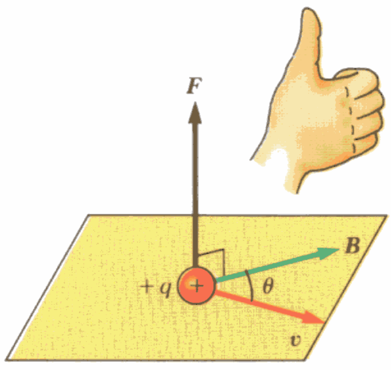
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Αν δοκιμαστικό φορτίο q βρεθεί κοντά σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα, υφίσταται δύναμη κάθετη προς την διεύθυνση της ταχύτητάς του και με μέτρο ανάλογο της ταχύτητάς του,

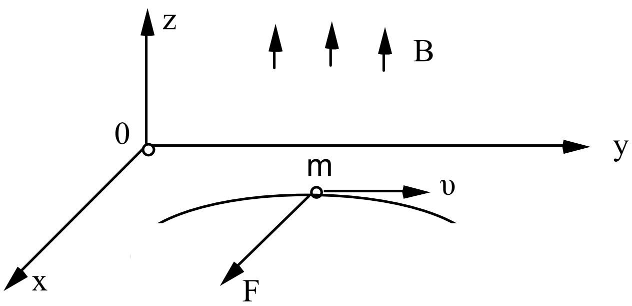
$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B} \quad (\text{νόμος Lorentz})$$

Η ποσότης $\vec{B}$ καλείται ένταση του μαγνητικού πεδίου ή μαγνητική επαγωγή (μονάδες: 1 Weber/m^2 ή tesla)



(a)

Παράδειγμα: Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο.



α) Κάθετη κίνηση: έστω ότι η ταχύτης $\vec{\upsilon}$ του σωματιδίου είναι κάθετη προς το ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ (του οποίου η διεύθυνση λαμβάνεται σαν άξονας +z)

Εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου:

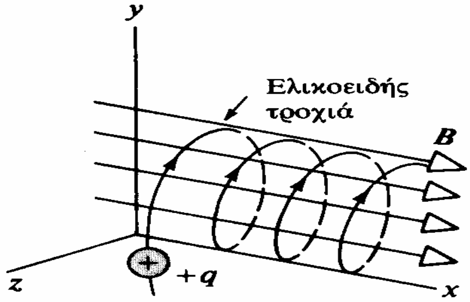
– κατά την ακτινική διεύθυνση: $q\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{R}$ (1)

– κατά την εφαπτομενική διεύθυνση: $ma_t=0$,

– κατά τον z-άξονα: $ma_z=0$ (3)

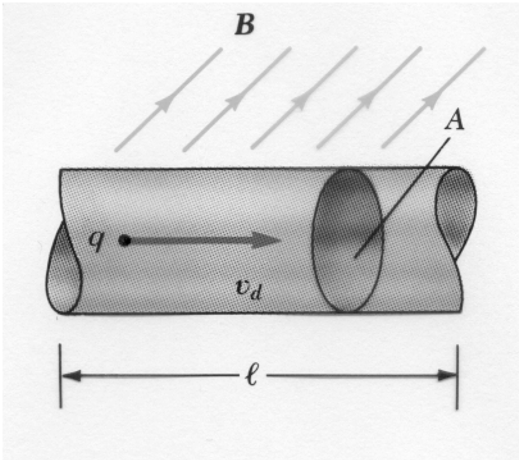
Προφανώς η (1) παριστάνει ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα $R = \frac{m\upsilon}{qB}$ και με κυκλική συχνότητα $\omega_c = \frac{\upsilon}{R} = \frac{qB}{m}$ (συχνότης κύκλοτρον)

β) Ελικοειδής τροχιά: αν τα διανύσματα $\vec{\upsilon}$ και $\vec{B}$ δεν είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε η εξίσωση (1) γράφεται: $q\upsilon_\perp B = m\frac{\upsilon_\perp^2}{R}$, ενώ κατά τη διεύθυνση του πεδίου (άξονας z) ισχύει η (3), έτσι η συνιστώσα $\upsilon_{||}$ παραμένει σταθερή. Συνεπώς οι συνιστώσες ($\upsilon_{||}$, $\upsilon_\perp$) παραμένουν σταθερές κατά μέτρο και η τροχιά του σωματιδίου είναι ελικοειδής .



