ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Μ. ΒΕΛΓΑΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ / ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ / ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Στη σειρά των φροντιστηρίων αυτών καταβάλλεται μια προσπάθεια να κατανοηθούν και να εμπεδωθούν κάποιες έννοιες και εφαρμογές του μαθήματος της Φυσικής ΙΙ και επ' ουδενί λόγω μπορεί να αποτελέσουν οδηγό της ύλης του μαθήματος.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ: ***είναι το αίτιο των ηλεκτρικών δυνάμεων (εμπειρική αντίληψη).***

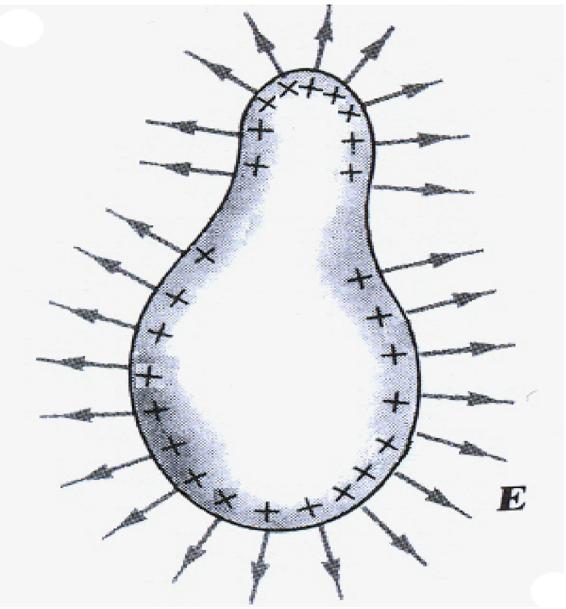
ΑΓΩΓΟΙ - ΜΟΝΩΤΕΣ:

Οι αγωγοί επιτρέπουν την ελεύθερη διακίνηση του ηλεκτρικού φορτίου μέσα στην ύλη, ενώ οι μονωτές δεν το επιτρέπουν.

ΦΟΡΕΙΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ:

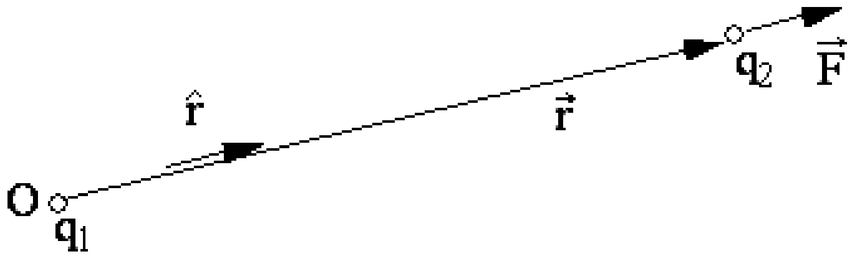
Μέταλλα: ελεύθερα ηλεκτρόνια
Ηλεκτρολύτες: ελεύθερα ιόντα
Ημιαγωγοί: προσμίξεις σε μονωτικό υλικό

Κατανομή ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε αγωγό και διαμόρφωση του ηλ. → πεδίου μέσα/έξω του αγωγού



***ΝΟΜΟΣ COULOMB*:**

Σημειακά φορτία q_1, q_2 σε απόσταση $\vec{r}$ μεταξύ τους



$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}, \text{ όπου } k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9\times 10^9 \frac{Nt\cdot m^2}{Cb^2}$$

και $\varepsilon_o = 8.85\times 10^{-12} \dfrac{Cb^2}{Nt\cdot m^2}$: *διηλεκτρική σταθερά κενού*

ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΦΟΡΤΙΟΥ:

Γραμμική πυκνότης φορτίου: $\lambda = \dfrac{Q}{L} = \dfrac{dQ}{dL}$ (L: μήκος γραμμής)

Επιφαν. πυκνότης φορτίου: $\sigma = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{dQ}{dA}$ (A: εμβαδόν επιφ)

