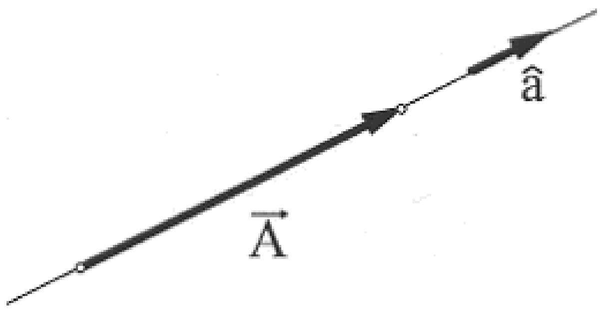
Φροντιστήριο 2^o:
Εισαγωγή στον διανυσματικό λογισμό

Βαθμωτά ή μονόμετρα μεγέθη (scalars): Για να οριστούν τα μεγέθη αυτά απαιτείται να δοθεί μόνο το μέτρο τους (περιλαμβανομένης της μονάδας μέτρησης)

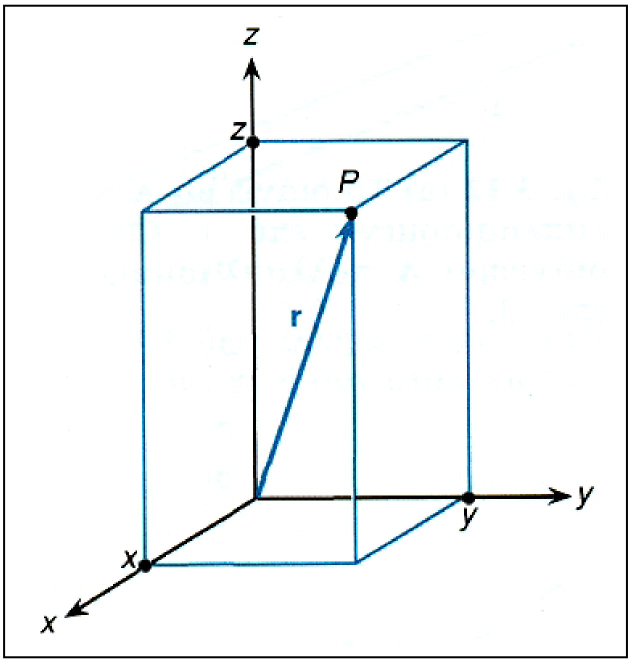
Διανυσματικά μεγέθη (vectors): είναι μεγέθη εκείνα τα οποία για να οριστούν απαιτείται να δοθεί το μέτρο τους και επί πλέον η διεύθυνση και φορά του μεγέθους, και η μονάδα μέτρησης του μεγέθους.



Συμβολισμός: $\vec{A} = A\hat{a}$ ή $\vec{A} = |\vec{A}|\hat{a}$, όπου $A \equiv |\vec{A}|$ είναι το μέτρο του διανύσματος και $\hat{a}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, δηλ. μέτρο $|\hat{a}| = 1$.

Συνιστώσες διανύσματος - Συστήματα συντεταγμένων

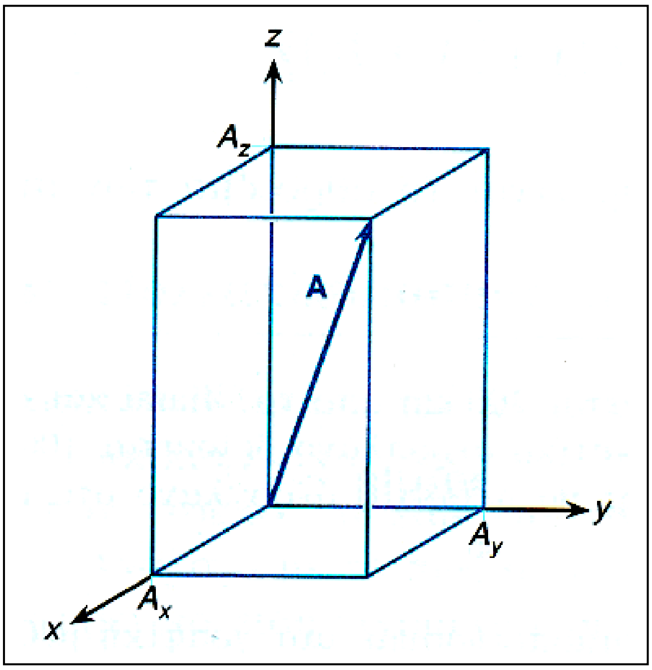
Καρτεσιανές συντεταγμένες: $\vec{r} = (x, y, z)$



Το διάνυσμα θέσης (ή επιβατική ακτίνα) σώματος στο σημείο P:

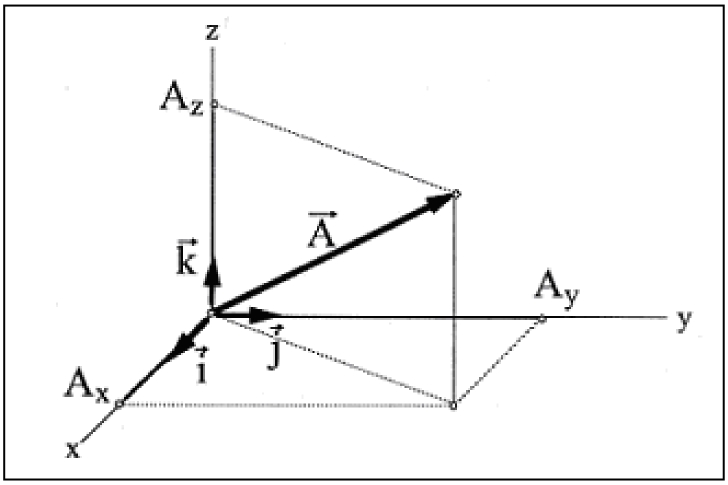
$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \equiv (x, y, z)$$