γ) Τι συμβαίνει όμως αν το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται, ας πούμε $B=B(z)$;

Δύναμη επί αγωγού που διαρέεται από ρεύμα

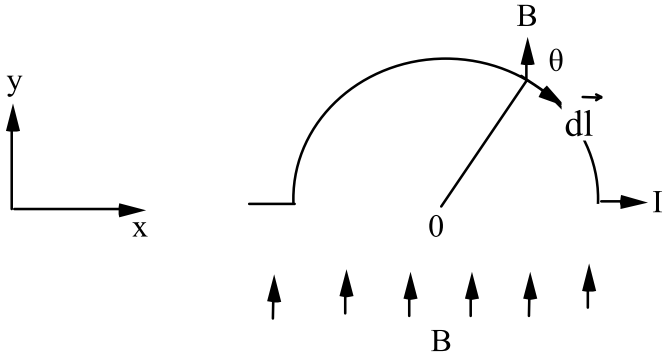


Η δύναμη επί του στοιχειώδους τμήματος dl

$$d\mathbf{f}=(nAdl)q\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{B}=Id\mathbf{l}\times\mathbf{B} \qquad \text{(ν. Laplace)}$$

διότι $J=nq\upsilon$ και $I=JA=nqA\upsilon$.

Παράδειγμα: *Να υπολογιστεί η δύναμη που εξασκείται από ομογενές μαγνητικό πεδίο B πάνω σε ημικυκλικό αγωγό C (σχήμα), ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I.*



Ο νόμος του Laplace γράφεται

$$d\boldsymbol{f} = Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} = Idl\,B\,sin\theta\,\hat{z}$$

συνεπώς, η ολική δύναμη που ασκείται στο ημικύκλιο είναι

$$\vec{F}_{o\lambda} = \hat{z} IB \int_{C} sin\theta dl$$

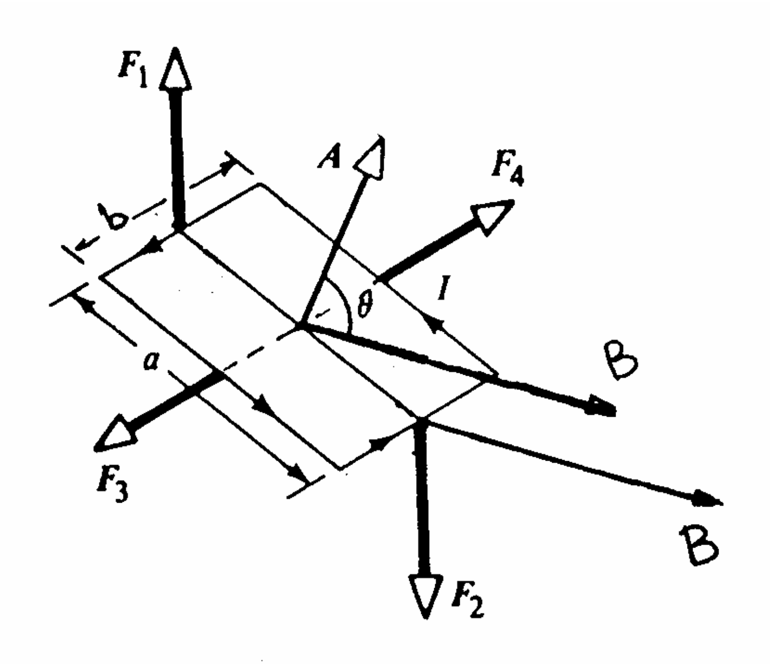
όμως sinθdl=dx, οπότε το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{C} sin\theta\, dl = \int_{-R}^{+R} dx = 2R$$

συνεπώς, $\vec{F}_{o\lambda} = \hat{z} 2IRB$

- *Ορθογώνιος βρόχος μέσα σε μαγνητ. πεδίο*

Εστω ότι το πεδίο Β σχηματίζει γωνία θ με την κάθετη προς το επίπεδο του βρόχου. Για ευκολία μας έστω ότι το Β είναι κάθετο προς τις πλευρές μήκους b.



Οι δυνάμεις επί των πλευρών μήκους a είναι, $F_3=F_4=IaB$ οι οποίες είναι αντίθετες και αλληλοαναιρούνται.