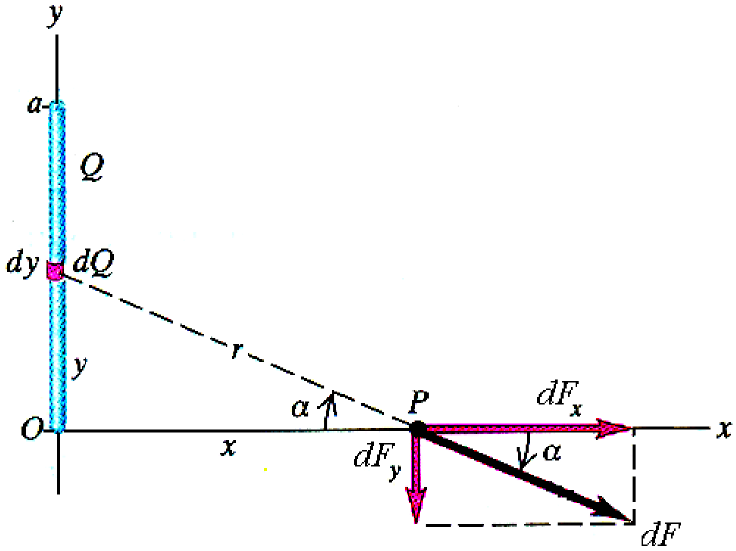
Πυκνότης φορτίου όγκου: $\rho = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{dQ}{dV}$ (V: όγκος σώματος)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ν. COULOMB:

Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται πάνω σε φορτίο q στο σημείο P του σχήματος από φορτισμένη ράβδο συνολικού φορτίου Q. Είναι γνωστά η απόσταση x και το μήκος της ράβδους α.

Λύση:

Επιλέγομε το σύστημα συντεταγμένων x-y κατά το σχήμα.



Η ασκούμενη δύναμη από το στοιχειώδες φορτίο $dQ=\lambda dy=\frac{Q}{a}dy$*, είναι:*

$$d\vec{F} = k\frac{qdQ}{x^2+y^2}\hat{r}$$

Οι συνιστώσες κατά τους άξονες x και y είναι:

$$dF_x = dF\cos\alpha = \frac{kqdQ}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = qk\lambda\frac{xdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$dF_y = dF\sin\alpha = \frac{kqdQ}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = qk\lambda\frac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνομε:

$$F_x = qk\lambda x\int_0^a \frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = kq\lambda x\left[\frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{y=0}^{y=a} = \frac{kqQ}{x\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$F_y = qk\lambda\int_0^a \frac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = kq\lambda\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{y=0}^{y=a} = -\frac{kqQ}{a\sqrt{x^2+a^2}}$$

ή

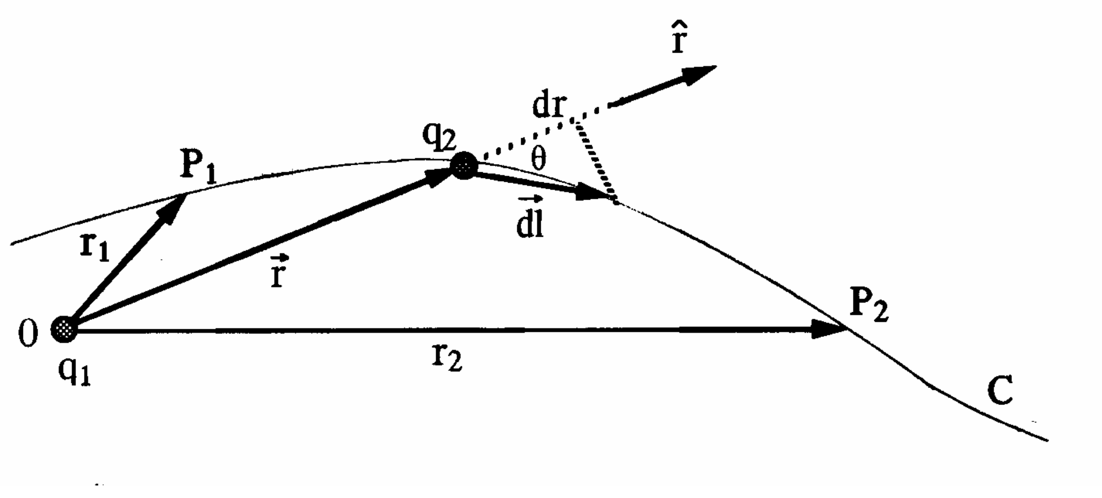
$$\vec{F} = \frac{kqQ}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{\vec{i}}{x} - \frac{\vec{j}}{a}\right)$$

Για $x>>1$, *έπεται* $F_x \to \frac{kQ}{x^2}$ *και* $F_y \to -\frac{kQ}{ax}$.

