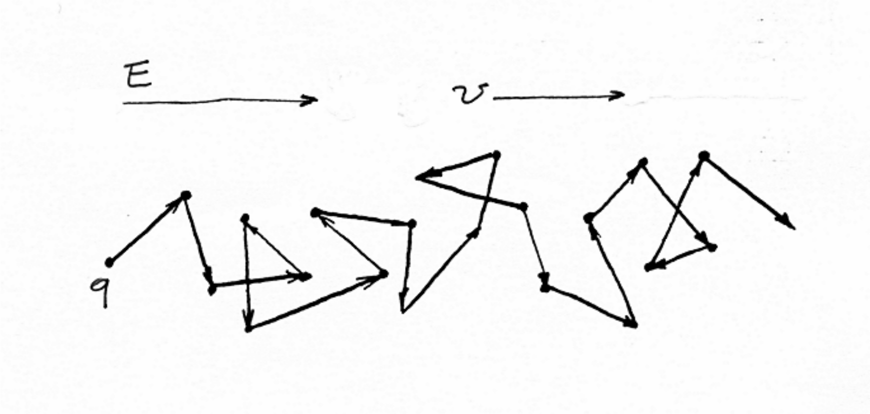
ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

• ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΣ

Μεταλλικοί αγωγοί: τα ελεύθερα φορτία είναι τα ηλεκτρόνια σθένους του μετάλλου.



Πυκνότης ρεύματος (το ρεύμα που διαπερνά μια κάθετη διατομή του αγωγού ανά μονάδα επιφανείας του)

$$J=I/A$$

όπου Α το εμβαδόν της κάθετης διατομής. Στη περίπτωση ενός μόνο είδους ελευθέρων φορτίων,

$$J=qnυ$$

*όπου **υ** είναι η ταχύτης μετατόπισης και **n** η συγκέντρωση των φορτίων.*

Αν υποθέσομε ότι η μέση δύναμη f που ασκείται πάνω σ'ένα ελεύθερο φορτίο από το εξωτερικό πεδίο Ε είναι

$$f=qE$$

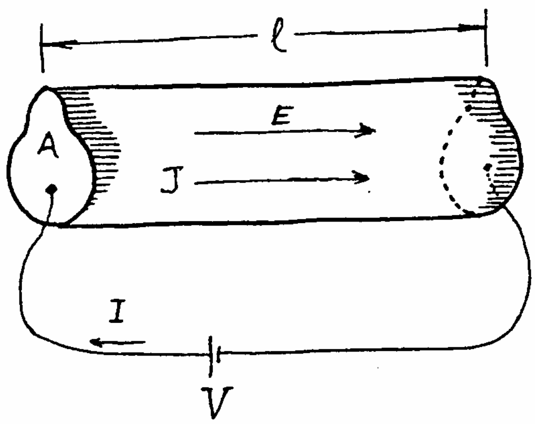
τότε η μέση ταχύτης μετατόπισης θα είναι ανάλογη της f (γιατί;), δηλ.

$$\upsilon=\mu f=\mu qE$$

Η σταθερά αναλογίας μ καλείται συντελεστής ευκινησίας, οπότε η πυκνότης ρεύματος γράφεται

$$J=q^2 n\mu E=\sigma E \qquad (1)$$

Η σχέση (1) καλείται νόμος του Ohm. Η σταθερά $\boldsymbol{\sigma=\mu n q^2}$ *καλείται ηλεκτρική αγωγιμότης και η ποσότης* $\boldsymbol{\rho=1/\sigma}$ *ειδική αντίσταση*



Αν V είναι η εφαρμοζόμενη τάση στα άκρα του αγωγού, τότε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι E=V/l, οπότε η (1) γράφεται

$$J=\sigma E=\sigma V/l$$

Αν I είναι η ένταση του ρεύματος που διαπερνά κάθετα την διατομής του αγωγού εμβαδού A, τότε I=JA, άρα

$$I = \frac{\sigma A}{l} V = \frac{V}{R}$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή σαν νόμος του Ohm. Η σταθερά R καλείται αντίσταση του αγωγού (μονάδες 1 Ohm). Οι αγωγοί που υπακούουν στον νόμο του Ohm καλούνται ωμικοί αγωγοί ή αντιστάσεις. Συμβολική παράσταση αντίστασης:

