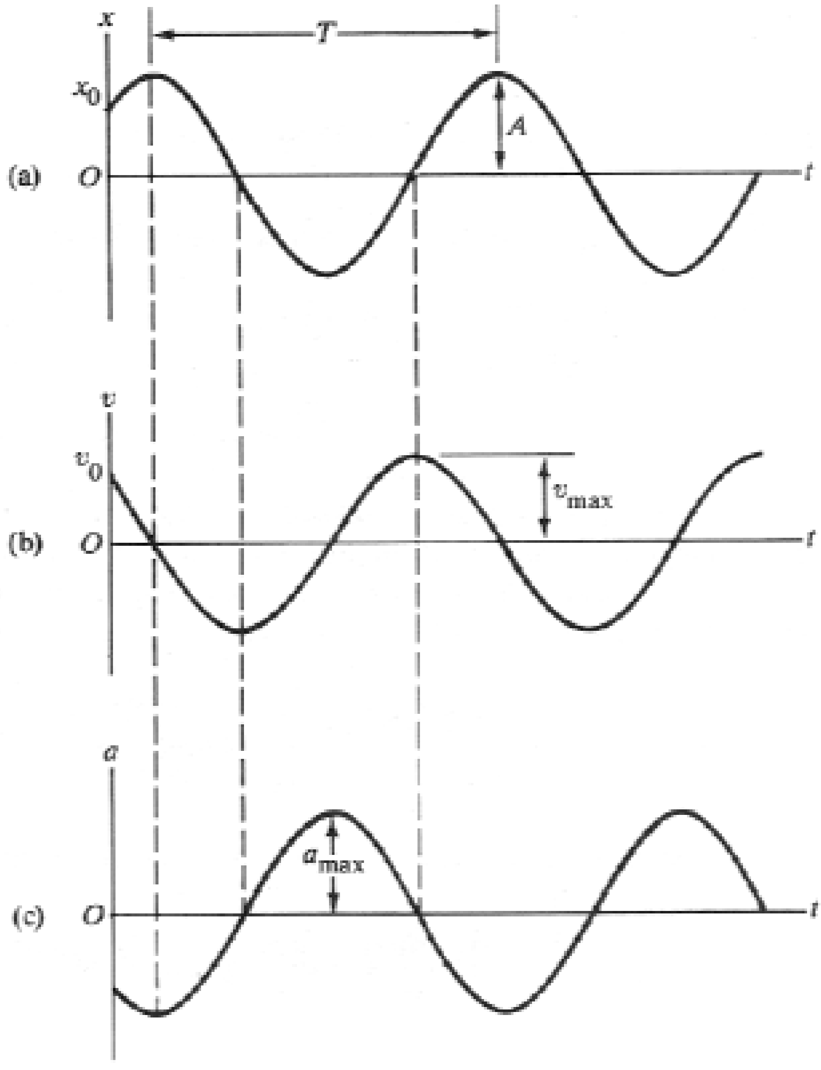
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ: έχουμε όταν η δύναμη που δρά πάνω στο σώμα είναι ανάλογη προς την απομάκρυνσή του από την θέση ισορροπίας του και κατευθύνεται πάντοτε προς το σημείο ισορροπίας του.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$



ταχύτης του σώματος: $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$

επιτάχυνση του σώματος: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ:

1) Μάζα προσδεδεμένη στο άκρο ελατηρίου: F=−kx

Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (1)$

Επίλυση της (1): Η (1) γράφεται

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (2).$$

Η εξίσωση (2) είναι **ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως**. Μπορεί να επιλυθεί με ολοκλήρωση. Πράγματι, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί x' (ο τόνος σημαίνει παράγωγο ως προς t) και έχουμε: $x''x' = -\frac{k}{m}xx'$ ή $\frac{d}{dt}(\frac{x'^2}{2}) = -\frac{k}{m}\frac{d}{dt}(\frac{x^2}{2})$ ή $\frac{d}{dt}(\frac{x'^2}{2} + \frac{k}{m}\frac{x^2}{2}) = 0$, την οποίαν μπορούμε να ολοκληρώσουμε:

$$\int \frac{d}{dt}(\frac{x'^2}{2} + \frac{k}{m}\frac{x^2}{2})\,dt = c\,,$$

όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Προκύπτει λοιπόν, $\frac{x'^2}{2} + \frac{k}{m}\frac{x^2}{2} = c$. Είναι εύκολο να αναδιατάξουμε τους όρους στο πρώτο ολοκλήρωμα που έχουμε βρει. Πράγματι, πολ/ντας επί m και τα δύο μέλη αναγνωρίζομε τη νέα σταθερά mc ως την ολική ενέργεια, άρα το πρώτο ολοκλήρωμα γράφεται,

$$E = \tfrac{1}{2}mx'^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (3)$$

Στη συνέχεια η (3) λύνεται ως προς x', $x' = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}$ ή $dx = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}\;dt$. Θέτομε ω^2=k/m την οποίαν βγάζουμε κοινό παράγοντα έξω από τη ρίζα,

$$dx = \pm(\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}\,)\,\omega dt\,.$$