- *Οι δυνάμεις επί των πλευρών μήκους b είναι $F_1=F_2=IbB$ οι οποίες δημιουργούν ζεύγος δυνάμεων με μοχλοβραχίονα $x=a\sin\theta$.*

- *Η ολική ροπή ως προς το 0 έχει μέτρο*

$$\tau=F_1x= F_1 a\sin\theta= IbB\, a\sin\theta=IAB \sin\theta \quad (1)$$

όπου $A=ab$. Βλέπουμε ότι $\tau=IAB=max$ όταν όταν το πεδίο B είναι παράλληλο προς το επίπεδο του *βρόχου (θ=90) και τ=0=min όταν το πεδίο Β είναι κάθετο προς το επίπεδο του βρόχου (θ=0).*

Η (1) γράφεται σε διανυσματική μορφή,

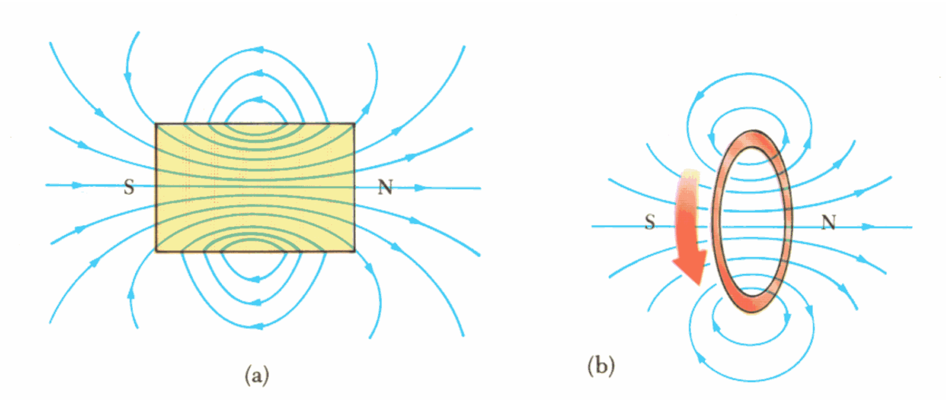
$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B} \qquad (2)$$

Η διανυσματική ποσότης $\vec{\mu} = I\vec{A}$ *καλείται* ***μαγνητική ροπή*** *του βρόχου (μονάδες: A-m^2) οπότε η (2) γράφεται,*

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

η οποία ισχύει για κάθε βρόχο εμβαδού Α.

Παρατηρούμε ότι ο βρόχος συμπεριφέρεται σαν ένα μαγνητικό δίπολο (βλέπε σχήμα).



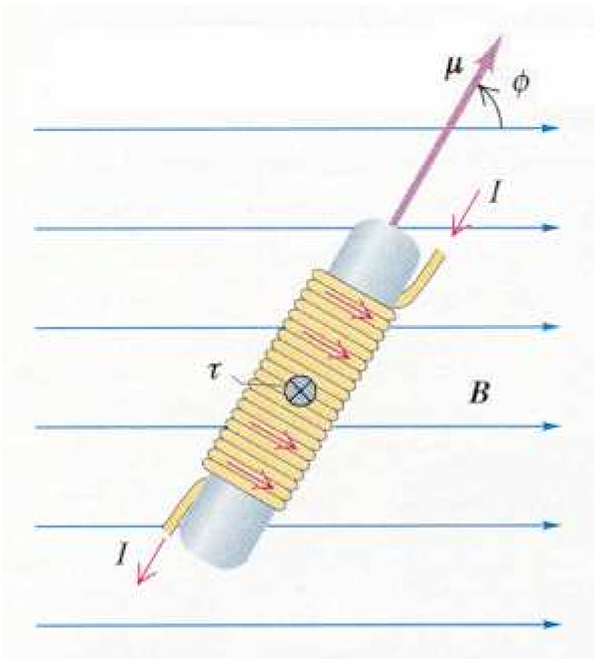
- *Η δυναμική ενέργεια βρόχου*

μέσα σε μαγνητικό πεδίο υπολογίζεται με το ίδιο τρόπο όπως και στο ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο. Εχομε λοιπόν κατ' αναλογία

$$U=-\mu B\cos\theta=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

δηλ. η ελαχίστη δυναμική ενέργεια του βρόχου είναι όταν προσανατολίζεται κάθετα (θ=0) προς το μαγνητικό πεδίο, ή αλλιώς όταν το μαγν. δίπολο παίρνει τη διεύθυνση και φορά του μαγν. πεδίου.