Για ραβδόμορφο αγωγό ισχύει $R = \frac{l}{\sigma A} = \rho \frac{l}{A}$

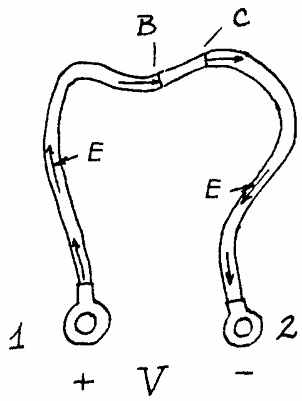
- *Ηλεκτρεγερτική δύναμη:* $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$

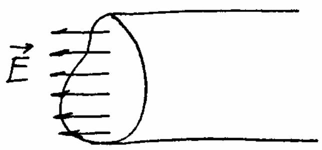
ισούται με το έργο που καταναλίσκεται κατά την μετακίνηση του φορτίου q=1 κατά μήκος ενός κλειστού δρόμου C μέσα στο πεδίο.

Τάση (ή διαφορά δυναμικού) μεταξύ των σημείων Α και Β

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον αγωγό είναι παντού το ίδιο κατά μέτρον (αν όμως I=0 τότε E=0!)

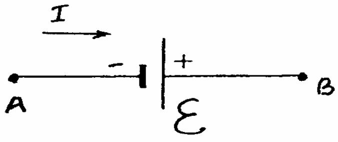




Αν $I_B \neq I_C$, τότε θα είχαμε συσσώρευση φορτίο στο σημείο Β ή C, που είναι άτοπο.

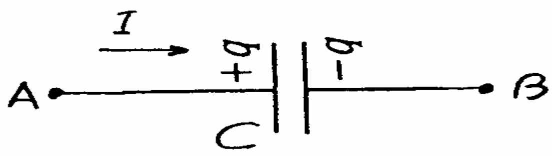
- *Στοιχεία κυκλώματος*

1. *Ηλεκτρική πηγή:* $V_B - V_A = \mathcal{E} - Ir$

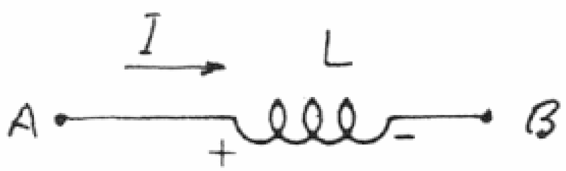


2. Ηλεκτρική αντίσταση: $V_A\text{-}V_B=IR$

3. Πυκνωτής: $V_A\text{-}V_B=q/C$ (φόρτιση)

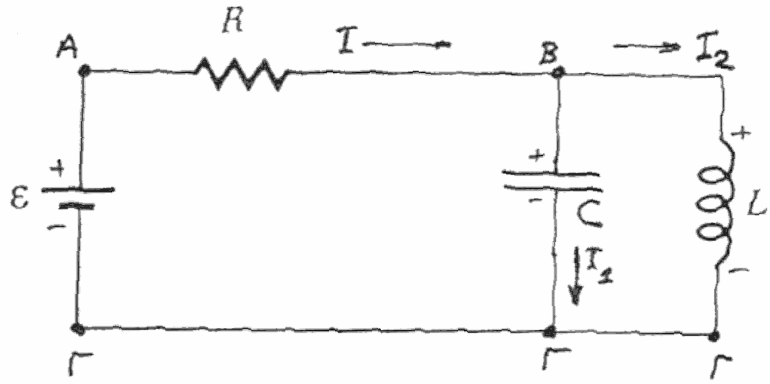


4. Πηνίο: $V_A\text{-}V_B=LdI/dt$ (φόρτιση)



- Κανόνες (ή νόμοι) Kirchhoff

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Θεωρούμε το ακόλουθο κύκλωμα



- *κύκλωμα ΑΒCΓΕΑ (2ος κανόνες Kirchhoff):*

$(V_A-V_B)+(V_B-V_Γ)+(V_Γ-V_A)=0$

ή $$IR+\frac{q}{C}-\varepsilon=0 \qquad (1)$$

όπου q είναι το φορτίο του πυκνωτή.