(γιατί δεν μπορούμε να εφαρμόσομε το ν. Gauss?)

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΗΜΕΙΑΚΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ

Θεωρούμε δύο σημειακά φορτία q_1, q_2 *σε απόσταση r μεταξύ τους.*



Η μεταβολή της (ηλεκτροστατικής) δυναμικής ενέργειας *του φορτίου q_2 όταν τούτο μετακινείται από το σημείο P_1 στο σημείο P_2 ορίζεται ως εξής (θεωρώντας το q_1 ακίνητο):*

$$\Delta U \equiv U(P_2) - U(P_1) = -W_{P_1 \to P_2} \qquad (1)$$

όπου το έργο W ορίζεται ως

$$W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Η δύναμη $\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$ ***είναι συντηρητική.***

Παρατηρούμε ότι: $\vec{F} \cdot d\vec{l} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \cdot d\vec{l}$

και $\hat{r} \cdot d\vec{l} = 1 \cdot dl\cos\theta = dr$***, άρα το έργο ισούται,***

$$W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} k\frac{q_1 q_2}{r^2} dr = kq_1 q_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}.$$

Το ολοκλήρωμα ισούται,

$$\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \left[-\frac{1}{r}\right]_{r=r_1}^{r=r_2} = -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1},$$

οπότε η δυναμική ενέργεια (1) γράφεται:

$$U(r_2) - U(r_1) = -kq_1q_2(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}).$$

Εστω ότι δίδονται οι εξής συνοριακές συνθήκες: στο σημείο $r_1=\infty$ υποθέτουμε $U(r_1=\infty)=0$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται (παραλείποντας το δείκτη 2 από το r).

$$U(r) = \frac{kq_1q_2}{r}$$

Κατ' επέκταση, η δυναμική ενέργεια (ή ενέργεια αλληλεπίδρασης) συστήματος N σημειακών φορτίων είναι:

$$U(r) = \sum_{i,j=1}^{N} k\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

όπου r_{ij} είναι η απόσταση των σημειακών φορτίων q_i και q_j .

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΦΟΡΤΙΩΝ:
είναι το ολικό έργο που δαπανάται για να συγκεντρωθούν τα φορτία στο χώρο όγκου Ω και δίδεται από τη σχέση συναρτήσει του πεδίου,

$$U = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon_o E^2 d\Omega$$

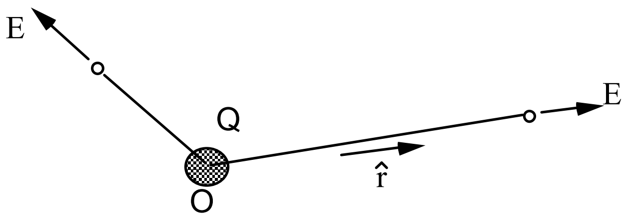
όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στον όγκο του πεδίου Ω. Η ποσότης $\frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$ *καλείται πυκνότης ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου*

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ: ***είναι ο χώρος μέσα στον οποίο φερόμενο ένα ηλεκτρικό φορτίο q (που καλείται υπόθεμα) υφίσταται ηλεκτρική δύναμη.***

ΕΝΤΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ:
Ορίζεται ως η ασκούμενη δύναμη στη μονάδα φορτίου του υποθέματος,