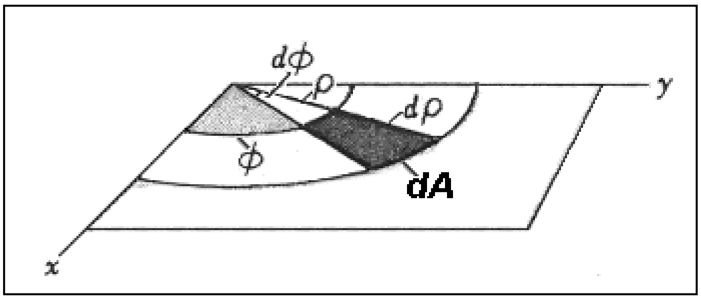
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων *x,y,z*

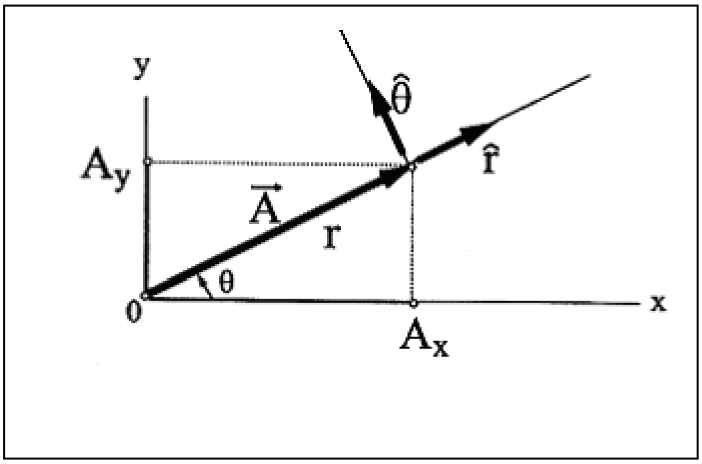


Η διανυσματική ποσότης A:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \equiv (A_x, A_y, A_z)$$







Πολικές συντεταγμένες (στο επίπεδο x-y):

$\vec{r} = (r, \theta)$ & $\vec{A} = (A_r, A_\theta)$

<u>Μετασχηματισμός</u>:

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$, ή

$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

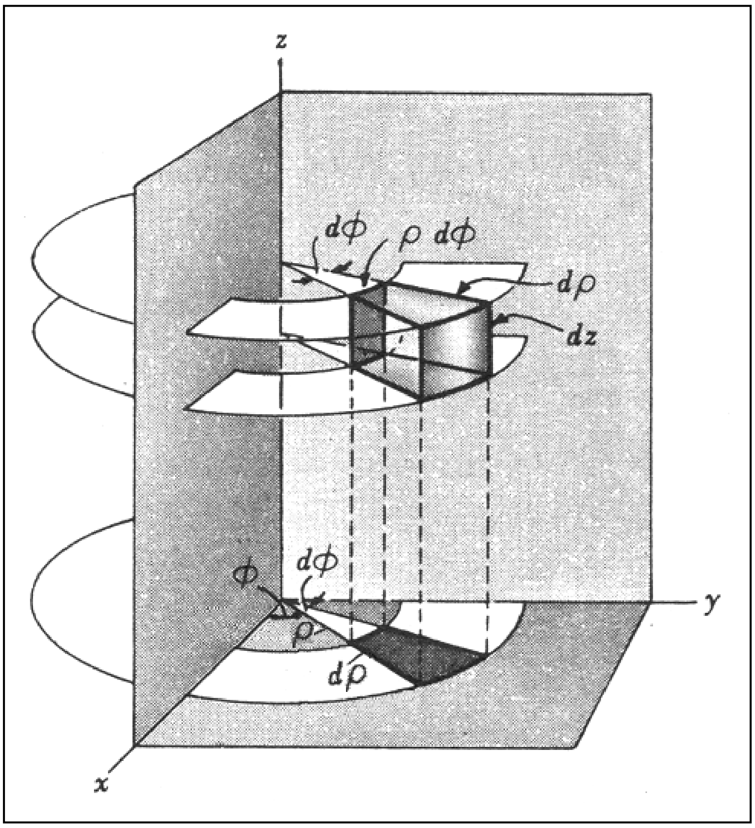
<u>Μοναδιαία διανύσματα:</u>

$\hat{\boldsymbol{r}} = \cos\theta\, \vec{\boldsymbol{i}} + \sin\theta\, \vec{\boldsymbol{j}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\, \vec{\boldsymbol{i}} + \cos\theta\, \vec{\boldsymbol{j}}$

$\vec{\boldsymbol{i}} = \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\vec{\boldsymbol{j}} = \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$

<u>Στοιχειώδης επιφάνεια</u>:

$dV = (rd\theta) \cdot dr = rdrd\theta$



Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_z)$ & $\vec{r} = (r, \theta, z)$

<u>Μετασχηματισμός</u>:

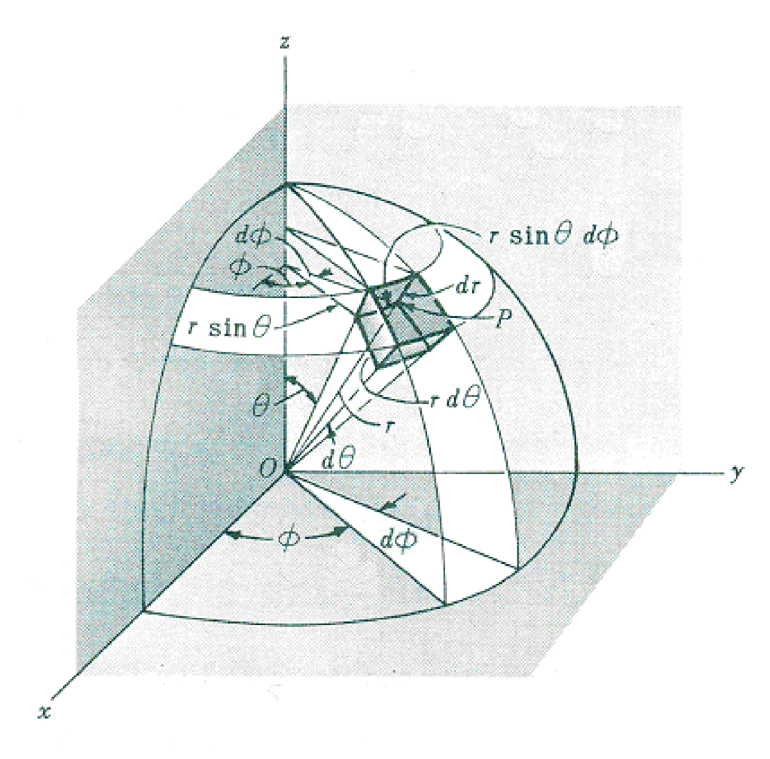
$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$

$\varphi = \tan^{-1}(\frac{y}{x}), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

<u>Στοιχειώδης όγκος:</u>

$dV = (\rho d\varphi) \cdot d\rho \cdot dz = \rho d\rho d\varphi dz$

Σφαιρικές συντεταγμένες: $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$ και $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\varphi)$



Μετασχηματισμός:

x=rsinθcosφ,
y=rsinθsinφ,
z=rcosθ

ή αντίστροφα

$$\varphi = tan^{-1}(y/x),$$
$$\theta = cos^{-1}(z/r),$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Μοναδιαία διανύσματα:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{\boldsymbol{i}} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{\boldsymbol{j}} + \cos\theta\,\vec{\boldsymbol{k}}\,,$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{\boldsymbol{i}} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{\boldsymbol{j}} - \sin\theta\,\vec{\boldsymbol{k}}\,,$$
$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\,\vec{\boldsymbol{i}} + \cos\varphi\,\vec{\boldsymbol{j}}$$

ή αντίστροφα

$$\vec{\boldsymbol{i}} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,,$$
$$\vec{\boldsymbol{j}} = \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{r}} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,,$$
$$\vec{\boldsymbol{k}} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

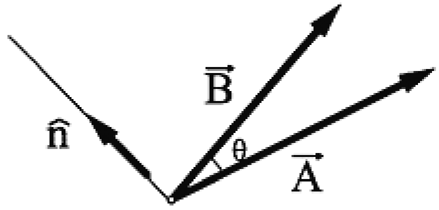
Στοιχειώδης όγκος:

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$$

Πράξεις επί των διανυσμάτων:

- **Ισότης 2 διανυσμάτων**: $\vec{A} = \vec{B}$, σημαίνει $A_x = B_x$, $A_y = B_y$, ...
- **Πρόσθεση 2 διανυσμάτων**: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, σημαίνει ότι το άθροισμα $\vec{C}$ έχει συνιστώσες: $C_x = A_x + B_x$, $C_y = A_y + B_y$, $C_z = A_z + B_z$

• **Αριθμητικό (ή εσωτερικό) γινόμενο 2 διανυσμάτων:** $C = \vec{A} \cdot \vec{B}$, παριστά το μονόμετρο μέγεθος C το οποίο έχει μέτρο: $C=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$, ή άλλως $C=ABcos\theta$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των $\vec{A}$ και $\vec{B}$.



• **Διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο 2 διανυσμάτων:** $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, σημαίνει ότι το διαν. γινόμενο $\vec{C}$ έχει μέτρο και διεύθυνση: $\vec{C} = AB\,sin\theta\,\hat{n}$, όπου $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

Για παράδειγμα η συστροφή (το curl) του διανύσματος $\vec{A}$ είναι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

• **Γινόμενο διανύσματος επί αριθμού:** σημαίνει ότι απλά πολλα/ζεται το μέτρο του διανύσματος: $\lambda\vec{A} = (\lambda A)\hat{a}$

• **Διαίρεση 2 διανυσμάτων:** $\dfrac{\vec{A}}{\vec{B}}$ απαγορεύεται.