- *κύκλωμα ΑΒLΓΕΑ (2ος κανόνες Kirchhoff):*

$(V_A-V_B)+(V_B-V_Γ)+(V_Γ-V_A)=0$

ή $$IR+L\frac{dI_2}{dt}-\varepsilon=0 \qquad (2)$$

- *κύκλωμα ΒLΓCΒ (2ος κανόνες Kirchhoff):*

$(V_B-V_Γ)+(V_Γ-V_A)=0$

ή $$L\frac{dI_2}{dt}-\frac{q}{C}=0 \qquad (3)$$

(στη πραγματικότητα η (3) προκύπτει αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2))

- *κόμβος Α (1ος κανόνες Kirchhoff):*

$$I=I_1+I_2 \qquad (4)$$

Θεωρούμε το σύστημα των εξ. (2)-(4). Επειδή $I_1=\frac{dq}{dt}$, παραγωγίζοντας την (3) ως προς t λαμβάνουμε:

$$I_1 = LCI_2'' \qquad (5)$$

όπου ο τόνος σημαίνει παράγωγο ως προς t. Αντικαθιστώντας τις (4)-(5) στη (2) παίρνομε

$$LCI_2'' + \frac{L}{R} I_2' + I_2 = \frac{\varepsilon}{R} \qquad (6)$$

Επίλυση της διαφ. εξίσωσης (6): Η γενική λύση της (5) ισούται με το άθροισμα των λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης:

$$LCI_2'' + \frac{L}{R} I_2' + I_2 = 0 \quad (7)$$

συν μια μερική λύση της (6), η οποία εν προκειμένω είναι μια σταθερά, δηλ. (E/R).

Για να λύσουμε την ομογενή εξίσωση (7), δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής: $I_2 = Ae^{\lambda t}$, *όπου A και λ σταθερές που θα προσδιοριστούν. Αντικαθιστώντας την λύση αυτή στην (7), προκύπτει το τριώνυμο,*

$$LC\lambda^2 + \frac{L}{R}\lambda + 1 = 0$$

οι ρίζες του οποίου είναι

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(i) Αν η διακρίνουσα είναι θετική, τότε η λύση της (7) έχει τη μορφή,

$$I_2 = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (8)$$

η οποία για $t \to \infty$ τείνει στο μηδέν (η απεριοδική λύση).

(ii) Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική, ορίζουμε $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2$, οπότε οι δύο ρίζες γράφονται:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm i\omega$$

(i είναι η μιγαδική μονάδα). Τότε η λύση της (7) έχει τη μορφή (περιοδική λύση),

$$I_2 = e^{-\frac{t}{2RC}}(Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) = I_{02}e^{-\frac{t}{2RC}}\cos(\omega t + \varphi)^{\blacklozenge} \quad (9)$$

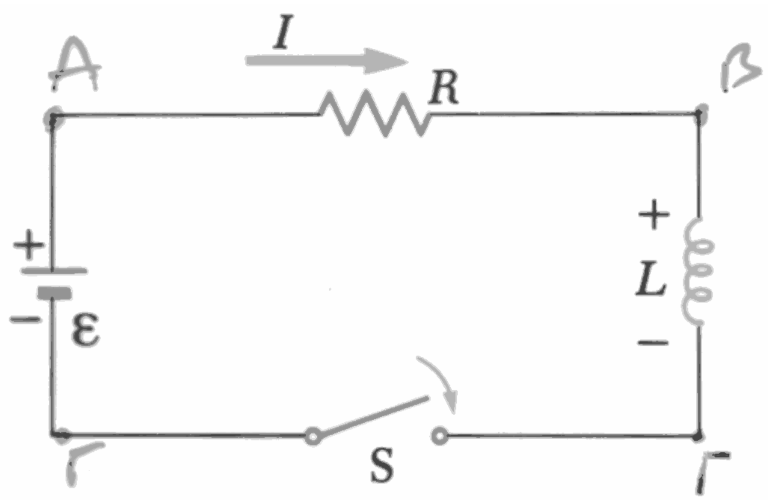
(iii) Αν η διακρίνουσα ισούται με μηδέν, δηλ. $L=4R^2C$, τότε η λύση της (7) έχει τη μορφή