Το πηνίο (Ν βρόχοι) του παρακάτω σχήματος έχει ελαχίστη ενέργεια όταν προσανατολιστεί κατά την διεύθυνση του πεδίου Β.

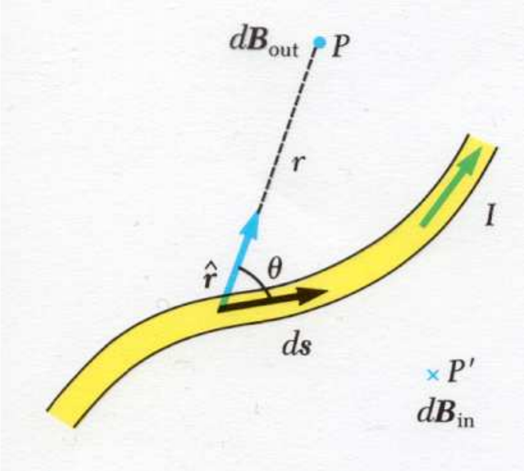


Δημιουργία μαγνητικού πεδίου

(από κινούμενα φορτία ή από ρεύματα)

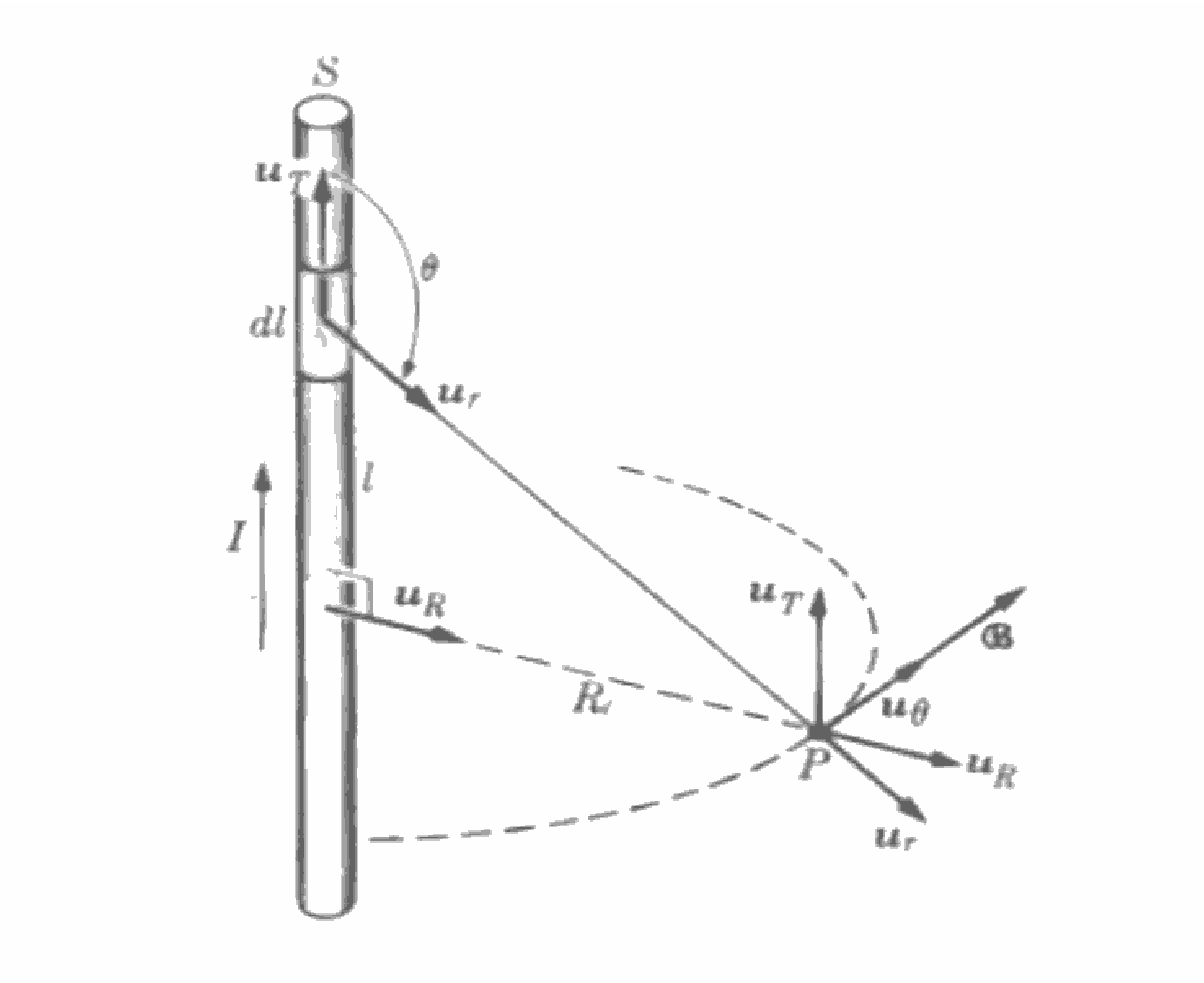
Νόμος των Biot-Savart (εμπειρικός νόμος): Η ένταση του μαγν. πεδίου στο σημείο P