- **Διαίρεση διανύσματος δια αριθμού:** σημαίνει ότι απλά διαιρείται το μέτρο του διανύσματος: $\frac{\vec{A}}{\lambda} = (\frac{A}{\lambda})\hat{a}$

- **Παραγώγιση διανύσματος:** $\frac{d\vec{A}}{dt}$ σημαίνει:

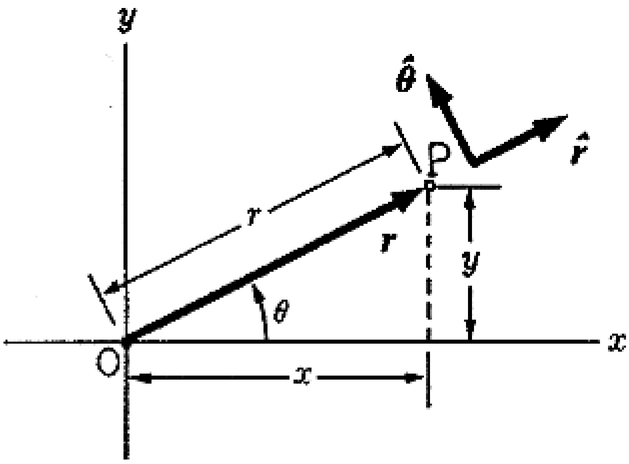
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

- **Ολοκλήρωση διανύσματος**: $\int \vec{A}dt$ σημαίνει:

$$\int \vec{A}dt = \vec{i}\int A_x dt + \vec{j}\int A_y dt + \vec{k}\int A_z dt$$

Ταχύτης και επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες.

Έστω $\vec{\mathbf{r}} = \mathrm{r}\hat{\mathbf{r}}$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου P (τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ κατευθύνονται κατά τη διεύθυνση που αυξάνουν τα μεγέθη r και θ, αντίστοιχα - βλέπε Σχήμα 1).



Σχήμα 1

---

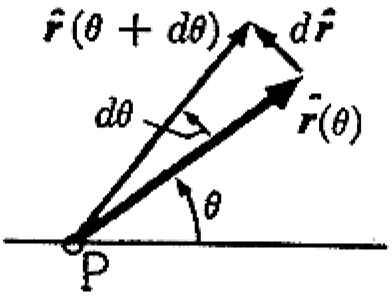
1) **Η ταχύτης του σημείου P** υπολογίζεται ης εξής:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \upsilon_r\,\hat{r} + r\omega\hat{\theta} \qquad (1)$$

όπου υ_r=dr/dt είναι η **ακτινική** ταχύτης (κατά μήκος του άξονα r) και ω=dθ/dt είναι η γωνιακή ταχύτης του σημείου P. Ο τελευταίος όρος στην (1) αποδεικνύεται ως εξής:

Από το διανυσματικό τρίγωνο του Σχήματος 2 έχομε:

$d\hat{r} = (|\,\hat{r}\,|\,d\theta)\,\hat{\theta} = d\theta\,\hat{\theta}$, συνεπώς: $\dfrac{d\hat{r}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\hat{\theta} = \omega\hat{\theta}$.



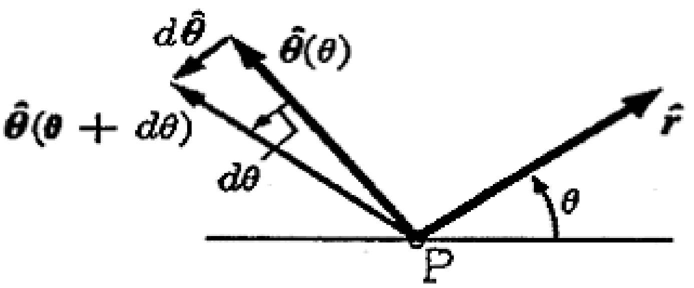
Σχήμα 2

2) Η επιτάχυνση του σημείου P υπολογίζεται ης εξής:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon_r \hat{r} + r\omega\hat{\theta}) = \frac{d\upsilon_r}{dt}\hat{r} + \upsilon_r\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\omega\hat{\theta} + r\frac{d\omega}{dt}\hat{\theta} + r\omega\frac{d\hat{\theta}}{dt} \qquad (2)$$

όπου $\dfrac{d\upsilon_r}{dt} = \dfrac{d^2 r}{dt^2} \equiv a_r$ είναι η ακτινική επιτάχυνση (κατά μήκος του άξονα r).

Η τελευταία παράγωγος στη (2) υπολογίζεται ως εξής:



Σχήμα 3

Από το διανυσματικό τρίγωνο του Σχήματος 3 έχομε:

$d\hat{\theta} = (|\hat{\theta}|\, d\theta)\,(-\bar{r}) = -d\theta\, \bar{r}$, (εφόσον $|\hat{\theta}| = |\hat{r}| = 1$), συνεπώς:

$\dfrac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\hat{r} = -\omega\hat{r}$. Αντικαθιστώντας στην (2) λαμβάνομε,

