Νόμος παγκόσμιας έλξης της βαρύτητος

<u>Isaac Newton (1686):</u>
"κατέληξα στο συμπέρασμα ότι οι δυνάμεις που κρατούν τους πλανήτες στις τροχιές τους μεταβάλλονται αντίστροφα προς το τετράγωνο της απόστασής τους από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς τους, συνέκρινα τη δύναμη που είναι αναγκαία για να κρατήσει την Σελήνη στην κυκλική τροχιά της γύρω από τη Γη με την δύναμη της βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης και βρήκα τις απαντήσεις πολύ κοντά"

Νόμος βαρύτητος του Νεύτωνα (1687):
"κάθε σώμα έλκει κάθε άλλο σώμα με δύναμη που είναι ανάλογη προς το γινόμενο των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασής τους",

$$\vec{F}_2 = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}(-\hat{r}_{12}^2)$$

όπου $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\frac{Nt\,m^2}{Kg^2}$

Βάρος σώματος (στη Γη): $$\mathbf{B = G\frac{M_{\Gamma\eta\varsigma} m}{r^2}}$$

άρα

$$g = G\frac{M_{\Gamma\eta\varsigma}}{r^2}$$

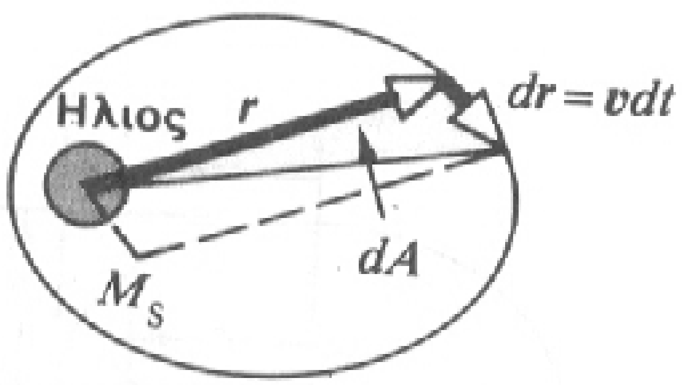
Κοντά στην επιφάνεια της Γης: $r=R_{\Gamma\eta\varsigma}=6380Km$, $M_{\Gamma\eta\varsigma}=5.98x10^{24}Kgr$, βρίσκουμε $g=9.80m/sec^2$.

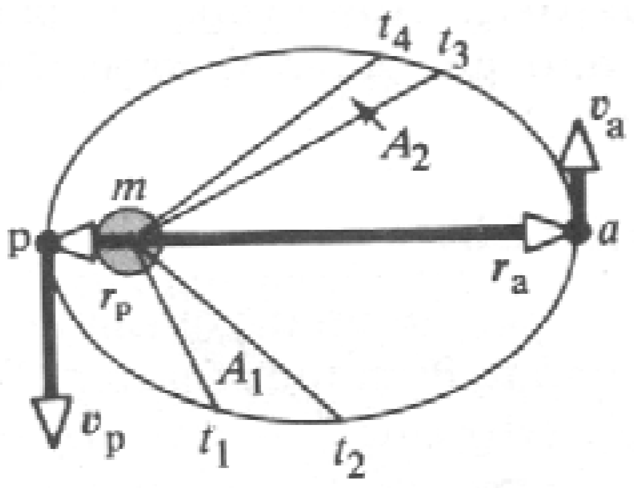
NOMOI TOY KEPLER

Κινήσεις των πλανητών:
Γεωκεντρικό σύστημα: Πτολεμαίος 2ο αιώνα μΧ
Ηλιοκεντρικό σύστημα: Copernicus 1543

Johannes Kepler

1. **Ολοι οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές, τη μία εστία των οποίων καταλαμβάνει ο Ήλιος.**
2. **Η επιβατική ακτίνα κάθε πλανήτη διαγράφει (σαρώνει) ίσες επιφάνειες σε ίσα χρονικά διαστήματα.**
3. **Το τετράγωνο της περιόδου κάθε πλανήτη είναι ανάλογο προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς.**