♦ *Η μετατροπή των εκθετικών όρων σε τριγωνομετρική συνάρτηση είναι απλό εγχείρημα: Κάνοντας χρήση της ταυτότητας Euler, οι εκθετικοί όροι γράφονται:* $Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B(\cos\omega t - i\sin\omega t) = (A+B)\cos\omega t + i(A-B)\sin\omega t$ $= (A+B)[\cos\omega t + \frac{i(A-B)}{(A+B)}\sin\omega t]$. *Ορίζουμε:* $\tan\varphi = -\frac{i(A-B)}{(A+B)}$, *οπότε η προηγούμενη σχέση ισούται με:* $= \frac{(A+B)}{\cos\varphi}[\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t] = I_{02}\cos(\omega t + \varphi)$, *όπου $I_{02}=(A+B)/\cos\varphi$, δηλ. προκύπτει η (9).*

$$I_2 = Ae^{-t/(2RC)} + Bte^{-t/(2RC)}. \qquad (10)$$

Τελικά η γενική λύση της (6) θα είναι οι λύσεις (8)-(10) στις οποίες θα πρέπει να προστεθεί και η μερική λύση της (6), δηλ. $\frac{\mathcal{E}}{R}$. *Αντίστροφα, αντικαθιστώντας το* I_2 *στις (5)-(4), παίρνουμε τα ρεύματα* I_1 *και* I, *αντίστοιχα, ενώ η (3) δίδει το* q.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το κύκλωμα RL



Κλείνομε τον διακόπτη S στη χρονική στιγμή t=0. Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα Kirchhoff έχομε,

$$(V_A - V_B) + (V_B - V_\Gamma) + (V_\Gamma - V_A) = 0$$

ή

$$IR + L\frac{dI}{dt} - \mathcal{E} = 0 \qquad (1)$$

Η (1) ολοκληρώνεται εύκολα, με αρχικές συνθήκες t=0, I=0. Πράγματι, η (1) γράφεται,

$$L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - IR$$

ή

$$\frac{dI}{(\mathcal{E}/R) - I} = \frac{R}{L}dt,$$

την οποία ολοκληρώνοντας παίρνομε,

$$ln\,(\frac{\varepsilon}{R} - I\,) = -\frac{R}{L}t + \varphi,$$

όπου φ=σταθερά ολοκλήρωσης. Εφόσον για t=0, I=0, έπεται φ=ln(E/R) ή $ln\,(\frac{\varepsilon}{R} - I\,) = -\frac{R}{L}t + ln\,\frac{\varepsilon}{R}$, *και αντιστρέφοντας τη σχέση, λαμβάνουμε*

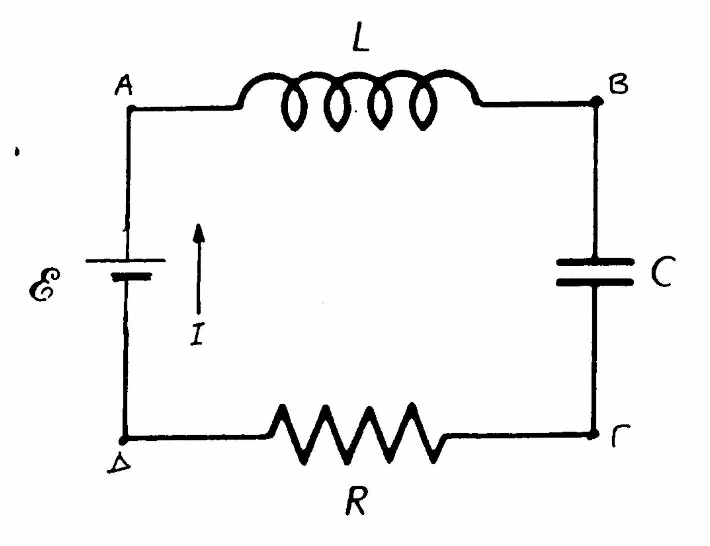
$$I = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-(R/L)t}\,)$$

Παρατηρούμε ότι για $t \to \infty$, το ρεύμα τείνει ασυμπτωτικά προς τη τιμή ($\mathcal{E}/R$).

Η ποσότης τ=L/R έχει διαστάσεις χρόνου και καλείται σταθερά χρόνου (ή σταθερά αποκατάστασης) του κυκλώματος. Η ποσότης 5τ δηλώνει χονδρικά τον χρόνο που απαιτείται για να αποκατασταθεί το 99.4% της τελικής κατάστασης του κυκλώματος.

