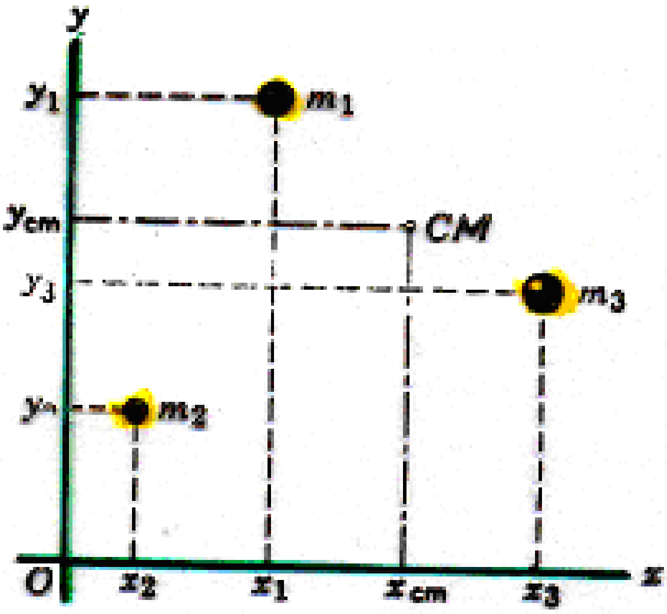
Φροντιστήριο 3^o:

Εξίσωση κίνησης στερεών σωμάτων και επίλυση

(ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ, ΚΥΛΙΣΗ,…)

Στερεό σώμα (διάκριτη κατανομή): ορίζεται ως ένα σύνολο σημειακών μαζών που διατηρούν σταθερές αποστάσεις μεταξύ τους.



Κέντρο μάζας (διάκριτη κατανομή): είναι το σημείο με συντεταγμένες (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{M_{o\lambda}} \qquad (1α)$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{M_{o\lambda}} \qquad (1β)$$

$$z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_N z_N}{M_{o\lambda}} \qquad (1γ)$$

όπου $M_{o\lambda} = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$, ή γενικώς

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{M_{o\lambda}} \qquad (1)$$

Κέντρο μάζας (συνεχής κατανομή): ορίζεται γενικά από τη σχέση:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M_{ολ}} \int_{Σ} \vec{r} dm = \frac{1}{M_{ολ}} \int_{Σ} ρ\vec{r} dV \quad (2)$$

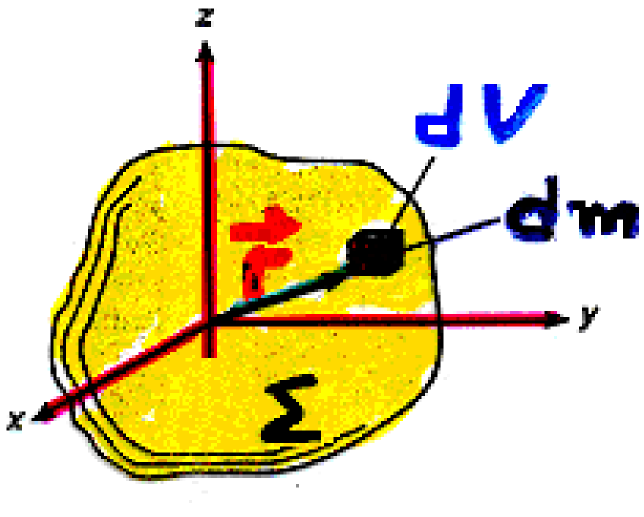
ή

$$x_{cm} = \frac{1}{M_{ολ}} \int_{Σ} x dm = \frac{1}{M_{ολ}} \int_{Σ} ρ x dV \quad (2α)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M_{ολ}} \int_{Σ} y dm = \frac{1}{M_{ολ}} \int_{Σ} ρ y dV \quad (2β)$$

