ακουστική περιοχή, [20-20000]Hz.

Εύρος ζώνης

Αν $\overline{\omega}$ είναι η φέρουσα συχνότητα, τότε οι συχνότητες που ακτινοβολούνται ανήκουν στη ζώνη συχνοτήτων,

$$[\overline{\omega}-\omega_{mod},\ \overline{\omega}+\omega_{mod}] \quad ή \quad [\overline{\nu}-\nu_{mod},\ \overline{\nu}+\nu_{mod}]$$

Η διαφορά της ελαχίστης συχνότητος από την μεγίστη συχνότητα καλείται εύρος ζώνης. Το εύρος ζώνης για τους εμπορικούς ραδιοφωνικούς σταθμούς AM είναι ίσο με 10KHz.

Παλμοί

Παλμός είναι η υπέρθεση πολλών αρμονικών ταλαντώσεων με ίδιο πλάτος και με γειτονικές συχνότητες στη ζώνη $[\omega_1,\omega_2]$. Εστω ότι οι συχνότητες ισοκατανέμονται στη ζώνη $[\omega_1,\omega_2]$ εύρους $\Delta\omega=(\omega_2-\omega_1)$. Αν $\delta\omega=(\omega_2-\omega_1)/(N-1)$, η υπέρθεση γράφεται

$$\psi(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos(\omega_1+\delta\omega)t + A\cos(\omega_1+2\delta\omega)t + \ldots + A\cos\omega_2 t$$

$$= A\cos[\omega_1 t + (N-1)\frac{\delta\omega}{2}t]\,\frac{\sin[N\frac{\delta\omega}{2}t]}{\sin(\frac{\delta\omega}{2}t)}$$

$$= A\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)\,\frac{\sin(N\frac{\delta\omega}{2}t)}{\sin(\frac{\delta\omega}{2}t)}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο παλμός διατηρεί την αρχική μορφή της απλής ταλάντωσης,

$$\psi(t)=A(t)\cos(\omega t)$$

όπου $\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$ είναι η μέση συχνότητα, όμως το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης

$$A(t)=A\frac{\sin(N\frac{\delta\omega}{2}t)}{\sin(\frac{\delta\omega}{2}t)}$$

έχει τη σύνθετη διαμόρφωση των διακροτημάτων. Για $N\to\infty$, το πλάτος τείνει στο όριο: $A(t)\to NA$ (την οποία θα καλέσουμε $A(0)$, ως η τιμή για $t=0$).

Στο όριο $N\to\infty$, με τη προϋπόθεση ότι το γινόμενο $N\delta\omega\approx\Delta\omega$ παραμένει σταθερό (που σημαίνει ότι $\delta\omega\to 0$), το πλάτος γράφεται

$$A(t)=A\frac{\sin(N\frac{\delta\omega}{2}t)}{\sin(\frac{\delta\omega}{2}t)}\approx A(0)\frac{\sin(N\frac{\delta\omega}{2}t)}{(N\frac{\delta\omega}{2}t)}\xrightarrow[t\to 0]{}A(0)$$

Θα μελετήσουμε τη κυματοσυνάρτηση $\psi(t)$ στο όριο $\delta\omega\to 0$. Αν λάβουμε υπόψιν ότι $A=\frac{A(0)}{N}=\frac{A(0)}{\Delta\omega}\delta\omega$, η αρχική υπέρθεση γράφεται,

$$\psi(t)=A\cos\omega_1 t+A\cos(\omega_1+\delta\omega)t+A\cos(\omega_1+2\delta\omega)t+\ldots$$

$$= \frac{A(0)}{\Delta\omega}[\cos\omega_1 t\,\delta\omega + \cos(\omega_1 + \delta\omega)t\,\delta\omega + \cos(\omega_1 + 2\delta\omega)t\,\delta\omega + \ldots]$$

$$= \frac{A(0)}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos\omega t\,d\omega,$$

ή
$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cos\omega t\,d\omega$$

Η μορφή αυτή αποτελεί μιά συνεχή αναπαράσταση κατά Fourier της κυματοσυνάρτησης $\psi(t)$.

