
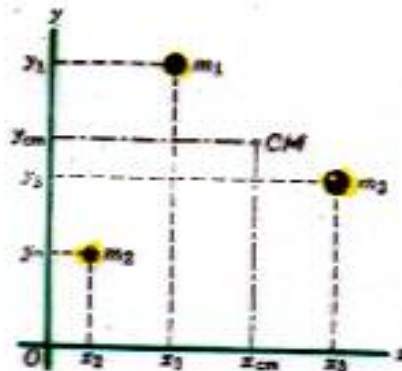



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

 **Στερεό σώμα:** θεωρείται ως ένα σύνολο σωματιδίων με αμετάβλητες αποστάσεις μεταξύ των (αμετάβλητο σχήμα και μέγεθος)



 **Κέντρο μάζας συστήματος σωματιδίων:** ορίζεται το σημείο με συντεταγμένες: (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{M_{ολ}}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{M_{ολ}}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N}{M_{ολ}}$$

όπου

$$M_{ολ} = m_1 + m_2 + \dots + m_N$$

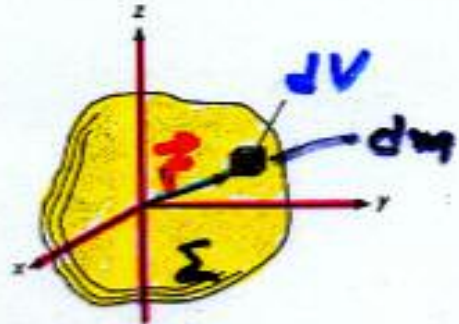
ή γενικώς

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{M_{ολ}}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν η αρχή αναφοράς του συστήματος ταυτίζεται με το CM, τότε ισχύει: $\sum_n m_n \vec{r}_n = 0$ [για το σπίτι]



Κέντρο μάζας σε συνεχή κατανομή:



$$x_{CM} = \frac{\int_{\Sigma} x dm}{M_{ολ}} = \frac{1}{M_{ολ}} \int_V x \rho dV$$

$$y_{CM} = \frac{\int_{\Sigma} y dm}{M_{ολ}} = \frac{1}{M_{ολ}} \int_V y \rho dV$$

$$z_{CM} = \frac{\int_{\Sigma} z dm}{M_{ολ}} = \frac{1}{M_{ολ}} \int_V z \rho dV$$

γενικώς

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_{\Sigma} \vec{r} dm}{M_{ολ}} = \frac{1}{M_{ολ}} \int_V \vec{r} \rho dV$$

Κέντρο μάζας σωμάτων: Να υπολογιστεί το CM ορθογωνίου τριγώνου, μίας ράβδου, και ενός κυκλικού τομέως [για το σπίτι]

 Ροπή αδρανείας συστήματος σωματιδίων ως προς άξονα:

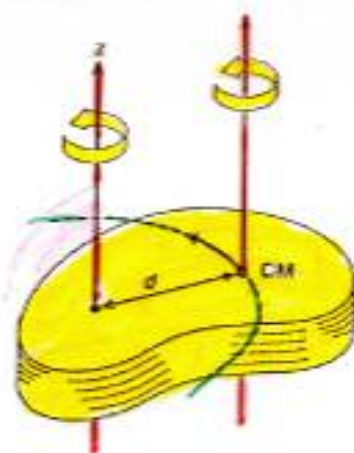
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_N r_N^2 = \sum_n m_n r_n^2$$

 Ροπή αδρανείας στερεού σώματος ως προς άξονα:


$$I = \int_{\Sigma} (dm) r^2 = \int_V \rho dV r^2$$

Θεώρημα του Steiner ή των παραλλήλων αξόνων:

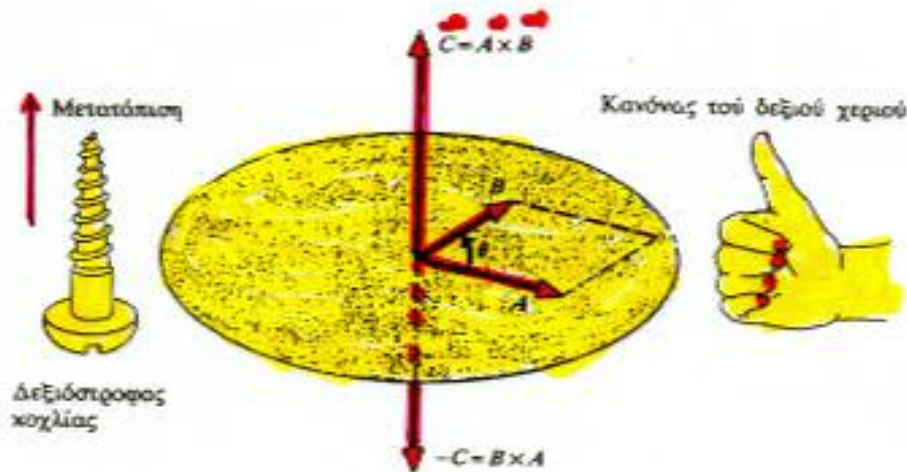
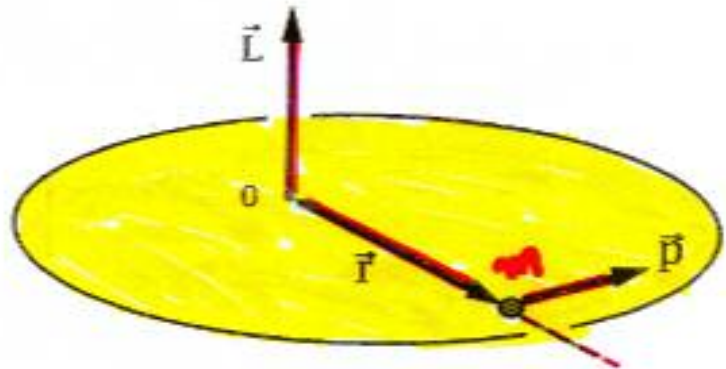
$$I = I_{CM} + Md^2$$