- ***Παράδειγμα**: το κύκλωμα RLC*

Θεωρούμε τα στοιχεία R,L,C συνδεδεμένα σε σειρά με dc πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$.



Εφαρμόζουμε τον 2^o *κανόνα Kirchhoff στο κύκλωμα ΑΒΓΔ* $\mathcal{E}$ *Α:*

$$(V_A-V_B)+(V_B-V_\Gamma)+(V_\Gamma-V_\Delta)+(V_\Delta-V_A)=0$$

ή

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{C}+IR-\mathcal{E}=0 \qquad (1)$$

οπότε παραγωγίζοντας την (1) ως προς t και λαμβάνοντας υπόψιν ότι I=dq/dt, παίρνουμε

$$I''+\frac{R}{L}I'+\frac{1}{LC}I=0 \qquad (2)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παράγωγο ως προς t.

Έχουμε επιλύσει την ομογενή διαφορική εξίσωση (2) και είχαμε βρει διάφορες λύσεις. Για παράδειγμα, στη περίπτωση της περιοδικής λύσης είχαμε βρει

$$I = I_o e^{-(R/2L)t} cos(\omega t + \varphi) \qquad (3)$$

όπου (I_o,φ) αυθαίρετες σταθερές προσδιοριζόμενες από τις αρχικές συνθήκες, ενώ $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$ *είναι η συχνότητα ταλάντωσης. Η συχνότητα* $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ *καλείται ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος*

Αν απλώς κάναμε αντικατάσταση του I=dq/dt στην (1), θα είχε προκύψει η εξίσωση

$$q'' + \frac{R}{L} q' + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}}{L} \qquad (4)$$

η οποία είναι μη-ομογενής (αλλά με σταθερό μη-γραμμικό όρο). Οι λύσεις της (4) είναι το άθροισμα των λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης [της μορφής (2)] συν μια μερική λύση της (4) [η οποία εν προκειμένω είναι $\mathcal{E}$ */L], οπότε (ας πούμε) για περιοδική λύση θα έχουμε*

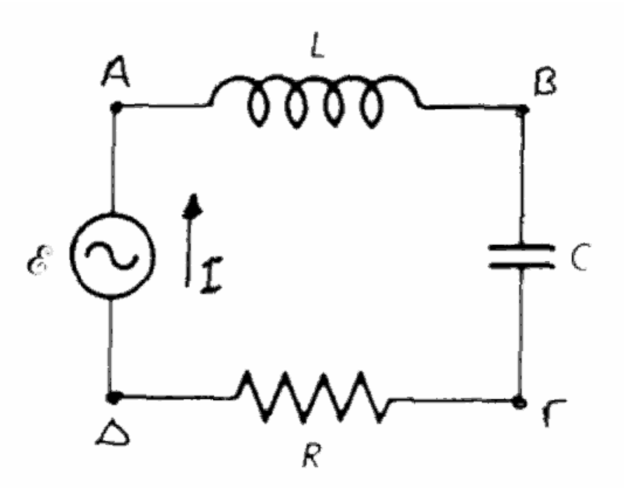
$$q = q_o e^{-(R/2L)t} sin(\omega t + \delta) + \frac{\mathcal{E}}{L} \qquad (5)$$

όπου (q_o,δ)αυθαίρετες σταθερές προσδιοριζόμενες *από τις αρχικές συνθήκες και* $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2}$ *είναι η συχνότητα ταλάντωσης.*

Αφήνεται σαν άσκηση να επαληθεύσετε ότι η λύση (5) παρέχει τη λύση (3).

- ***Παράδειγμα****: κύκλωμα RLC σε ac τάση*

Θεωρούμε τα στοιχεία R,L,C συνδεδεμένα σε σειρά με πηγή ac τάσης, $\mathcal{E}(t)=V_o \sin\omega t$.