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$$



όπου $\mu_o/4\pi=10^{-7}$ Webers/A-m. Η σταθερά μ_o καλείται *μαγνητική διαπερατότης του κενού*

Παράδειγμα: Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου αγωγού



Το πεδίο στο σημείο P είναι

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

όμως $d\vec{s} \times \hat{r} = ds \cdot 1 \cdot \sin\theta\, \hat{\theta}$ *(στο σχήμα* $\hat{\theta} \to \hat{u}_\theta$*).*
Από το σχήμα έχομε $\sin\theta = R/r$*, όπου* $r = \sqrt{R^2 + s^2}$*,*
επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται,

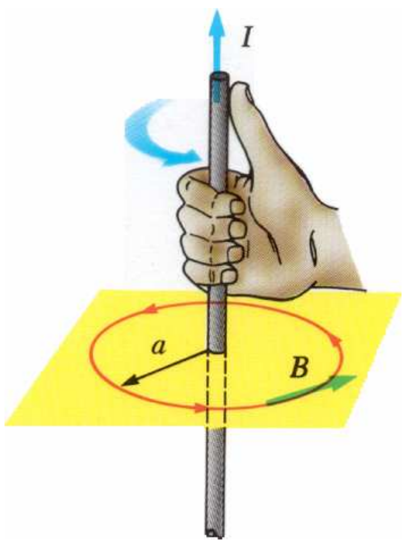
$$\vec{B} = \hat{\theta}\frac{\mu_o}{4\pi} IR \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(R^2 + s^2)^{3/2}}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(R^2 + s^2)^{3/2}} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{ds}{(R^2 + s^2)^{3/2}}$$

$$= 2\left[\frac{s}{R^2\sqrt{R^2 + s^2}}\right]_{s=0}^{s=+\infty} = \frac{2}{R^2}\lim_{s\to\infty}\frac{s}{\sqrt{R^2 + s^2}} = \frac{2}{R^2},$$

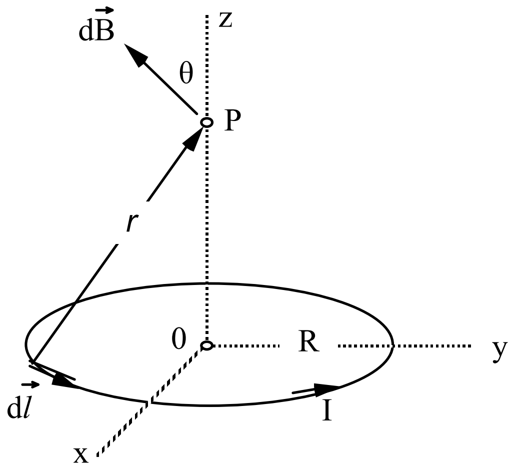
άρα το μαγν. πεδίο στο σημείο P είναι: $\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{1}{R}\hat{\theta}$



δηλ. οι δυναμικές γραμμές είναι περιφέρειες ομόκεντρων κύκλων (και η μαγν. επαγωγή του πεδίου έχει σταθερή τιμή κατά μέτρο πάνω στη περιφέρεια του κύκλου)

Παράδειγμα: Μαγνητικό πεδίο κυκλικού δακτυλίου

Υπολογίζομε το μαγν. πεδίο σε σημεία P πάνω στον άξονα του δακτυλίου



λόγω συμμετρίας επιζεί μόνο η z-συνιστώσα του πεδίου dB, άρα

$$dB_z = dB\cos\theta = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Ids}{r^2}\cos\theta$$