Ροπή αδρανείας σώματος: Να υπολογιστούν οι ροπές αδρανείας των σωμάτων του Πίνακα 12.1 ΟΗΑΝΙΑΝ [για το σπίτι]

 Στροφομή σωματιδίου: ορίζεται το διανυσματικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{r} και \vec{p} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



 Στροφομή συστήματος σωματιδίων:


$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 + \dots + \vec{r}_N \times \vec{p}_N = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n$$

 Στροφομή στερεού σώματος:

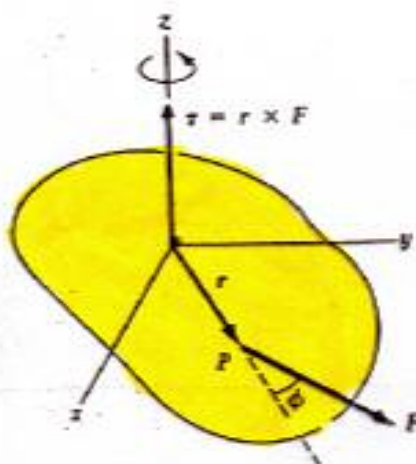
$$\vec{L} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{p}_n = \int_{\Sigma} \vec{r} \times d\vec{p} = \int_{\Sigma} \vec{r} \times (dm \vec{v})$$


όμως: $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \hat{r} + r\omega \hat{\theta} \right) = r^2 \omega \hat{z}$

$$\vec{L} = \int_{\Sigma} r^2 \omega \hat{z} dm = \omega \hat{z} \int_{\Sigma} r^2 dm = I \omega \hat{z} = I \vec{\omega}$$

 Ροπή δύναμης επί σώματος: (μονάδες Nt-m)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



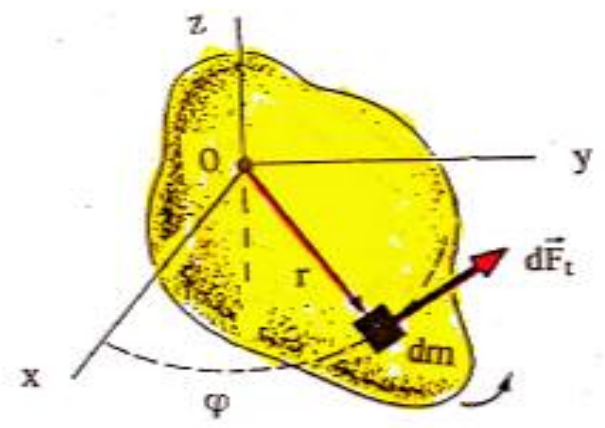
 Εξισώσεις κίνησης στερεού σώματος (2ος νόμος του Νεύτωνα):

→ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ή ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ:

$$\vec{F}_{\text{εξ}} = M \vec{a}_{\text{CM}}$$

Απόδειξη: $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_{i,\text{εξ}} + \sum_j \vec{F}_{ij} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_{i,\text{εξ}} + \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{\text{εξ}} \Rightarrow \text{QED}$

➔ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ (γύρω από σταθερό άξονα) :



$$d\vec{F}_t = dm \vec{a}_t$$

όπου

$$\vec{a}_t = \left(2 \frac{dr}{dt} \omega + r\alpha \right) \hat{\theta} = r\alpha \hat{\theta}$$

$$dF_t = dm r\alpha$$

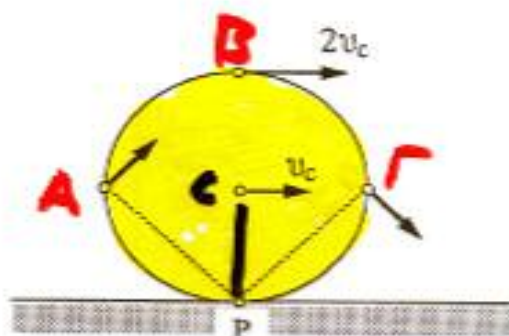
$$d\tau = r dF_t = dm r^2 \alpha$$

$$\tau_{ολ} = \int d\tau = \int r^2 dm \alpha = I\alpha$$

Η εξίσωση της περιστροφικής κίνησης:

$$\tau_{ολ} = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_{ολ} = I\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_{ολ} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

➔ **ΚΥΛΙΣΗ:** η περιστροφική κίνηση γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής ο οποίος ορίζεται από τα σημεία επαφής μεταξύ σώματος και δρόμου



Κέντρο μάζας:

$$v_{cm} = \omega R \quad \text{και} \quad a_{cm} = R\alpha$$

Εξισώσεις κίνησης σώματος **(κίνησης)**

περιστροφική κίνηση:

$$\tau_{ολ,P} = I_P \alpha$$

~~περιστροφική~~ κίνηση

κίνηση CM:

$$F_{ολ} = ma_{cm}$$

🍇 **ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ:** αν η συνολική ροπή που δρά πάνω σ' ένα σύστημα είναι μηδέν, τότε η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

🍇 **ΣΥΝΘΗΚΕΣ "ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ" ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ:**

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F} &= 0 \\ \Sigma \vec{\tau} &= 0 \quad (\text{ως προς οποιοδήποτε σημείο}) \end{aligned}$$

ΚΑΛΥΦΘΕΙΣΑ ΥΛΗ: R.A. Serway (Κεφ.10,11), H.C. Ohanian (Κεφ.10,12,13), H.D. Young (Κεφ. 9,10,11)