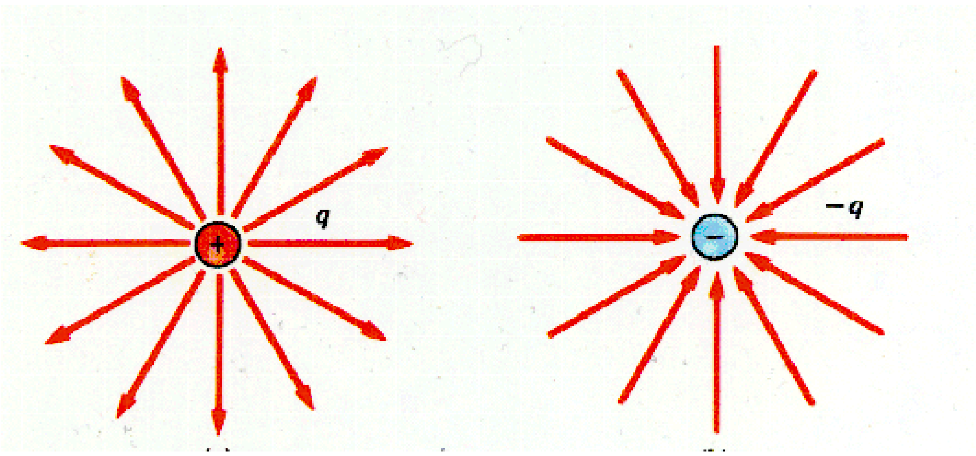
$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} \quad \text{(μονάδες: Nt/Cb ή Volt/m)}$$

Παράδειγμα: Περίπτωση σημειακού φορτίου Q



$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Η μορφή του πεδίου γύρω από το φορτίο

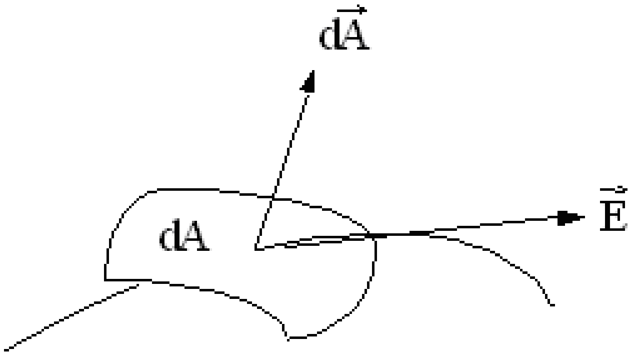


ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΦΟΡΤΙΟΥ:

$$\vec{E} = \int_{\Sigma} k\frac{dQ}{r^2}\hat{r}$$

Ηλεκτρική ροή:

Η ποσότης $d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot dA\cos\theta$ *ορίζεται ως στοιχειώδης ηλεκτρική ροή που διαπερνά τη στοιχειώδη επιφάνεια* $d\vec{A}$ (μονάδες ηλ. ροής: $Nt\cdot m^2/Cb$ ή $Volt\cdot m$)