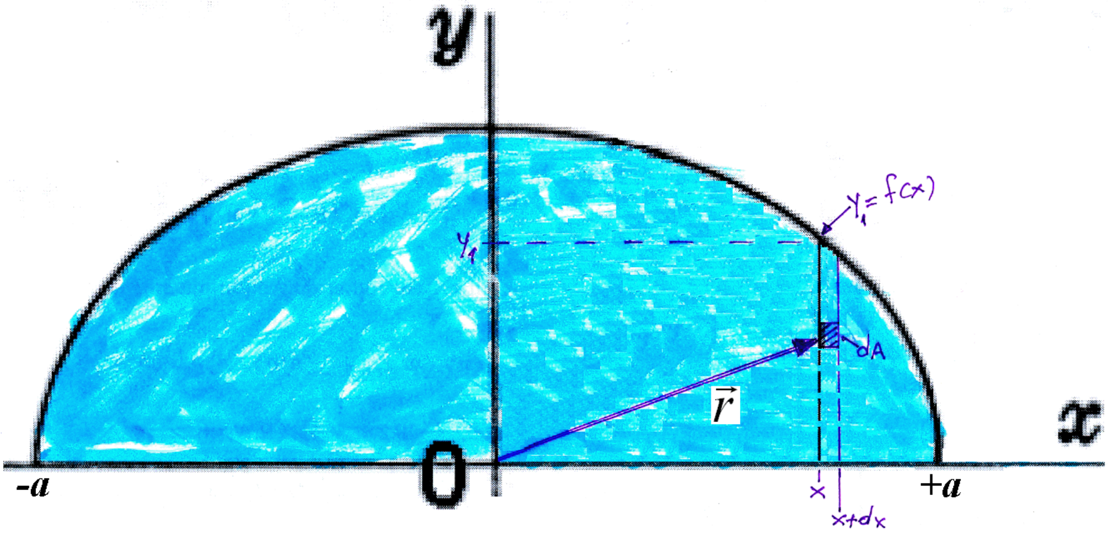
$$z_{cm} = \frac{1}{M_{ολ}} \int_{Σ} z dm = \frac{1}{M_{ολ}} \int_{Σ} ρ z dV \quad (2γ)$$

όπου $ρ = \frac{dm}{dV} \xrightarrow[ρ=σταθ]{} \frac{M_{ολ}}{V_{ολ}}$, V ο όγκος του σώματος Σ.



Παράδειγμα 1^{ο} (κέντρο βάρους): Να βρεθεί το κέντρο βάρους μισής ελλειπτικής επιφάνειας με ημιάξονες a και b (a>b), η οποία έχει πάχος αμελητέο και μάζα Μ.

Λύση: Λαμβάνουμε το επίπεδο της έλλειψης σαν επίπεδο x-y. Θεωρούμε τη στοιχειώδη μάζα *dm=σdA* στο σημείο P, όπου d*A* είναι το στοιχειώδες εμβαδόν και σ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας, $\sigma = \dfrac{dm}{dA} \xrightarrow[\sigma=\sigma\tau\alpha\theta]{} \dfrac{M_{o\lambda}}{A_{o\lambda}} = \dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi ab}$.



Το κέντρο βάρους υπολογίζεται από τις σχέσεις (2α),(2β):

$$x_{cm} = \frac{1}{M_{o\lambda}} \int_{\Sigma} \rho x dV \rightarrow \frac{1}{M} \int_{A} \sigma x dA = \frac{\sigma}{M} \int_{A} x dx dy \qquad (\alpha)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M_{o\lambda}} \int_{\Sigma} \rho y dV \rightarrow \frac{1}{M} \int_{A} \sigma y dA = \frac{\sigma}{M} \int_{A} y dx dy \qquad (\beta)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M_{o\lambda}} \int_{\Sigma} z dm = 0$$

Το ολοκλήρωμα στην (α) ή (β) είναι διπλό και υπολογίζεται πάνω στη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια A. Γράφεται ως εξής:

$$\int_{A} x dx dy = \int_{-a}^{+a} x dx \int_{0}^{y_1} dy = *$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται για x=σταθερό, οπότε τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος είναι: από $y=0 \rightarrow y = y_1 = f(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Για την ημιέλλειψη του σχήματος ισχύει y≥0, οπότε κρατάμε μόνο το συν (+) πρόσημο. Συνεπώς το προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$* = \int_{-a}^{+a} xdx \int_{0}^{y_1} dy = \int_{-a}^{+a} xdx(y)_{y=0}^{y=y_1} = \frac{b}{a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, xdx =$$

$$= \frac{b}{a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{d(a^2 - x^2)}{-2} = -\frac{b}{2a} \left. \frac{\left(a^2 - x^2\right)^{3/2}}{3/2} \right|_{x=-a}^{x=+a} = 0$$