Γενικά, κάθε συνεχής περιοδική συνάρτηση $\psi(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί κατά Fourier ως εξής,

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\sin\omega t\,d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

όπου οι συναρτήσεις $A(\omega)$ και $B(\omega)$ καλούνται συνεχείς συντελεστές Fourier (ή μετασχηματισμοί Fourier) και προκύπτει από τον παραπάνω ορισμό ότι

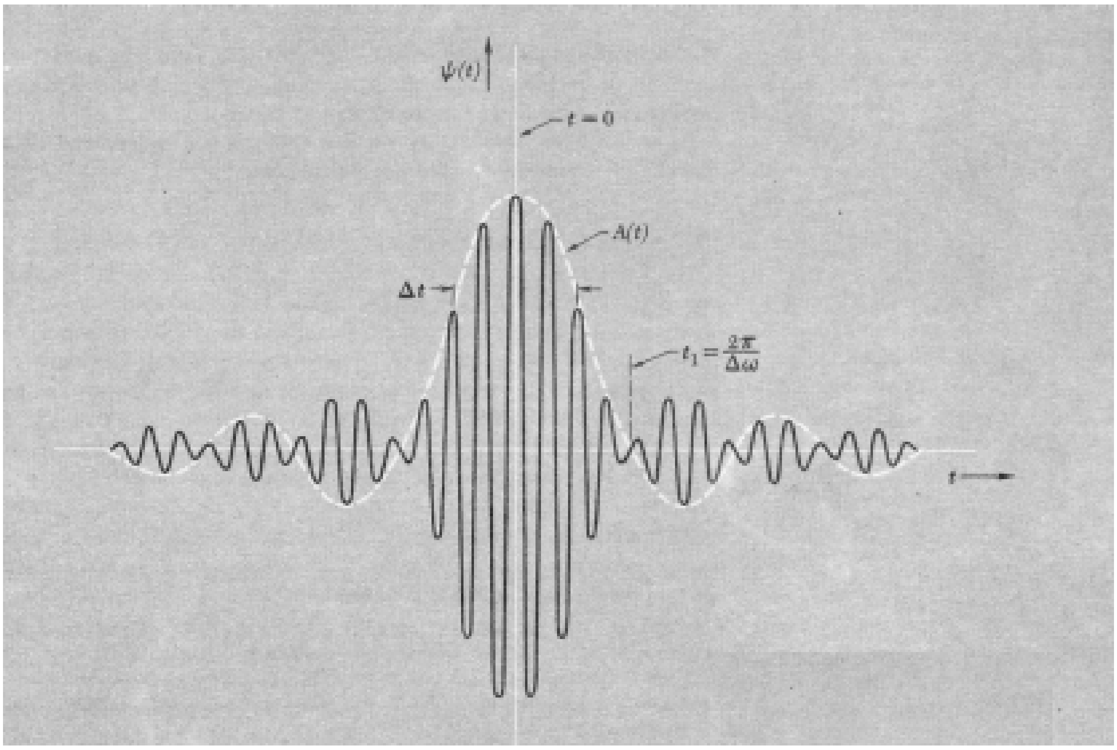
$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\sin\omega t\,dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\cos\omega t\,dt$$