Εφαρμόζουμε τον 2^o *κανόνα Kirchhoff στο κύκλωμα ΑΒΓΔ* $\mathcal{E}$ *Α:*

$$(V_A-V_B)+(V_B-V_\Gamma)+(V_\Gamma-V_\Delta)+(V_\Delta-V_A)=0$$

ή

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{C}+IR-V_o \sin\omega t = 0. \qquad (1\alpha)$$

Για την επίλυση της (1α) ακολουθούμε την ίδια πορεία με εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος, οπότε προκύπτει η εξίσωση,

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\omega V_o cos\omega t. \qquad (2\alpha)$$

Όμως τώρα δεν μας ενδιαφέρει και πολύ η λύση της ομογενούς εξίσωσης, διότι ο παράγων απόσβεσης $e^{-\frac{R}{2C}t}$ μηδενίζει πολύ γρήγορα τη λύση αυτή. Κυρίως μας ενδιαφέρει η μερική λύση της (2α), η οποία εν προκειμένω θα έχει τη μορφή I(t)=Asin(ωt-φ) { ή Acos(ωt-φ), ή Asin(ωt+φ), κλπ}, όπου (A,φ) είναι σταθερές που θα πρέπει να προσδιοριστούν αντικαθιστώντας τη λύση αυτή στην (2α).

Αφήνεται σαν άσκηση να αποδειχθεί ότι (βλέπε υποσημείωση):

$$A = \frac{V_o}{\sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}}, \quad tan\varphi = \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R}$$

Η ποσότητα $Z = \sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}$ καλείται εμπέδηση ή σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος, *ενώ η ποσότης* $X_C = \frac{1}{\omega C}$ *καλείται χωρητική αντίσταση και η ποσότης* $X_L = \omega L$ *επαγωγική αντίσταση. Τα μεγέθη Z,* X_C*,* X_L *μετρώνται σε Ohms. Γενικά, αν η εφαρμοζόμενη ac τάση είναι της μορφής* $\mathcal{E}(t)=V_o \sin\omega t$*, τότε η εμπέδηση του κυκλώματος Z ορίζεται από τη σχέση:*

$$I = \frac{V_0}{Z} \sin(\omega t + \varphi)^{®}.$$

® *Πράγματι, αντικαθιστώντας τη λύση I(t)=Asin(ωt-φ) στην (2α) παίρνουμε:* $-\omega^2 A \sin(\omega t - \varphi) + \frac{R}{L}\omega A \cos(\omega t - \varphi)$ $+\frac{1}{LC} A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{L}\omega V_o \cos\omega t$ *. Αναπτύσσοντας τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις παίρνομε:*
$A(\frac{1}{LC}\text{-}\omega^2)(\sin\omega t \ \cos\varphi - \cos\omega t \ \sin\varphi) + \frac{R}{L}\omega A(\cos\omega t \ \cos\varphi + \sin\omega t \ \sin\varphi) = \omega V_o \cos\omega t$ *. Κάνοντας αναγωγή των τριγωνομετρικών όρων, έχομε:* $A[(\frac{1}{LC}\text{-}\omega^2)\cos\varphi + \frac{R}{L}\omega \sin\varphi] \sin\omega t \ + [-(\frac{1}{LC}\text{-}\omega^2)A\sin\varphi + \frac{R}{L}\omega A\cos\varphi - \omega V_o] \cos\omega t = 0$. (3α)
Όμως οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις cosωt και sinωt είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι, άρα θα πρέπει οι συντελεστές τους στην εξίσωση (3α) να μηδενίζονται, δηλ.

$$(\frac{1}{LC}\text{-}\omega^2)\cos\varphi + \frac{R}{L}\omega\sin\varphi = 0, \qquad (4\alpha 1)$$
$$\text{-}(\frac{1}{LC}\text{-}\omega^2)A\sin\varphi + \frac{R}{L}\omega A\cos\varphi - \frac{1}{L}\omega V_o = 0. \qquad (4\alpha 2)$$

Η εξίσωση (4α1) του συστήματος (4α) δίδει αμέσως: $\tan\varphi = \frac{(L\omega - \frac{1}{\omega C})}{R}$. *Χρειαζόμαστε τις συναρτήσεις cosφ και sinφ στην (4α2). Έτσι υπολογίζουμε:* $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}}$ *και* $\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{(L\omega - \frac{1}{\omega C})}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}}$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4α2), παίρνομε: $\frac{1}{L}A\omega\frac{(L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}} + \frac{1}{L}\omega A\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}} - \frac{1}{L}\omega V_o = 0$ *, ή*

$A\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2} = V_o$ *, ή* $A = V_o / \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}$ *QED.*