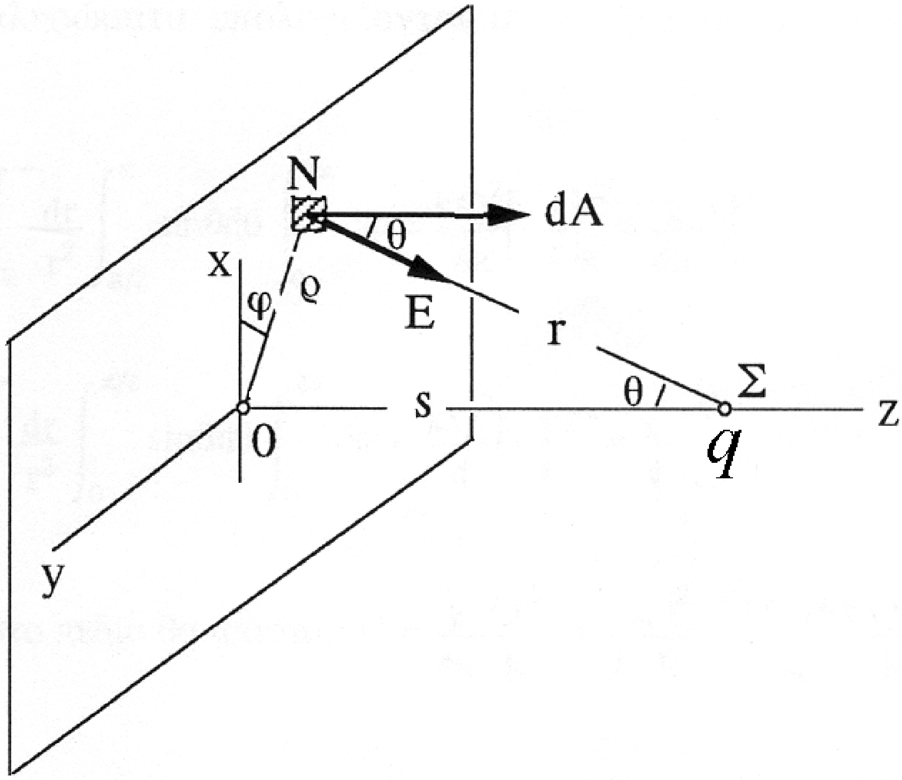


Η συνολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια επιφάνεια Α ορίζεται ως $\Phi_E = \int_A \vec{E}\cdot d\vec{A}$, όπου το διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στην επιφάνεια Α. Το $\vec{E}$ είναι η τιμή του πεδίου στη στοιχειώδη περιοχή $d\vec{A}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Σημειακό φορτίο q βρίσκεται σε απόσταση s από επίπεδο απείρων διαστάσεων. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή που διαπερνά το επίπεδο.

Λύση:

Θεωρούμε ότι το επίπεδο είναι κατακόρυφο και ταυτίζεται με το x-y επίπεδο. Ακόμη υποθέτουμε ότι η κάθετος από το φορτίο q ταυτίζεται με τον άξονα z και ότι το ίχνος 0 της καθέτου από το σημείο Σ στο επίπεδο σαν αρχή των αξόνων. Έστω στοιχειώδη επιφάνεια στο επίπεδο x-y, εμβαδού *dA=dxdy, στο σημείο Ν. Ως διάνυσμα το εμβαδόν dA είναι παράλληλο με τον άξονα z.*



Η ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια dA είναι $d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA\cos\theta$, *όπου cosθ=s/r (γιατί;) και Ε* είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο Ν, δηλ. $E = k\dfrac{q}{r^2}$. Η συνολική ροή που διαπερνά το επίπεδο x-y είναι: $\Phi = \iint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iint EdA\cos\theta$. *Το ολοκλήρωμα είναι διπλό και υπολογίζεται πάνω στο* x-y επίπεδο.

Θα δουλέψουμε σε πολικές συντεταγμένες: dA=dxdy=ρdρdφ με όρια ρ: 0→∞, φ: 0→2π. Τότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\Phi = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} k\frac{q}{r^2}\rho d\rho d\varphi \frac{s}{r} = kqs\int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(s^2+\rho^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= kqs\left[\frac{-1}{\sqrt{s^2+\rho^2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} 2\pi = 2\pi kq = \frac{q}{2\varepsilon_o}!$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $r = \sqrt{s^2+\rho^2}$

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ: *η δυναμική ενέργεια δια του φορτίου του υποθέματος,*

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{q}} \quad (\text{μονάδες: Volts})$$

Η δυναμική ενέργεια ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{U(P_2) - U(P_1)} = -\mathrm{q} \int_{\mathrm{P_1}}^{\mathrm{P_2}} \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\mathrm{l}}$$

Στη 1-διάσταση, η σχέση αυτή γράφεται

$$\mathrm{U(x_2) - U(x_1)} = -\mathrm{q} \int_{\mathrm{x_1}}^{\mathrm{x_2}} \mathrm{E} \cdot d\mathrm{x}$$

η οποία ακόμη γράφεται,

$$\lim_{(x_2-x_1)\to 0} \frac{U(x_2)-U(x_1)}{(x_2-x_1)} = -q \lim_{(x_2-x_1)\to 0} \frac{1}{(x_2-x_1)} \int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx$$

Το πρώτο μέρος παριστάνει τη παράγωγο της δυναμικής ενέργειας, ενώ το δεύτερο μέρος ισούται με την ένταση του πεδίου E(x) *[διότι, $E(x) \cong E(\xi)$ για $\xi \in (x_1, x_2)$, οπότε το δεύτερο μέρος γράφεται:* $\lim_{(x_2 - x_1) \to 0} E(\xi) \frac{1}{(x_2 - x_1)} \int_{x_1}^{x_2} dx = \lim_{(x_2 - x_1) \to 0} E(\xi) = E(x)$*].*