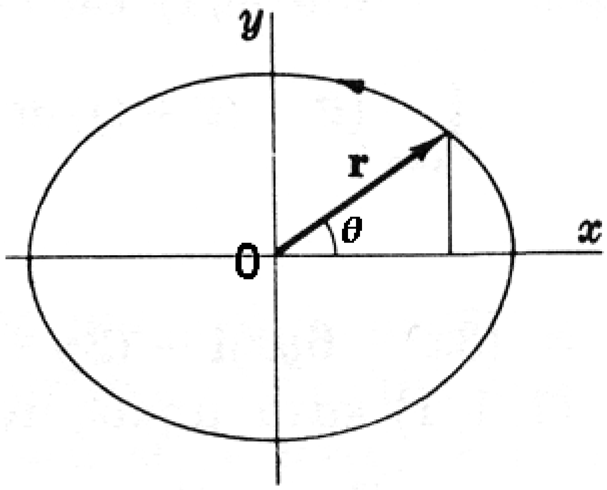
$$\vec{a} = a_r\hat{r} - r\omega^2\,\hat{r} + 2\upsilon_r\omega\hat{\theta} + r\alpha\hat{\theta} \qquad (3)$$

Ο τελευταίος όρος στη (3) καλείται **επιτρόχιος επιτάχυνση**, $\vec{a}_t = r\alpha\hat{\theta}$, όπου $\alpha \equiv \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ είναι η γωνιακή επιτάχυνση. Ο προτελευταίος όρος $\vec{a}_C = 2\upsilon_r\omega\hat{\theta}$ καλείται επιτάχυνση **Coriollis**, και ο δεύτερος όρος $\vec{a}_R = -r\omega^2\hat{r}$ καλείται **κεντρομώλος** επιτάχυνση ο οποίος κατευθύνεται πάντοτε ακτινικά προς τον άξονα (ή το σημείο) περιστροφής, ο δε **πρώτος** όρος $a_r\hat{r}$ παριστάνει την **ακτινική** επιτάχυνση που σχετίζεται με την αύξηση ή τη μείωση της ακτίνος περιστροφής r του σημείου P.

Αν το στερεό σώμα εκτελεί **περιστροφική** κίνηση ή το σημείο P εκτελεί **κυκλική** κίνηση, τότε εξ ορισμού $a_r = \upsilon_r = 0$, οπότε οι σχέσεις (1) και (3) παίρνουν την απλή μορφή (μην μπερδέψετε τα σύμβολα a_r και a_R),

$$\vec{\upsilon} = r\omega\hat{\theta}$$
$$\vec{a} = -r\omega^2\,\hat{r} + r\alpha\hat{\theta}$$

Παράδειγμα 1º (Έργο δύναμη – Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα): ***Πλανήτης μάζας m περιφέρεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο μάζας M, ο οποίος καταλαμβάνει το κέντρο της έλλειψης. Αν a και b είναι οι ημιάξονες της ελλειπτικής τροχιάς του πλανήτη (a>b), υπολογίσατε το παραγόμενο έργο για να διαγραφεί ένα τεταρτημόριο της έλλειψης.***



Λύση: Λαμβάνομε το επίπεδο της έλλειψης σαν x-y επίπεδο και το κέντρο της έλλειψης σαν αρχή των αξόνων 0, όπου τοποθετείται ο ήλιος (ακίνητος). Το διάνυσμα θέσης του πλανήτη είναι,

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} \equiv (x,y), \quad (1)$$

όπου x,y δίδονται από τις ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης,

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta. \quad (2)$$

[Πολύ πιθανόν η δεδομένη καμπύλη της τροχιάς να δίδεται από μια μαθηματική σχέση της μορφής: y=f(x), π.χ. για την έλλειψη η σχέση αυτή είναι: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, η οποία πράγματι προκύπτει από τις (2), απαλείφοντας τη μεταβλητή θ]. Η δύναμη που ασκείται στο πλανήτη, σύμφωνα με το νόμο βαρύτητος του Νεύτωνα, έχει τη μορφή

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \text{ ή } \vec{F} \equiv \left(-G\frac{Mm}{r^3}x, -G\frac{Mm}{r^3}y\right) \quad (3)$$

Το μείον πρόσημο στη (3) απλά υποδηλώνει το γεγονός ότι η δύναμη είναι ελκτική και κατευθύνεται προς την αρχή των αξόνων 0, ενώ το μέτρο r ισούται με:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2(1-\sin^2\theta)} \\
&= \sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta} = \sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\varepsilon^2+\sin^2\theta}, \quad \text{οπου} \quad \varepsilon^2 = b^2/(a^2-b^2).
\end{aligned}
$$

Το έργο που παράγεται (ή δαπανάται) κατά τη μεταφορά του πλανήτη από το σημείο-A στο σημείο-B της τροχιάς του, δίδεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα,

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (4)$$

όπου $d\vec{r}$ είναι το στοιχειώδες βήμα ολοκλήρωσης πάνω στη καμπύλη της τροχιάς, από το σημείο: A→B. Χρησιμοποιώντας τις παραμετρικές εξισώσεις (2), λαμβάνουμε: $d\vec{r} = (-a\sin\theta\,\vec{i} + b\cos\theta\,\vec{j})d\theta$. (Αν αντί της έλλειψης, είχαμε περιφέρεια κύκλου για τροχιά, τότε θα ίσχυε: a=b=r, οπότε η προηγούμενη σχέση θα γραφότανε: $d\vec{r} = r(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})d\theta = r\vec{\theta}d\theta$, όπου κάναμε χρήση και των σχέσεων μετασχηματισμού των πολικών συντεταγμένων, σελ. 3. Βλέπουμε δηλ. ότι αναπαράγουμε τα αποτελέσματα της σελ. 6). Μετά από τα παραπάνω, η (4) γράφεται