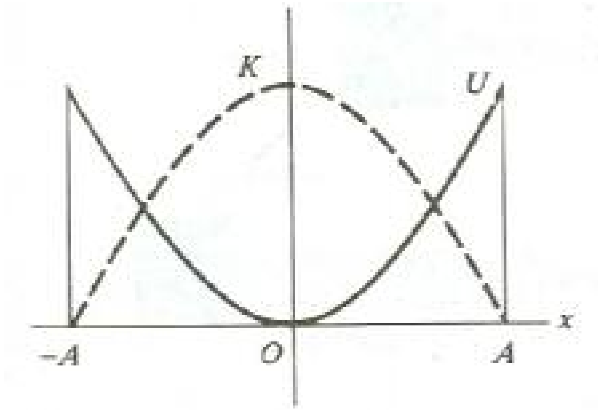
Καλούμε A^2=2E/k, οπότε η σχέση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί ως εξής:

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm\omega dt \;\Rightarrow\; \int\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm\int\omega dt \;\Rightarrow\; \sin^{-1}(x/A) = \pm\omega t + \delta \;\Rightarrow\; x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

δηλ. ανακαλύπτουμε την λύση της αρμονικής ταλάντωσης.

Ενέργεια του σώματος στην αρμονική ταλάντωση:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 = const.$$



2) Μάζα προσδεδεμένη στο άκρο ελατηρίου με τριβές: R=−bυ (φθίνουσα ταλάντωση)

Εξισώσεις κίνησης του σώματος m είναι: **F + R = m a** ή **m a = −kx −bυ** ή

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

<u>Επίλυση της (1):</u> Η (1) γράφεται

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} \qquad (2).$$

Η εξίσωση αυτή είναι ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως. Για να λυθεί δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής: $x = Ae^{\lambda t}$.

Αντικαθιστώντας στη (2) έχομε: $\lambda^2 x + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\lambda x = 0$, ή $\lambda^2 + \frac{k}{m} + \frac{b}{m}\lambda = 0$.

Η λύση του τριωνύμου αυτού είναι: $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{(\frac{b}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$. Επειδή ο όρος της τριβής (b/2m) είναι πολύ μικρός, η διακρίνουσα είναι αρνητική, οπότε αν καλέσουμε $\omega^2 \equiv \frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2 > 0$, οι λύσεις $\lambda_{1,2}$ γράφονται: $\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm i\omega$, όπου i είναι η φανταστική μονάδα. Επομένως οι δύο λύσεις της (2) είναι: $x_1 = A_1 e^{\lambda_1 t}$ και $x_2 = A_2 e^{\lambda_2 t}$, οπότε η γενική λύση της (2) θα είναι:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{b}{2m}t}(A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}).$$

Η παρένθεση είναι της μορφής: $A\cos(\omega t + \varphi)$ (γιατί;)

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, η παρένθεση γράφεται: $(A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = (A_1 + A_2)\cos\omega t + i(A_1 - A_2)\sin\omega t$

$$= (A_1 + A_2)(\cos\omega t + \cot\varphi \sin\omega t) = *, \text{ όπου } \cot\varphi = \frac{i(A_1 - A_2)}{A_1 + A_2}.$$

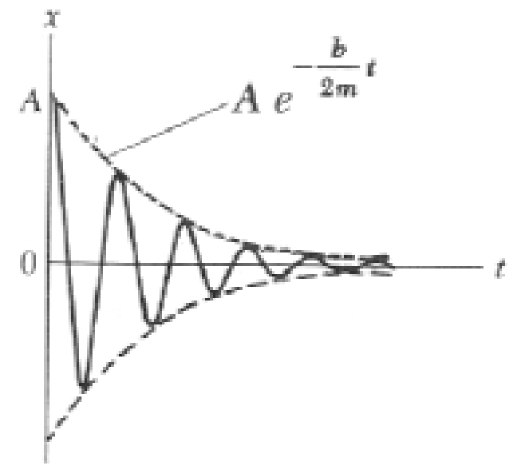
Οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται: $* = \dfrac{(A_1 + A_2)}{\sin\varphi}\sin(\omega t + \varphi)$.