Από το σχήμα έχομε cosθ=R/r και $r = \sqrt{R^2 + z^2}$*, επομένως το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P ισούται,*

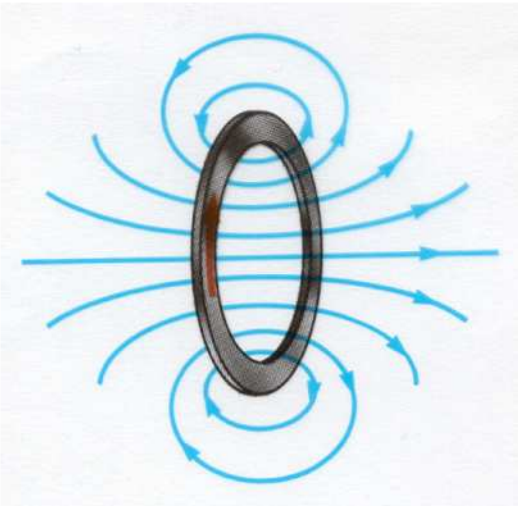
$$B_z = \frac{\mu_o}{4\pi} IR \int_C \frac{ds}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{IR}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\int_C ds$$

το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στη περιφέρεια του κύκλου $\int_C ds = 2\pi R$, *συνεπώς το πεδίο ισούται*

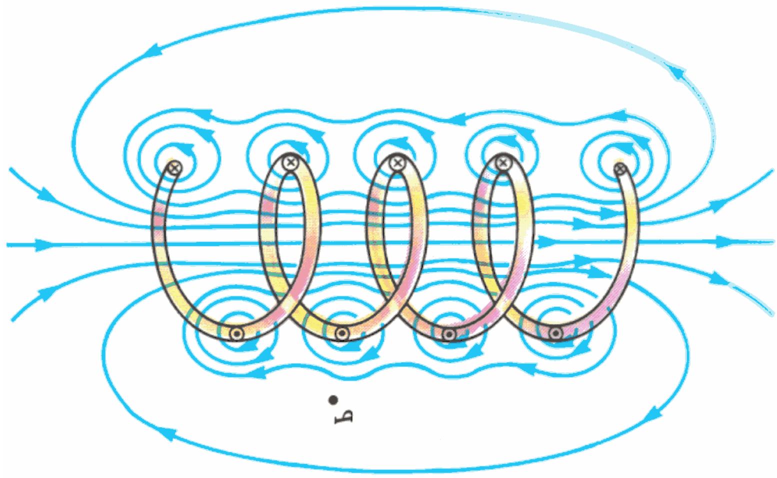
$$B_z = \frac{\mu_o}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

αν ορίσουμε ως ***διπολική ροή*** *του κυκλικού δακτυλίου* $\mu = I\pi R^2$, *η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή (παραλείποντας τον δείκτη z από το B),*

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\mu}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς (Ν δακτύλιοι)



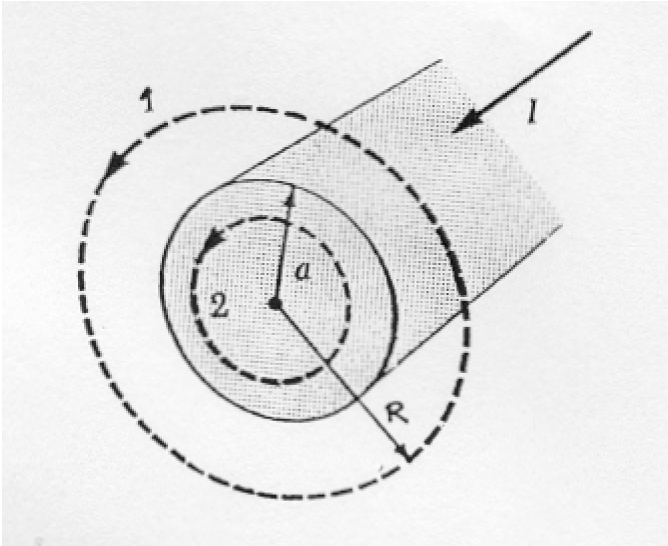
- *Νόμος του Ampere για το μαγνητικό πεδίο*

Λέει ο νόμος αυτός ότι η κυκλοφορία του Β κατά μήκος μιάς κλειστής διαδρομής C ισούται με μ_o επί το συνολικό ρεύμα I_A που διαπερνά την επιφάνεια Α που περικλείεται από την C,

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_o I_A$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω σε συγκεκριμένη κλειστή διαδρομή C.