Συνεπώς η προηγούμενη σχέση γράφεται,

$$-\frac{dU(x)}{dx} = qE(x) \qquad (1)$$

Εισάγοντας το δυναμικό V προκύπτει

$$-\frac{dV(x)}{dx} = E(x) \qquad (2)$$

Στις 3-διαστάσεις, οι σχέσεις (1) και (2) παίρνουν τη μορφή,

$$-\vec{\nabla}U(x,y,z) = q\overline{E}(x,y,z)$$

$$-\vec{\nabla}V(x,y,z) = \vec{E}(x,y,z) \qquad (3)$$

Παράδειγμα: *Δυναμικό στο σημείο Σ σε απόσταση r από σημειακό φορτίο Q.*

Οι εξισώσεις (2) ή (3) γράφονται για την συντεταγμένη r,

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = E(r) \qquad (4)$$

όπου οι συναρτήσεις V ή E είναι συναρτήσεις των σφαιρικών συντεταμένων (r,θ,φ) γενικώς.

Στη περίπτωση του σημειακού φορτίου έχομε: $E = k\frac{Q}{r^2} = E(r)$, δηλ. η ένταση E (όπως και το δυναμικό V) εξαρτάται μόνο από το r, οπότε η (4) ολοκληρώνεται,

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E dr$$

όπου $V_2=V(r_2)$ και $V_1=V(r_1)$. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται,

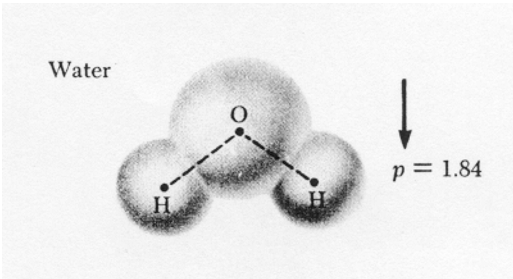
$$V_2 - V_1 = -kQ\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{kQ}{r_2} - \frac{kQ}{r_1}$$

Αν πάρουμε σαν συνοριακές συνθήκες: $r_1=\infty$, $V(r_1=\infty)=0$, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται (παραλείποντας τον δείκτη 2 από το r):

$$V(r) = \frac{kQ}{r}$$

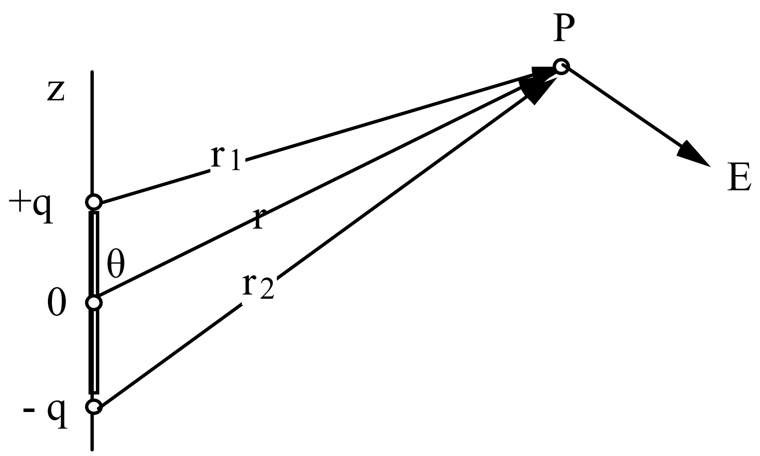
Το ηλεκτρικό δίπολο

Θεωρούμε δύο αντίθετα φορτία +q, -q που βρίσκονται σε απόσταση α μεταξύ τους. Ορίζεται σαν διπολική ροπή του διπόλου η ποσότης p=αq.



Η διπολική ροπή του μορίου H_2O είναι: p=1.84Debyes = 6.1×10^{-30} Cb-m.