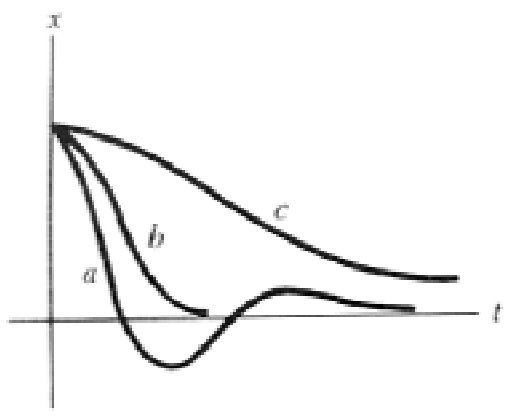
Συνεπώς, η γενική λύση της (2) γράφεται: $x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t + \varphi)$ (**φθίνουσα ταλάντωση με απόσβεση**)

όπου $A = \dfrac{(A_1 + A_2)}{\sin\varphi}$ είναι μια σταθερά και $\omega \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m} - (\dfrac{b}{2m})^2} = \sqrt{\omega_o^2 - (\dfrac{b}{2m})^2}$.

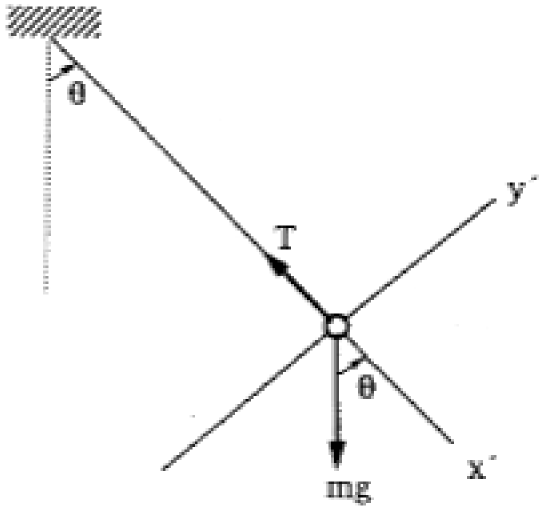
Οι σταθερές Α,δ είναι σταθερές ολοκλήρωσης και υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η συχνότητα $\omega_o \equiv \sqrt{k/m}$ καλείται ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

(**σταθερά χρόνου** τ=2m/b. Για t≅5τ ⇒ x≅0)





3) Απλό ή μαθηματικό εκκρεμές



Εξισώσεις κίνησης του σώματος m στο σύστημα x΄y΄:

- **άξονας x΄(κυκλική κίνηση):** $T - mg\cos\theta = m\dfrac{\upsilon^2}{L}$ (1)
- **άξονας y΄(επιτρόχιος κίνηση):** $ma_t = -mg\sin\theta$ (2)

όπου $a_t = L\alpha = L\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ **είναι η (γραμμική) επιτρόχιος επιτάχυνση**

<u>Επίλυση της (2)</u>:

Η (2) γράφεται $mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$. (3)

Για μικρές γωνίες $\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \ldots$, άρα κρατώντας τη πρώτη προσέγγιση η (3) γράφεται: $mL\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$ ή $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{L}\theta$. Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή της απλής αρμονικής ταλάντωσης και της οποίας έχομε βρει τη λύση: θ=Asin(ωt+φ), όπου $\omega = \sqrt{g/L}$ και Α,φ είναι σταθερές ολοκλήρωσης που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

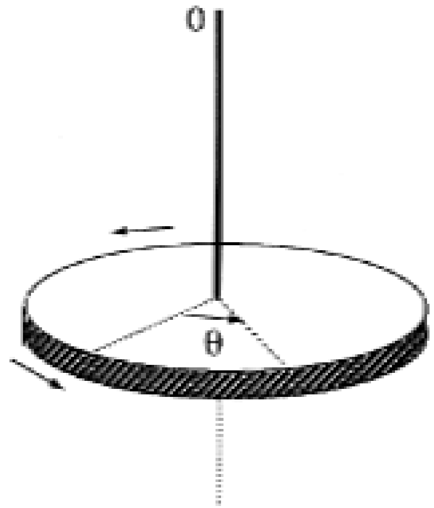
3b) Αν λάβουμε υπόψιν και την αντίσταση του αέρος, −bυ, οι παραπάνω εξισώσεις τροποποιούνται ως

$$T - mg\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{L} \qquad (1)$$

$$ma_t = -mg\sin\theta - b\upsilon \qquad (2).$$

Η λύση της (2) θα είναι: $\theta = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t + \varphi)$, όπου $\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{L} - (\frac{b}{2m})^2}$.

4) Στροφικό εκκρεμές:



Εξίσωση της περιστροφική κίνησης σώματος ως προς 0:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha} \qquad (1)$$

όπου $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση και τ=−Dθ.

Οι σταθερές D και I καλούνται, D=κατευθύνουσα ροπή του σύρματος και I=ροπή αδρανείας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του.