Απόδειξη:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \text{ και } \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \text{ άρα } \vec{L} = \text{σταθερό}, \quad \text{δηλ. } \vec{r} \times m\vec{\upsilon} = \text{σταθερό}.$$

Όμως το στοιχειώδες εμβαδόν που διαγράφει η επιβατική ακτίνα (στη μονάδα του χρόνου) είναι:

$$dA = \tfrac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}| = \tfrac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{\upsilon}dt| = \tfrac{1}{2}|\vec{r} \times m\vec{\upsilon}|\frac{dt}{m} = \frac{Ldt}{2m}, \text{ άρα } \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{σταθερό}.$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΛΟΓΩ ΒΑΡΥΤΗΤΟΣ

Εχουμε αποδείξει ότι η δυναμική ενέργεια μάζας m σε απόσταση r από την Γη έχει δυναμική ενέργεια:

$$U(r) = -\frac{GM_{\Gamma\eta\varsigma}m}{r}$$

ή γενικώς η βαρυτική δυναμική ενέργεια σώματος m ως προς το σώμα μάζας M:

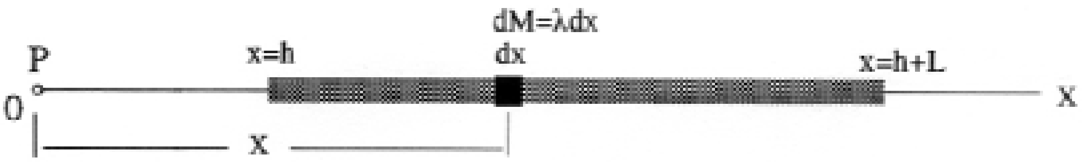
$$U(r) = -Gm\int_{\Sigma}\frac{dM}{r}$$

ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

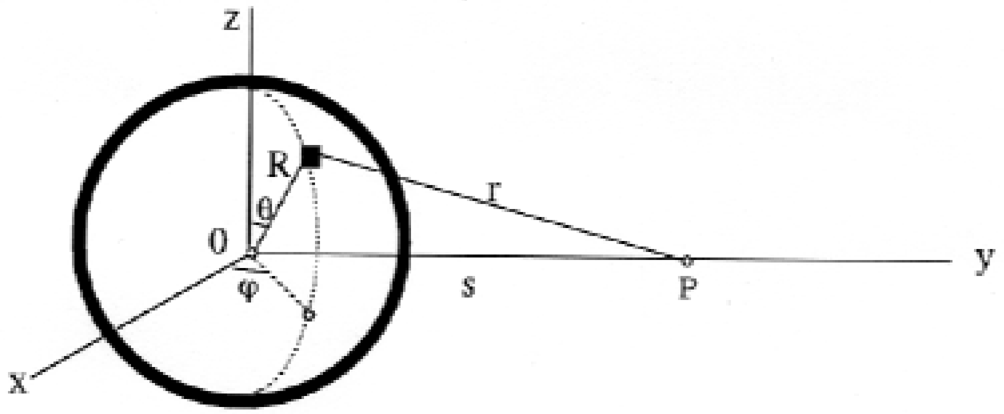
Ένταση του πεδίου βαρύτητας:

$$\vec{g} = \frac{\text{δύναμη πάνω στο υπόθεμα } m}{m} = -G\int_{\Sigma}\frac{dM}{r^2}(-\hat{r})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ομογενής ράβδος μήκους L και μάζας M. Πόση είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί η ράβδος στο σημείο P (πάνω στον άξονά της).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Σφαιρικό κέλυφος ακτίνας R και μάζας M. Πόση είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου που δημιουργεί το κέλυφος στο σημείο P.