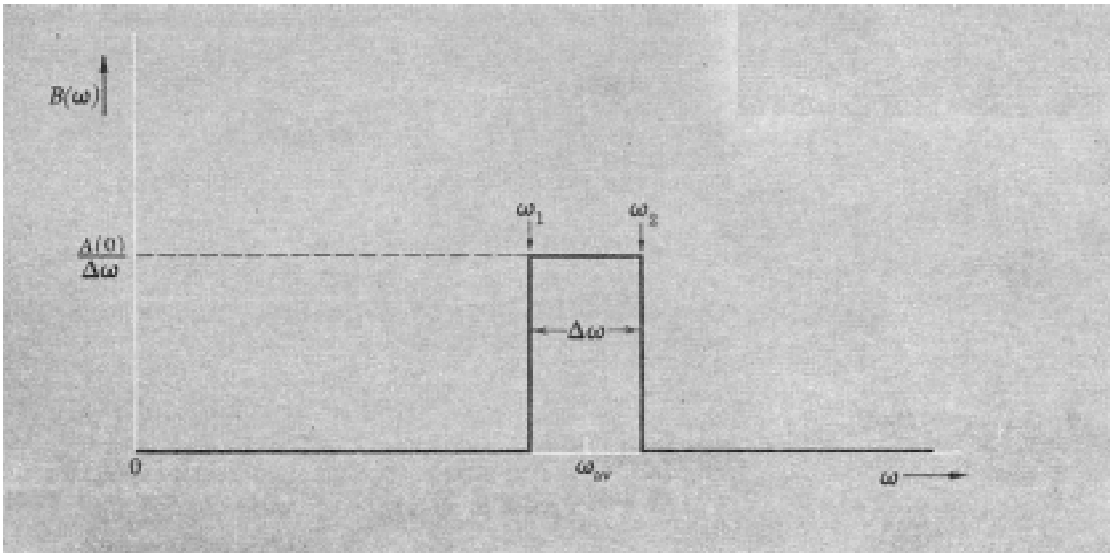
Η κυματοσυνάρτηση $\psi(t)$ είναι σημαντική μόνο μέσα στο χρονικό διάστημα Δt (λέγεται διάρκεια του παλμού), που ορίζεται από τη σχέση

$$\Delta\omega\Delta t = 2\pi \quad ή \quad \Delta\nu\Delta t = 1$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας παλμός ψ(t)



Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ο συντελεστής Fourier Β(ω).



Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής $B(\omega)=A(0)/\Delta\omega$ για $\omega\in[\omega_1,\omega_2]$ και είναι μηδέν εκτός του διάστηματος.

Οδεύον κυματοπακέτο

Εστω ότι ένας πομπός (στη θέση x=0) εκπέμπει ένα παλμό ψ(t) της μορφής του παραπάνω σχήματος. Το σήμα αυτό διαδίδεται στο χώρο σαν οδεύον κύμα, περιορισμένο σε έκταση στο χώρο (είναι δηλ. εντοπισμένο) και καλείται οδεύον κυματοπακέτο. Η ταχύτητα διάδοσης του είναι ίση με τη ταχύτητα της ομάδος υ_g.

Εφόσον μεταξύ ω-k υφίσταται η σχέση διασποράς, ω=ω(k) ή k=k(ω), η ύπαρξη ζώνης Δω στις συχνότητες συνεπάγεται την ύπαρξη αντίστοιχης ζώνης Δk και στους κυματαριθμούς, δηλ.

$$\Delta k = k_2 - k_1 = k(\omega_2) - k(\omega_1) \cong \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_o (\omega_2 - \omega_1) = \frac{\Delta\omega}{\upsilon_g}$$

(ενδιάμεσα έχει γίνει ανάπτυξη κατά Taylor).

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι το ‘μήκος’ του παλμού (ή το ανάπτυγμα του παλμού στο χώρο) ισούται χονδρικά με $\Delta x=\upsilon_g\Delta t$, όπου Δt η διάρκειά του. Έπεται επομένως

$$\Delta x\Delta k=\Delta\omega\Delta t=2\pi$$

(στη πραγματικότητα το γινόμενο των αβεβαιοτήτων είναι ≥ 2π, κατά την αρχή του Heisenberg).

Το μήκος Δx του κυματοπακέτου μεγαλώνει (λέμε ότι απλώνει) καθώς διαδίδεται στο χώρο.

Αυτό αιτιολογείται ως εξής: η ταχύτητα ομάδος $\upsilon_g = d\omega/dk$ εξαρτάται από το k, και για κάθε k που ανήκει στη ζώνη $[k_1,k_2]$ αντιστοιχεί και μια τιμή της ταχύτητας υ_g, επομένως προκύπτει και μιά αντίστοιχη ζώνη $\Delta\upsilon_g$ για τις ταχύτητες,

$$\Delta\upsilon_g = \left(\frac{d\upsilon_g}{dk}\right)_o \Delta k = \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_o \Delta k$$

Οπότε το μήκος $(\Delta x)_o$ του κυματοπακέτου μετά από χρόνο t θα έχει γίνει,

$$(\Delta x) = (\Delta x)_o + (\Delta\upsilon_g)t$$