Παράδειγμα: Το μαγνητικό πεδίο μέσα και έξω από κυλινδρικό αγωγό ακτίνος α που διαρρέεται από ρεύμα Ι.



Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος, το μαγνητικό πεδίο θα είναι εφαπτομενικό στις ομοαξονικές περιφέρειας προς τον άξονα του αγωγού και μέτρου $B=f(R)$.

1) για $R \geq a$, επιλέγουμε στο νόμο του Ampere τη κλειστή διαδρομή 1,

$$\oint_{1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{1} dl = B \cdot 2\pi R == \mu_o I$$

όπου $I_A = I$, άρα

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \qquad (\text{για } R \geq a)$$

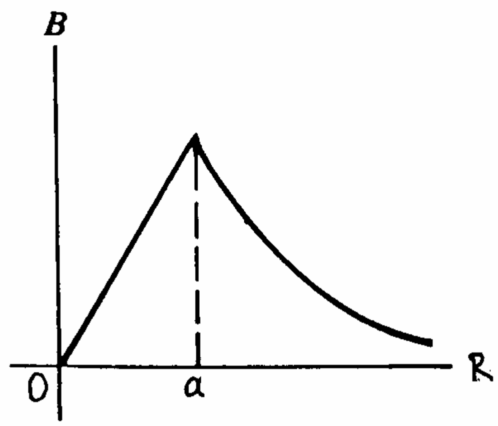
2) για $R \geq a$, επιλέγουμε στο νόμο του Ampere τη κλειστή διαδρομή 2,

$$\oint_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_2 dl = B \cdot 2\pi R == \mu_o I_A$$

όμως $J = \frac{I_A}{\pi R^2} = \frac{I}{\pi a^2} \Rightarrow I_A = I \frac{R^2}{a^2}$, οπότε προκύπτει

$$B = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{IR}{a^2} \qquad (\text{για } R \leq a)$$

Γραφική παράσταση του B από την απόσταση R από τον άξονα του αγωγού.

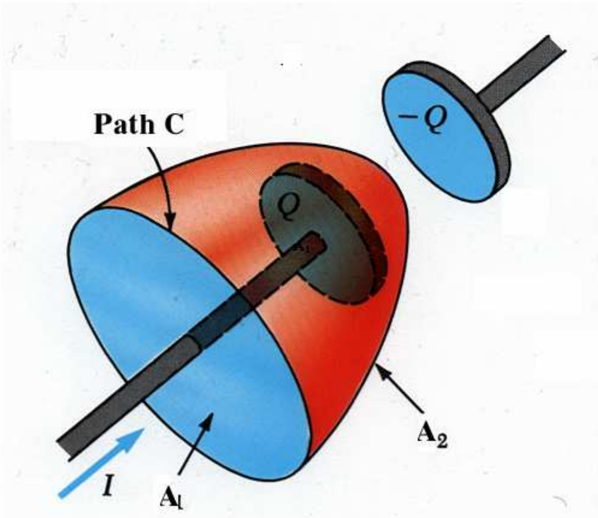


- Νόμος του Ampere σε διαφορική μορφή

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Stokes:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \quad (1)$$

δηλ. η κυκλοφορία του διανύσματος $\vec{B}$ γύρω από μια κλειστή διαδρομή C ισούται με τη ροή του διανύσματος $(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ μέσα από την επιφάνεια A (η οποία περατούται στη κλειστή καμπύλη C), π.χ. η επιφάνεια A_1 ή A_2 του σχήματος.



Ομως το συνολικό ρεύμα που διέρχεται δια μέσου μιας επιφάνειας A ισούται με

$$I_A = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{A} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στον νόμο του Ampere έχομε,

$$\int_A (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{A} = \mu_o \int_A \vec{J}\cdot d\vec{A}$$

ή

$$\int_A (\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_o\vec{J})\cdot d\vec{A} = 0$$

απ’ όπου προκύπτει:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} \quad \textit{(ν. Ampere)}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τον νόμο του Ampere σε διαφορική μορφή.