Υπολογίζουμε το δυναμικό και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P που απέχει απόσταση r από το κέντρο του διπόλου (που λαμβάνεται ως αρχή των αξόνων, 0)



Δυναμικό στο σημείο P:

$$V = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

Για α<<r, ισχύει: $r_2 - r_1 \approx a\cos\theta$ *και* $r_2 r_1 \approx r^2$ *, οπότε η σχέση γράφεται,*

$$\boxed{V(r,\theta) = k\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

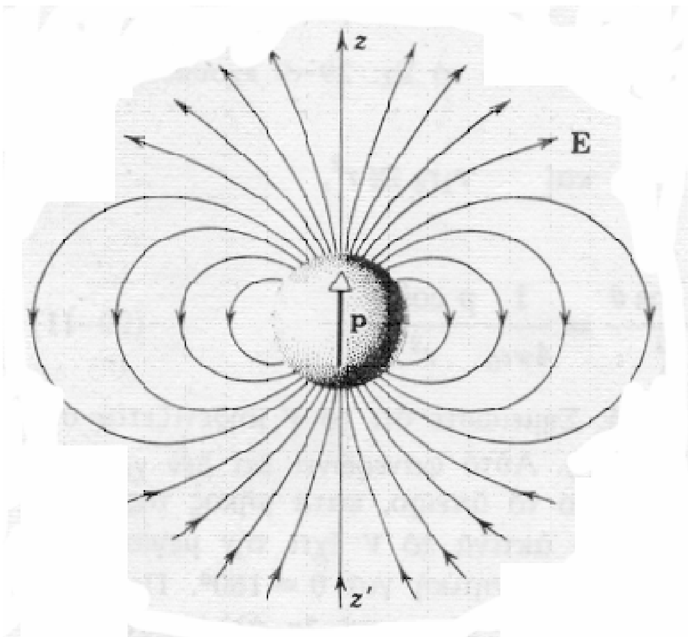
Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta})kp\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$= kp(\hat{r}\frac{2\cos\theta}{r^3} + \hat{\theta}\frac{\sin\theta}{r^3})$$

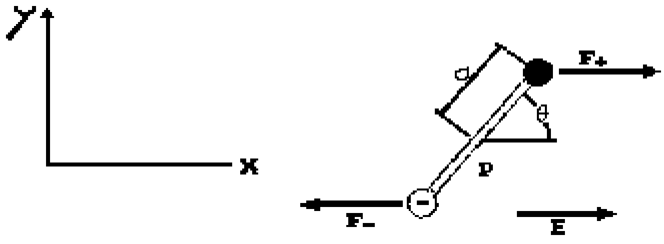
άρα

$$\boxed{\vec{E} = \frac{kp}{r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})}$$



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΙΠΟΛΟΥ ΜΕΣΑ ΣΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ Ε:

Το ζεύγος των δυνάμεων πάνω στο δίπολο



Η ροπή του ζεύγους:

$$\vec{\tau} = \vec{\alpha} \times \vec{F}_{+} = \vec{\alpha} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Στη περίπτωση του σχήματος έχομε:
$\vec{\tau} = -pE\, sin\theta\, \hat{z}$, *όπου η γωνία θ ορίζεται ως προς τη διεύθυνση του πεδίου.*

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του διπόλου όταν περιστραφεί από γωνία $\theta_1 \rightarrow \theta_2$, ως προς το εξωτερικό πεδίο Ε, είναι

$$U(\theta_2) - U(\theta_1) = -W(\theta_1 \rightarrow \theta_2) = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} pE\, sin\theta\, d\theta = pE \int_{\theta_1}^{\theta_2} sin\theta\, d\theta$$

$$= -pE(cos\theta_2 - cos\theta_1)$$

Αν πάρουμε ως $\theta_1=90^o$ και ορίσουμε $U(\theta_1)=0$, η δυναμική ενέργεια του διπόλου μέσα σε εξωτερικό πεδίο Ε παίρνει τη μορφή (παραλείποντας τον δείκτη 2 από τη γωνία),

$$\boxed{U(\theta) = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

δηλ. η δυναμική ενέργεια του διπόλου γίνεται ελάχιστη όταν $\theta=0$, συνεπώς τα δίπολα τείνουν να προσανατολίζονται κατά τη διεύθυνση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου Ε.

(Σ' αυτό ακριβώς το γεγονός στηρίζεται και η ***πόλωση του διηλεκτρικού****, δηλ. ο συλλογικός προσανατολισμός όλων των διπολικών μορίων του διηλεκτρικού υλικού κατά την διεύθυνση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου Ε).*