$$
\begin{aligned}
W_{A\to B} &= \int_A^B F_x(-a\sin\theta)\,d\theta + F_y(b\cos\theta)d\theta \\
&= -GMm\int_A^B \frac{-a^2\cos\theta\sin\theta + b^2\sin\theta\cos\theta}{(a^2-b^2)^{3/2}(\varepsilon^2+\sin^2\theta)^{3/2}}d\theta \\
&= \frac{GMm}{(a^2-b^2)^{3/2}}\int_A^B \frac{(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{(\varepsilon^2+\sin^2\theta)^{3/2}} \\
&= \frac{GMm}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_A^B \frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{(\varepsilon^2+\sin^2\theta)^{3/2}} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα[†] και στο τέλος εφαρμόζουμε το όριο: A≡0 → B≡π/2,

$$I = \int_A^B \frac{\sin\theta \cos\theta \, d\theta}{(\varepsilon^2 + \sin^2\theta)^{3/2}} = \int_A^B \frac{\sin\theta \, d\sin\theta}{(\varepsilon^2 + \sin^2\theta)^{3/2}} =$$

$$\xrightarrow[u=\cos\theta]{} \int_A^B \frac{u du}{(\varepsilon^2 + u^2)^{3/2}} = \int_A^B \frac{du^2}{2(\varepsilon^2 + u^2)^{3/2}}$$

$$= \int_A^B \frac{d(\varepsilon^2 + u^2)}{2(\varepsilon^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon^2 + u^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + u^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \cos^2\theta}}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}} = \left(\frac{b-a}{ab}\right)\sqrt{a^2 - b^2}$$

δηλ. το παραγόμενο έργο για τη διαγραφή ενός τεταρτημορίου είναι:

$$W_{1^o \, \tau\varepsilon\tau} = \frac{GMm}{\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\frac{b-a}{ab}\right)\sqrt{a^2 - b^2} = -GMm\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) < 0 \quad (6)$$

(Στη περίπτωση κυκλικής τροχιάς, δηλ. για a=b=r, το έργο μηδενίζεται: W=0! Γιατί όμως;) Στη περίπτωση συντηρητικών δυνάμεων, ορίζεται ως δυναμική ενέργεια η συνάρτηση U(x,y,z), της οποίας η μεταβολή μεταξύ των τιμών της στα σημεία A και B του Ευκλείδειου χώρου να ισούται με το αρνητικό έργο της συντηρητικής δύναμης για τη μεταφορά ενός σώματος από το σημείο A στο B, δηλ. U_B-U_A=-$W_{A\to B}$.Συνεπώς, U(B)-U(A)=-WA→B. Αν τώρα επιλέξουμε το A να είναι στο άπειρο (δηλ. a=∞) και υποθέσουμε ότι, U(∞)=0, και αν το σημείο B βρίσκεται σε κάποια απόσταση b=r από τον ήλιο, τότε χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (6), βρίσκοθμε: U_B-0=-$W_{A\to B}$, δηλ. Ur)=-GMm/r (το γνωστό μας αποτέλεσμα).

Θα επαναλάβουμε τους ίδιους υπολογισμούς, στη περίπτωση που η καμπύλη ολοκλήρωσης δίδεται από μια μαθηματική σχέση της μορφής: y=f(x), πχ. για το παραπάνω πρόβλημα: $y \equiv f(x) = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

[†] Για τους υπολογισμούς σας καλό είναι να χρησιμοποιείτε κάποιο μαθηματικό τυπολόγιο, όπως το ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ή ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ της σειράς SCHAUM.

Το παραγόμενο έργο από τη δύναμη F δίδεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα,

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F_x dx + F_y dy = \int_A^B F_x dx + F_y f'(x)dx =$$

$$= -GMm[\int_A^B \frac{xdx + yf'(x)dx}{r^3} = -GMm[\int_A^B \frac{x + f(x)f'(x)}{r^3}dx = \Diamond$$

όπου $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}\sqrt{\varepsilon^2+x^2}$, και $\varepsilon^2 = a^2b^2/(a^2-b^2)$.

Συνεπώς το ολοκλήρωμα ισούται:

$$\Diamond = -GMm\frac{a^3}{(a^2-b^2)^{3/2}}\int_A^B \frac{x + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}(-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}})}{(\varepsilon^2+x^2)^{3/2}}dx$$

