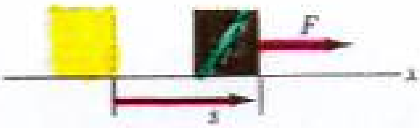
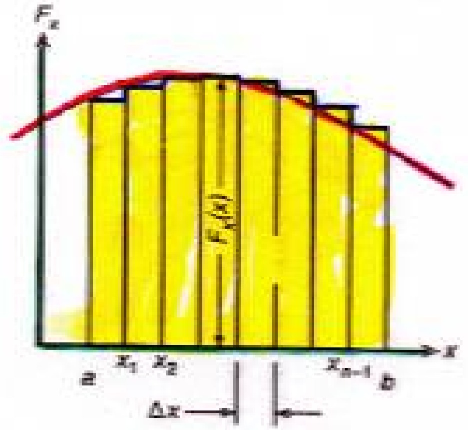
ΕΡΓΟΝ - ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Εργο δύναμης στη μια διάσταση: Οταν το σημείο εφαρμογής της δύναμης μετατοπίζεται, τότε ορίζουμε ως έργο που παράγει η δύναμη το γινόμενο της συνιστώσας της δύναμης κατά την διεύθυνση της μετατόπισης επί το μέτρον της μετατόπισης
(μονάδες: Joules)

$$W = (F\cos\theta)\,s = \vec{F}\cdot\vec{s}$$



Εργο μη-σταθερής δύναμης:



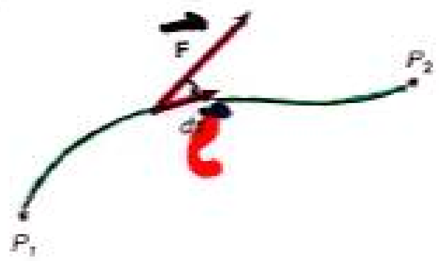
$$W = F(x_1)\cdot \Delta x_1 + F(x_2)\cdot \Delta x_2 + \ldots + F(x_N)\cdot \Delta x_N$$

$$= \int_a^b F(x)\cdot dx$$

1-διάσταση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: **Σύστημα σώματος εξαρτημένου σε ελατήριο:** Αν τεντωθεί το ένα άκρο ελατηρίου κατά x από την θέση ισορροπίας του, βρείτε το παραγόμενο έργο από το ελατήριο [για το σπίτι]

Εργο δύναμης στις τρεις διαστάσεις:



$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{\ell} = \int_{P_1}^{P_2} (F_X\cdot dx + F_Y\cdot dy + F_Z\cdot dz)$$

Θεώρημα έργου - ενέργειας:

2ος νόμος του Νεύτωνα (στη 1 διάσταση):

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d\upsilon}{dt}$$

$$F\,dx = m\frac{d\upsilon}{dt}dx = m\,d\upsilon\frac{dx}{dt} = m\,\upsilon\,d\upsilon$$

$$\int_{P_1}^{P_2} F\,dx = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\,\upsilon\,d\upsilon$$

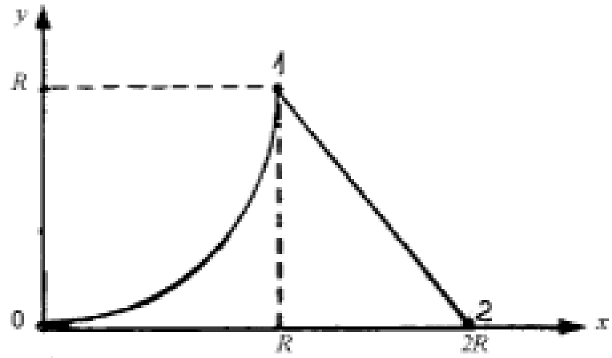
$$W = \tfrac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2}m\upsilon_1^2$$

$K = \tfrac{1}{2}m\upsilon^2$: κινητική ενέργεια του σώματος

Θεώρ. έργου-ενέργειας: $\boxed{W = \Delta K}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΡΓΟΥ: ΘΕΜΑ 3, ΣΕΠΤ. 2006