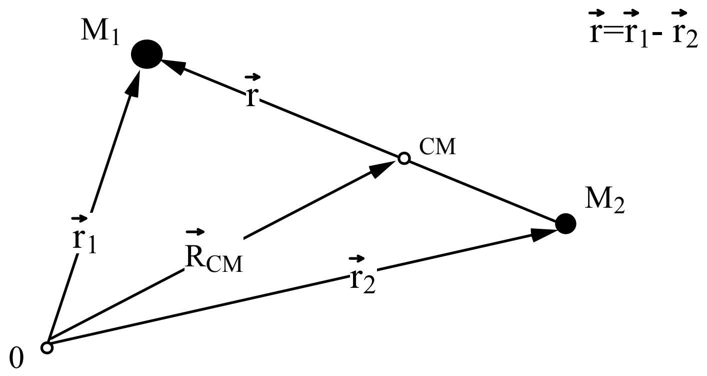
$$\boldsymbol{F = -G\frac{Mm}{s^2}}, \quad s \geq R$$

$$F = 0, \quad s < R.$$

(δέστε Halliday & Resnick, Φυσική, τόμος A', σ. 397)

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε δύο σημειακές μάζες M_1 και M_2 στις θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2$:



Ορίζουμε τα διανύσματα:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{R}_{cm} \equiv \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1 + M_2}$$

οπότε προκύπτει ο αντίστροφος μετασχηματισμός:

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{cm} + \frac{\mu}{M_1}\vec{r} \qquad \vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_{cm} + \frac{\mu}{M_1}\vec{\upsilon}$$

απ'όπου έπεται:

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{cm} - \frac{\mu}{M_2}\vec{r} \qquad \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{cm} - \frac{\mu}{M_2}\vec{\upsilon}$$

όπου η ποσότης $\mu = \dfrac{M_1M_2}{M_1+M_2}$ καλείται ανηγμένη μάζα του συστήματος (έχει μονάδες μάζας)

Εξισώσεις κίνησης:

$$M_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{GM_1M_2}{r^2}(-\hat{r})$$

$$M_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{GM_1M_2}{r^2}(+\hat{r})$$

και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση:

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{GM_1M_2}{r^2}(-\hat{r})$$

Η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες:

$$\vec{a} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (a_r - r\omega^2)\hat{r} + (2\upsilon_r\omega + r\alpha)\hat{\theta} =$$

όπου

$\alpha \equiv \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt}$: **η γωνιακή επιτάχυνση**

$a_r \equiv \dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d\upsilon_r}{dt}$: **η ακτινική επιτάχυνση**

$\vec{a}_t = r\alpha\hat{\theta}$: **η επιτρόχιος επιτάχυνση**

$(2\upsilon_r\omega)\hat{\theta} =$: **η Coriollis επιτάχυνση**

$(-r\omega^2)\hat{r}$: **η κεντρομώλος επιτάχυνση**

Συνεπώς, η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$(a_r - r\omega^2)\hat{r} = \frac{GM_1M_2}{r^2}(-\hat{r}) \qquad (1)$$

$$(2\upsilon_r\omega + r\alpha)\hat{\theta} = 0 \qquad (2)$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται:

$$(2\upsilon_r\omega + r\alpha) = \frac{1}{r}(2r\frac{dr}{dt}\omega + r^2\frac{d\omega}{dt}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega) = 0$$

η οποία ολοκληρώνεται αμέσως:

$$\int \frac{d}{dt}(r^2\omega)\,dt = r^2\omega = c$$

όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Το δεύτερο μέλος (με κάποιες τροποποιήσεις) παριστάνει τη στροφορμή του συστήματος:

$$L = \mu(r^2\omega)$$

Επομένως βρίσκουμε ότι: L=σταθερά

(που αποτελεί μια ιδιότητα όλων των κεντρικών δυνάμεων)

Η πρώτη εξίσωση κίνησης λύνεται: (δέστε ΜΗΧΑΝΙΚΗ Berkeley, σ.242)

$$\frac{1}{r} = -\frac{GM_1M_2}{L^2} + A\cos\theta \quad \textbf{(κωνική τομή)}$$