<u>Επίλυση της (1)</u>:

Η (1) γράφεται $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -D\theta$. Η λύση είναι **θ=A sin(ωt+φ),** όπου $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$ και A,δ αυθαίρετες σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Εξηναγκασμένες ταλαντώσεις:

Εξωτερική διέγερση: $F=F_0\cos(\omega t)$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx+b\frac{dx}{dt}=F_o\cos\omega t \qquad (1)$$

__Επίλυση της (1):__

Η (1) γράφεται $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}=\frac{F_o}{m}\cos\omega t$ (2).

Η εξίσωση αυτή είναι μη-ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξεως. Εχουμε βρει ήδη την λύση της **ομογενούς** είναι:

$$x=Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t+\varphi)\text{, όπου } \omega\equiv\sqrt{\frac{k}{m}-(\frac{b}{2m})^2}$$

και A,δ σταθερές ολοκλήρωσης που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Η λύση αυτή δεν είναι ευσταθής, διότι για $t\rightarrow\infty$ τείνει στο μηδέν (στη πραγματικότητα για $t\cong 5\tau$, $x\cong 0$).

Απομένει να βρούμε μια **μερική λύση** της (2). Δοκιμάζουμε λύση της μορφής: $x=A\sin(\omega t+\varphi)$ και αντικαθιστώντας στην (2), οπότε παίρνουμε:

$$-\omega^2A\sin(\omega t+\varphi)+\frac{k}{m}A\sin(\omega t+\varphi)+\frac{b}{m}\omega A\cos(\omega t+\varphi)=\frac{F_o}{m}\cos\omega t$$

Αναπτύσσομε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις κατά το όρισμα τους και ανάγουμε τους συντελεστές των γραμμικώς ανεξαρτήτων συναρτήσεων $\sin(\omega t)$ και $\cos(\omega t)$:

$$A\sin\omega t\,[(-\omega^2+\frac{k}{m})\cos\varphi-\frac{b}{m}\omega\sin\varphi]+A\cos\omega t\,[(-\omega^2+\frac{k}{m})\sin\varphi+\frac{b}{m}\omega\cos\varphi-\frac{F_o}{m}]=0$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\sin(\omega t)$ και $\cos(\omega t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, θα πρέπει οι συντελεστές τους να ισούται με μηδέν, δηλ.

$$(-\omega^2+\frac{k}{m})\cos\varphi-\frac{b}{m}\omega\sin\varphi=0 \qquad (3)$$

$$(-\omega^2+\frac{k}{m})A\sin\varphi+\frac{b}{m}\omega A\cos\varphi=\frac{F_o}{m}. \qquad (4)$$

Άγνωστοι στο σύστημα των εξισώσεων (3)-(4) είναι τα A και φ. Η εξίσωση (3) δίνει:

$$\tan\varphi=\frac{-\omega^2+\frac{k}{m}}{b\omega/m}=\frac{\omega_o^2-\omega^2}{b\omega/m},\quad \text{όπου } \omega_o=\sqrt{k/m}.$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε στην εξίσωση (4), αφού πρώτα υπολογίσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{b\omega/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(b\omega/m)^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{\omega_o^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(b\omega/m)^2}}.$$

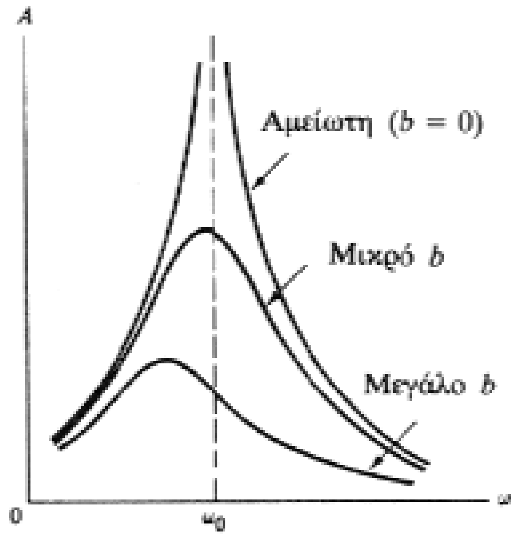
Η (4) επομένως γράφεται:

$$A(\omega_o^2-\omega^2)\frac{(\omega_o^2-\omega^2)}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(b\omega/m)^2}} + \frac{b\omega}{m}A\frac{b\omega/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(b\omega/m)^2}} = \frac{F_o}{m}$$

απ’όπου λαμβάνουμε,

$$A = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+(b\omega/m)^2}}.$$

Η γραφική παράσταση του πλάτους *A* συναρτήσει της συχνότητας του διεγέρτη ω:



Για $\omega=\omega_o$ έχομε το φαινόμενο του συντονισμού.