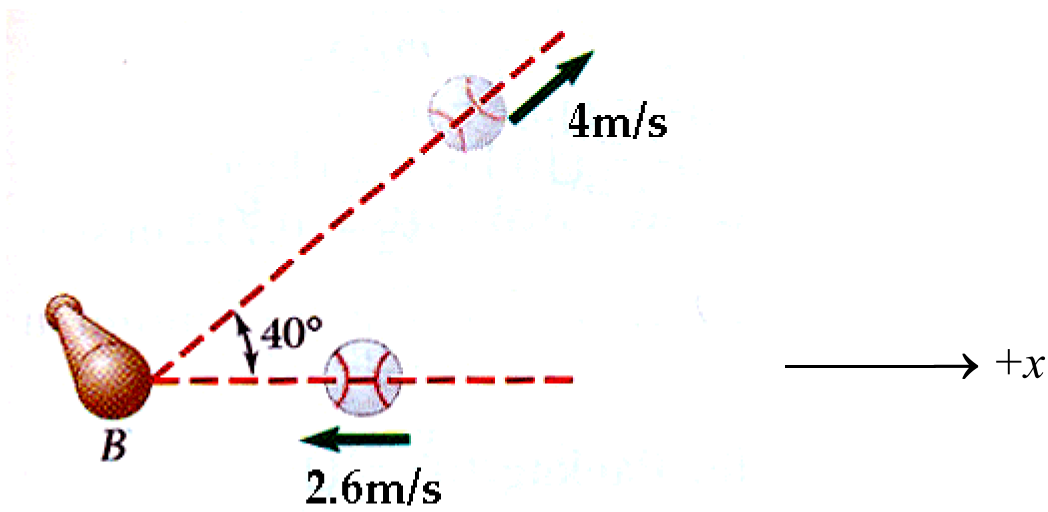
$$= -GMm\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_A^B \frac{xdx}{(\varepsilon^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{GMma}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_A^B \frac{d(\varepsilon^2+x^2)}{2(\varepsilon^2+x^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{GMma}{2\sqrt{a^2-b^2}}\frac{(\varepsilon^2+x^2)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{GMma}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+x^2}}\Bigg|_{x=a}^{x=0}$$

$$= \frac{GMma}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+a^2}} - \frac{1}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon = ab/\sqrt{a^2-b^2}]{} = GMm\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right),$$

δηλ. αναπαραγάγουμε το αποτέλεσμα (6)!!

Παράδειγμα 2ο (Ώθηση δύναμης): Μια μπάλα του baseball 110gr ρίχνεται με ταχύτητα 2.6m/s από τον pitcher. Κτυπώντας την ο batter με το ρόπαλο B, εκτοξεύεται με ταχύτητα 4m/s κατά τη διεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Αν η διάρκεια της επαφής της μπάλας με το ρόπαλο είναι 0.015s, προσδιορίσατε την μέση δύναμη που ασκείται πάνω στη μπάλα κατά το κτύπημα.



Λύση: Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, έχομε: $d\vec{p} = \vec{F}dt$, και ολοκληρώνοντας από μια αρχική στιγμή $t_{αρχ}$ έως μια στιγμή $t_{τελ}$, παίρνομε

$$\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} = \int_{t_{αρχ}}^{t_{τελ}} \vec{F}dt \,. \qquad (7)$$

Η ποσότης $I = \int_{t_{αρχ}}^{t_{τελ}} \vec{F}dt$ καλείται ώθηση (impulse) της δύναμης $\vec{F}$. Η σχέση (7) αναφέρεται σαν θεώρημα ώθησης - ορμής. Αν $\overline{F}$ είναι μια μέση τιμή της δύναμης για το διάστημα που εφαρμόζεται πάνω στο σώμα, δηλ. $I = \int_{t_{αρχ}}^{t_{τελ}} \vec{F}dt = \overline{F} \cdot \Delta t$, όπου $\Delta t = t_{τελ} - t_{αρχ}$ είναι η διάρκεια του φαινομένου, τότε η (7) γράφεται,

$$\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \overline{F} \cdot \Delta t \,, \quad (8)$$

από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση δύναμη. Πράγματι,

<u>στο x-άξονα:</u>
$$\overline{F}_x = \frac{1}{\Delta t}(p_{\tau\varepsilon\lambda,x} - p_{\alpha\rho\chi,x}) = \frac{1}{\Delta t}[m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}\cos 40^o - (-m\upsilon_{\alpha\rho\chi})]$$
$$= \frac{1}{0.015}0.110(4\cos 40^o + 2.6) = 41.5Nt$$

<u>στο y-άξονα:</u>
$$\overline{F}_y = \frac{1}{\Delta t}(p_{\tau\varepsilon\lambda,y} - p_{\alpha\rho\chi,y}) = \frac{1}{\Delta t}(m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}\sin 40^o - 0)$$
$$= \frac{1}{0.015}0.110(4\sin 40^o - 0) = 18.8Nt$$

άρα

$$\overline{F} = \overline{F}_x\vec{\boldsymbol{i}} + \overline{F}_y\vec{\boldsymbol{j}} = 41.5\vec{\boldsymbol{i}} + 18.8\vec{\boldsymbol{j}}\ (Nt),$$

ή

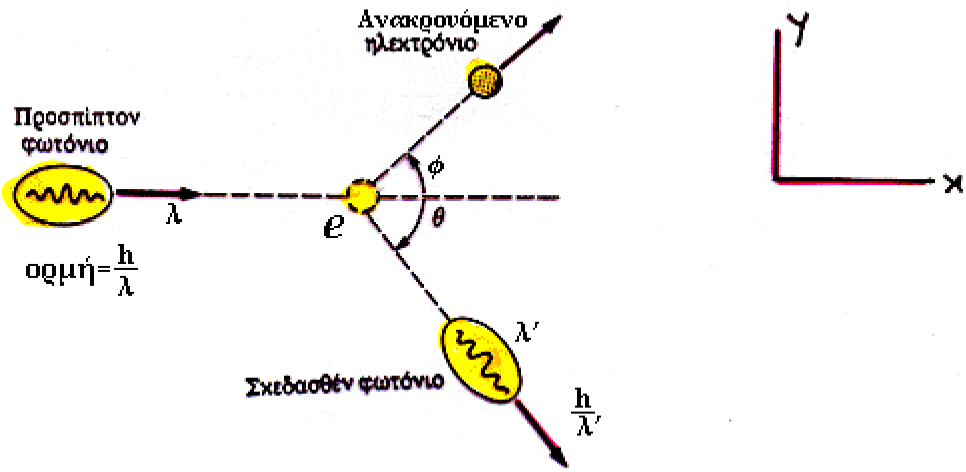
$$\overline{F} = \sqrt{41.5^2 + 18.8^2} = 45.6Nt, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\overline{F}_y}{\overline{F}_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{18.8}{41.5}\right) = 27^o.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το παραγόμενο έργο από τη δύναμη $\vec{F}$ πάνω στη μπάλα. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου-ενέργειας έχομε:

$$W = \Delta K = \tfrac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \tfrac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 = \tfrac{1}{2}0.110(4^2 - 2.6^2) = 42Joules$$

Παράδειγμα 3^o (Διατήρηση ορμής-Φαινόμενο Compton): ***Δέσμη φωτός μήκους κύματος λ προσπίπτει πάνω σε νέφος ηρεμούντων (? σχεδόν) ηλεκτρονίων (πχ. μέσα σε μέταλλο). Παρατηρείται ότι εκσφενδονίζονται ηλεκτρόνια έξω από το νέφος. Να υπολογιστεί η μεταβολή του μήκους κύματος του σκεδαζόμενου φωτός (σχετικιστική θεώρηση).***

Λύση: Κατά την κβαντική θεωρία, το φως έχει διπλή υπόσταση, δηλ. εμφανίζει κυματικές ιδιότητες, όπως ανάκλαση, συμβολή κλπ., αλλά και σωματιδιακές ιδιότητες, δηλ. μπορεί να συγκρουστεί με υλικά σώματα, κλπ. Όσον αφορά το τελευταίο ισχυρισμό, ο Max Planck (γύρω στο 1900) υπέθεσε ότι το φως αποτελείται από δέσμη φωτονίων, τα οποία είναι οντότητες που έχουν ενέργεια ίση με hv, ορμή ίση με h/λ, αλλά μάζα m μηδέν. Συνεπώς, κατά τη σκέδαση του φωτός από ηλεκτρόνια, στην ουσία πρόκειται για σύγκρουση φωτονίων πάνω σε ηλεκτρόνια (η προσέγγιση αυτή του προβλήματος οφείλεται στον Einstein).



Κατά τη σχετικιστική προσέγγιση, η ενέργεια ενός σώματος ισούται: $E=\sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2}$, όπου c η ταχύτης του φωτός, και p,m η ορμή και μάζα του σώματος.

Κατά τη κρούση ενός φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο (που ηρεμεί γιατί;), ισχύουν οι ακόλουθοι νόμοι διατήρησης:

α) Ενέργεια πριν τη κρούση = ενέργεια μετά τη κρούση,

$$hv+mc^2=hv'+\sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2} \qquad (9)$$

β) Ορμή πριν τη κρούση = ορμή μετά τη κρούση,

<u>κατά τον x-άξονα:</u> $$\frac{h}{\lambda}+0=\frac{h}{\lambda'}\cos\theta+p\cos\varphi \qquad (10)$$

<u>κατά τον y-άξονα:</u> $$0+0=\frac{h}{\lambda'}\sin\theta-p\sin\varphi \qquad (11)$$

Απαλείφοντας τη γωνία φ μεταξύ των (10),(11), παίρνουμε

$$\frac{h^2}{\lambda^2}+\frac{h^2}{\lambda'^2}-2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta=p^2 \qquad (12)$$

Ισχύει: *λν=c*, άρα *ν=c/λ*, και αντικαθιστώντας στην (9),

$$\frac{hc}{\lambda}+mc^2=\frac{hc}{\lambda'}+\sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2} \quad \text{ή} \quad \sqrt{(cp)^2+(mc^2)^2}=\frac{hc}{\lambda}+mc^2-\frac{hc}{\lambda'},$$

και υψώνοντας στο τετράγωνο,

$$(cp)^2+(mc^2)^2=\frac{h^2c^2}{\lambda^2}+(mc^2)^2+\frac{h^2c^2}{\lambda'^2}+2\frac{hc}{\lambda}mc^2-2mc^2\frac{hc}{\lambda'}-2\frac{hc}{\lambda}\frac{hc}{\lambda'}$$

ή

$$(cp)^2=\frac{h^2c^2}{\lambda^2}+\frac{h^2c^2}{\lambda'^2}+2\frac{hc}{\lambda}mc^2-2mc^2\frac{hc}{\lambda'}-2\frac{hc}{\lambda}\frac{hc}{\lambda'}.$$

Αντικαθιστώντας την ορμή p από την (12) παίρνομε,

$$\frac{c^2h^2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\theta)=mc^2\left(\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}\right),$$

οπότε η μεταβολή του μήκους κύματος του σκεδαζόμενου φωτός είναι

$$\boxed{\Delta\lambda\equiv(\lambda'-\lambda)=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)}.$$

Η σταθερά $\lambda_C\equiv\frac{h}{mc}=0.0242\,\text{Å}$ καλείται μήκος κύματος Compton.