ΘΕΜΑ 3. Σώμα μάζας m δέχεται δύναμη της μορφής $\vec{F}=\kappa(x,y)$ όπου κ σταθερά. Να υπολογιστεί το παραγόμενο έργο, αν το σώμα μετατοπίζεται κατά μήκος της διαδρομής $0\rightarrow1\rightarrow2$ του ακόλουθου σχήματος, όπου το τμήμα $0\rightarrow1$ είναι τεταρτοκύκλιο ακτίνος R. Μπορείτε να αποφανθείτε αν η ασκούμενη δύναμη είναι συντηρητική και γιατί; *(αν δεν ξέρετε τις εξισώσεις των επί μέρους γεωμετρικών τμημάτων, ρωτήστε τον επιβλέποντα) [$x^2+(y-R)^2=R^2$ και $x+y=2R$].*



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΘΕΜΑ 3. Το έργο που παράγει η δύναμη F επί του σώματος δίδεται από τη σχέση,

$$W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_A^B F_x\cdot dx+F_y\cdot dy=\int_A^B F_x\cdot dx+F_y\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int_A^B (F_x+F_y\cdot\frac{dy}{dx})dx\,,$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται από το σημείο Α στο Β μέσω κάποιας συγκεκριμένης καμπύλης η οποία συνδέει το σημείο Α με το Β και η οποία παρίσταται από την συνάρτηση: y=y(x).

α) Για την διαδρομή $0\rightarrow1$ έχομε την εξίσωση της διαδρομής: $x^2+(y-R)^2=R^2$. Λύνοντάς την ως προς y, παίρνομε: $y=R-\sqrt{R^2-x^2}$ (όπου 0<x,y<R στο 1° τεταρτοκύκλιο), άρα $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Συνεπώς το προηγούμενο ολοκλήρωμα γράφεται,

$$W_{0\rightarrow1}=\kappa\int_0^R x\cdot dx+\frac{x(R-\sqrt{R^2-x^2})}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\kappa R\int_0^R\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=-\kappa\frac{R}{2}\int_0^R\frac{d(R^2-x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\kappa R\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R=\kappa R^2$$

β) Παρομοίως για την διαδρομή $1\rightarrow2$ έχομε την εξίσωση της διαδρομής: $x+y=2R$. Λύνοντάς την ως προς y, παίρνομε: $y=2R-x$, άρα $\frac{dy}{dx}=-1$. Συνεπώς το προηγούμενο ολοκλήρωμα γράφεται,

$$W_{1\rightarrow2}=\kappa\int_R^{2R}xdx-(2R-x)dx=\kappa\int_R^{2R}2xdx-2Rdx=\kappa\left(x^2-2Rx\right)_{x=R}^{x=2R}=\kappa R^2\,.$$

Συνεπώς το συνολικό έργο είναι, $W = W_{0\rightarrow1}+W_{1\rightarrow2} = 2\kappa R^2$.

Για να είναι η ασκούμενη δύναμη συντηρητική πρέπει να ισχύει: $\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}$, που στη περίπτωσή μας γράφεται: 0=0, άρα είναι συντηρητική.

Συντηρητικές δυνάμεις: το έργο που παράγουν δεν εξαρτάται από τον ακολουθούμενο δρόμο μεταξύ των σημείων P_1 και P_2, παρά μόνον από τις ακραίες θέσεις P_1 και P_2

$$W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

Στη περίπτωση όπου ένα σώμα δέχεται συντηρητικές δύναμεις, τότε ορίζεται ως <u>δυναμική ενέργεια</u> μιά συνάρτηση των συντεταγμένων, $U(\vec{r})$, η μεταβολή της οποίας ισούται με το έργο που καταβάλλεται για να μετακινηθεί το σώμα από το σημείο 1 στο σημείο 2, δηλ. $\boxed{U(P_2) - U(P_1) \equiv - W_{P_1 \to P_2}}$, **όπου** $W_{P_1 \to P_2}$ **ορίστηκε προηγουμένως.**

Συνεπώς

(1 διάσταση) $$\Delta U = - \int_{P_1}^{P_2} F(x) \cdot dx \qquad (1a)$$

(3 διαστάσεις) $$\Delta U = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$U(P_2) = - \int_{P_1}^{P_2} F(x) \cdot dx + U(P_1)$$

έπεται:

(στη 1 διάσταση) $$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (2a)$$

(στις 3 διαστάσεις) $$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

<u>**Απόδειξη**</u> της (2a): Η (1a) γράφεται: $U(x_2)-U(x_1)=-\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx$ (3). Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση *F(x)* είναι συνεχής στο διάστημα (x_1,x_2), ορίζουμε την συνάρτηση *Φ'(x)=F(x),* όπου (') σημαίνει 1η παράγωγος ως προς x. Οπότε η (3) γράφεται: $U(x_2)-U(x_1)=-[\Phi(x_2)-\Phi(x_1)]$. Διαιρούμε και τα 2 μέλη με $\Delta x=x_2-x_1$ και παίρνουμε το όριο για $\Delta x \to 0$, δηλ. $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x_2)-U(x_1)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x_2)-\Phi(x_1)}{\Delta x}$, ή $\frac{dU(x)}{dx}=-\frac{d\Phi(x)}{dx}\equiv -F(x)$, QED.

Θεώρημα έργου-ενέργειας: $$\boxed{\Delta K + \Delta U = 0}$$

για συντηρ. δυνάμεις

Μηχανική ενέργεια: $$E = K + U$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δυναμική ενέργεια μέσα στο πεδίο βαρύτητος (με g=σταθ.)

$$U(P_2) - U(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{P_1}^{P_2} mg(-\hat{y})\cdot dy\,\hat{y} = mg(y_2-y_1)$$

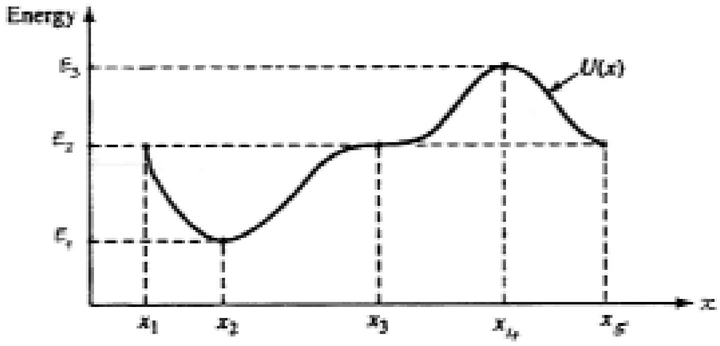
αν πάρουμε $y_1=0$ και $U(P_1)=0$:

$$\boxed{U(y) = mgy}$$

ΠΕΔΙΟΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ (σχήμα 25.19)
ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ή ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ
ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ-ΔΥΝ. ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ: ΘΕΜΑ 1, ΣΕΠΤ. 2006

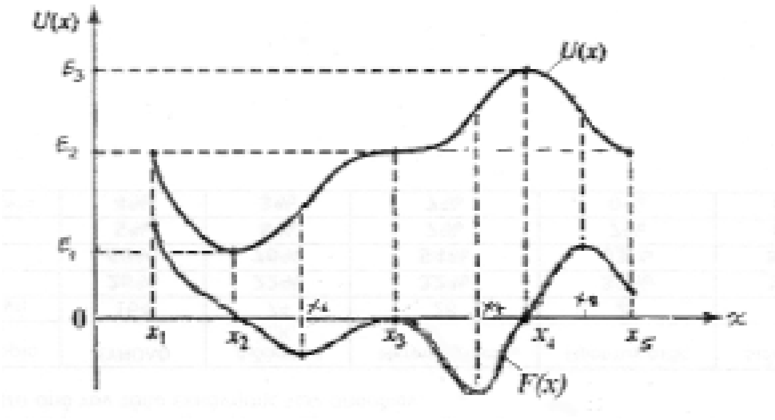
ΘΕΜΑ 1. Η δυναμική ενέργεια σώματος μάζας m απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα μέσα στη περιοχή $[x_1,x_5]$. Βάσει του διαγράμματος αυτού, α) σχεδιάσετε τη δύναμη που δέχεται το σώμα σαν συνάρτηση του x. β) Αν δοθεί στο σώμα ενέργεια $E=(E_1+E_2)/2$, μελετήσετε την κίνηση που κάνει το σώμα (Τα δεδομένα είναι: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, E_1, E_2, E_3).



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΘΕΜΑ 1. α) Στη μια διάσταση, μια συντηρητική δύναμη σχετίζεται με τη δυναμική ενέργεια με τη σχέση,

$$F=-\frac{dU}{dx}.$$

Από τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας παρατηρούμε ότι στα ακρότατα σημεία x_2, x_3, x_4 θα πρέπει η πρώτη παράγωγος να μηδενίζεται, άρα $F(x_2)=F(x_3)=F(x_4)=0$. Όσο για τη δεύτερη παράγωγο θα πρέπει $U''(x_2)>0$, $U''(x_4)<0$, και $U''(x_3)=0$. Το σημείο $x=x_2$ είναι **ευσταθές** σημείο ισορροπίας, ενώ το σημείο $x=x_4$ είναι **ασταθές** σημείο ισορροπίας. Το σημείο $x=x_3$ καλείται **μετασταθές** σημείο ισορροπίας. Συνεπώς η γραφική παράσταση τη δύναμης συναρτήσεις του x θα έχει την ακόλουθη μορφή,



Σημεία **καμπής** είναι σημεία στα οποία η δύναμη έχει ακρότατα, άρα η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται, $U''(x)=0$.

β) Το ερώτημα αυτό αναφέρεται σε ταλάντωση κοντά σε σημείο ισορροπίας και ανήκει σε επόμενο κεφάλαιο.

Συντηρητικές και μη-συντηρητικές δυνάμεις: το συνολικό έργο που παράγουν διάφοροι δυνάμεις επί σώματος ισούται με το άθροισμα των επι μέρους παραγομένων έργων από καθεμιά δύναμη ξεχωριστά,

$$W_{ολ} = W_1 + W_2 + \ldots + W_N$$

έργο συντηρητικών δυνάμεων

$$W_C = W_{1C} + W_{2C} + \ldots$$

$$= -\Delta U_1 - \Delta U_2 - \ldots = -\sum_i \Delta U_i$$

Θεώρ. έργου-ενέργειας: $\Delta K = W_{ολ}$

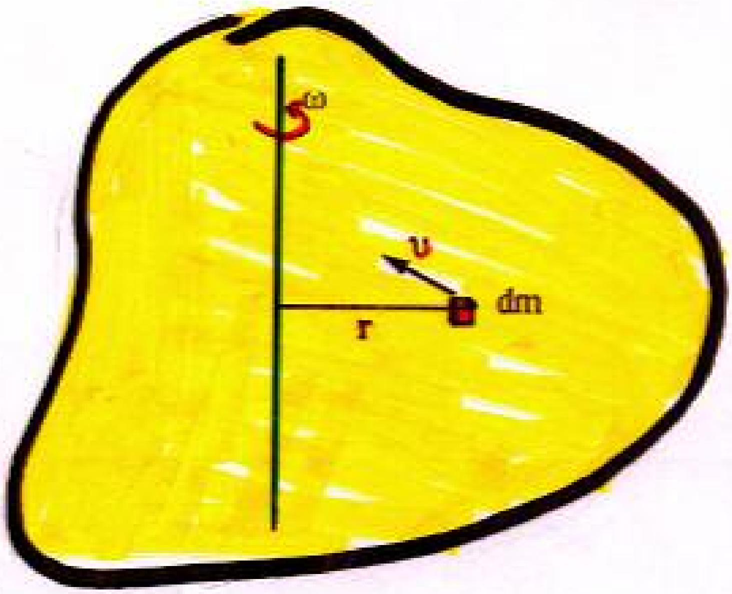
ή $\Delta K + \Sigma \Delta U = W_{NC}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οποιο και αν είναι το έργο W_{NC}, μπορούμε να βρούμε κάποια μορφή ενέργειας που να αντιστοιχεί σ' αυτό το έργο. Για παράδειγμα, το έργο της τριβής μπορεί να δοθεί από την σχέση: $W_f = -\Delta U_{\text{εσωτερικής ενέργειας}}$

Αρχή της διατήρηση της ενέργειας σώματος:
Η ολική ενέργεια ενός σώματος παραμένει σταθερή σε κάθε φυσική μεταβολή,

$$\boxed{\Delta K + \Delta(U_1+U_2+\ldots) + \Delta(\text{άλλων μορφών ενέργειας}) = 0}$$

Κινητική ενέργεια στη περιστροφική κίνηση:



Κινητική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας dm: $\boxed{K_i = \frac{1}{2}dm\upsilon^2}$ $= \frac{1}{2}dm\,\omega^2 r^2$

Κινητική ενέργεια του περιστρεφομένου στερεού σώματος

$$\boxed{K = \sum K_i = \sum \tfrac{1}{2}dm\upsilon^2 = \tfrac{1}{2}\sum dm r^2\omega^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2}$$

Κρούσεις σωματιδίων

2ος νόμος Νεύτωνα :(στη 1 διάσταση)

$$\boxed{F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d\upsilon}{dt}}$$

$$\boxed{F dt = m d\upsilon}$$

$$\boxed{\int_0^t F dt = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} m d\upsilon} = m\left(\upsilon\right)_{\upsilon_0}^{\upsilon}$$

$$\boxed{J = m\upsilon - m\upsilon_o}$$

όπου

$$\boxed{J \equiv \int_0^t F dt \ : \ \text{ώθηση της δύναμης } F}$$

$$\boxed{p \equiv m\upsilon \ : \ \text{ορμή του σώματος } m}$$

Διατήρηση ορμής: Αν η εξωτερική δύναμη είναι μηδέν, τότε η γραμμική ορμή ενός σώματος (ή συστήματος σωμάτων) διατηρείται σταθερή.

$$\boxed{m\upsilon = \text{σταθερή}}$$

Κρούσεις δύο σωματιδίων:

Νόμοι διατήρησης

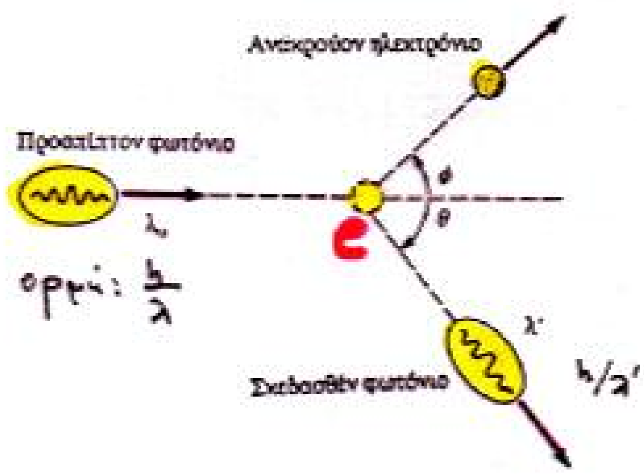
ενέργειας:

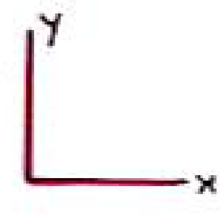
$$\boxed{\sum_{\text{πριν}} \tfrac{1}{2}m\upsilon^2 = \sum_{\text{μετά}} \tfrac{1}{2}m\upsilon'^2 + (\Delta E)}$$

γραμμικής ορμής:

$$\boxed{\sum_{\text{πριν}} m\vec{\upsilon} = \sum_{\text{μετά}} m\vec{\upsilon}'}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **ΦαινόμενοCompton.** Δέσμη φωτονίων (δηλαδή φως) προσπίπτει πάνω σ' ενα νέφος ηλεκτρονίων (ηρεμούντων;). Να βρεθεί η μεταβολή του μήκους κύματος της προσπίπτουσαςς ακτινοβολίας **(σχετικιστική θεώρηση)**





Σχετικιστική ενέργεια σώματος: $E = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2}$

Ορμή φωτονίου: $\frac{h}{\lambda}$

Ενέργεια φωτονίου: $h\nu$

Νόμοι διατήρησης κατά τη σύγκρουση των δύο "σωμάτων"

Ενέργειας:

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} \quad (1)$$

ορμής (x-άξων):

$$\frac{h}{\lambda} + 0 = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + p\cos\varphi \quad (2)$$

ορμής (y-άξων):

$$0 + 0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\theta - p\sin\varphi \quad (3)$$

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

$\lambda_C \equiv \frac{h}{mc} = 0.0242°A$: **μήκος κύματος Compton**

ΚΑΛΥΦΘΕΙΣΑ ΥΛΗ:
R.A. Serway - Κεφάλαια 7,8,9
H.D. Young - Κεφάλαια 6,7,8