Παρομοίως, *το διπλό ολοκληρώματα στη (β) γράφεται,*

$$\int_A ydxdy = \int_{-a}^{+a} dx \int_{0}^{y_1} ydy = \int_{-a}^{+a} dx\left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=y_1} = \frac{b^2}{2a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{b^2}{2a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-a}^{x=+a} = \frac{b^2}{2a^2}\left[a^2 a - \frac{a^3}{3} - a^2(-a) + \frac{(-a)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{b}{2a^2}\left(2a^3 - \tfrac{2}{3}a^3\right) = \frac{b^2}{a^2}\tfrac{2}{3}a^3 = \tfrac{2}{3}ab^2$$

Αντικαθιστώντας στη (β) παίρνουμε,

$$y_{cm} = \tfrac{\sigma}{M}\int_A ydxdy = \frac{\frac{2M}{\pi ab}}{M}\tfrac{2}{3}ab^2 = \tfrac{4}{3\pi}b\,,$$

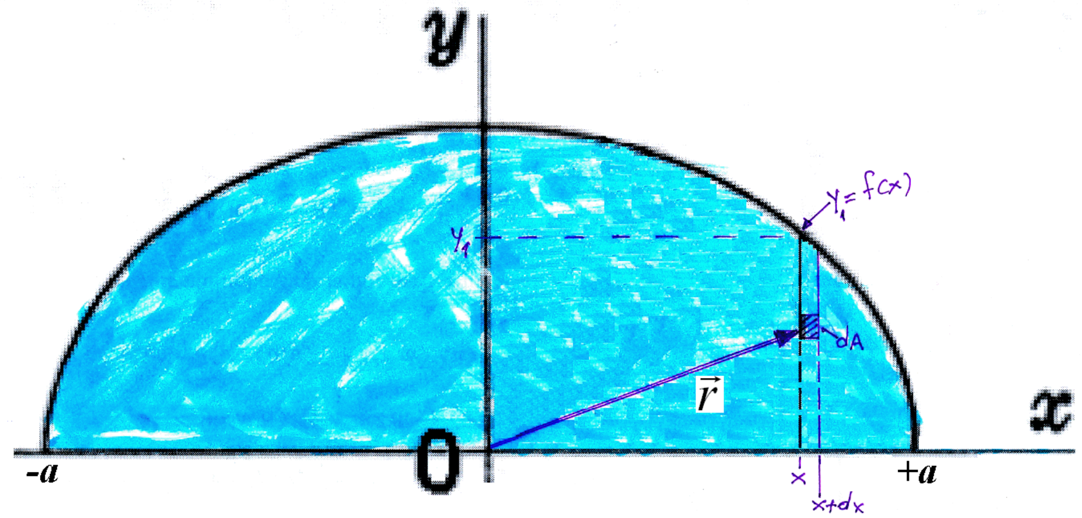
επομένως, το ΚΒ της ημι-έλλειψης είναι το σημείο: $(0, \tfrac{4}{3\pi}b, 0)$

<u>Ροπή αδρανείας σώματος</u> (ως προς συγκεκριμένο άξονα) ορίζεται η βαθμωτή ποσότητα

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_N r_N^2 = \int_\Sigma r^2 dm = \int_\Sigma r^2 \rho dV \qquad (3)$$

όπου r_i είναι η απόσταση της (σημειακής) μάζας m_i από τον θεωρούμενο άξονα ($r_i \geq 0$), ενώ στη συνεχή κατανομή, r είναι η απόσταση της στοιχειώδους μάζας dm από τον θεωρούμενο άξονα και η ολοκλήρωση εκτείνεται πάνω στο όγκο του σώματος Σ.

Παράδειγμα 2^o (ροπή αδρανείας): Να υπολογιστεί το η ροπή αδρανείας μισής ελλειπτικής επιφάνειας, με ημιάξονες a και b (a>b), αμελητέου πάχους και μάζας M, ως προς άξονα που ταυτίζεται με τον μεγάλο ημι-άξονα της έλλειψης.



Λύση: Λαμβάνουμε το επίπεδο της έλλειψης σαν επίπεδο x-y. Θεωρούμε τη στοιχειώδη μάζα $dm=\sigma dA$ στο σημείο P, όπου d*A* είναι το στοιχειώδες εμβαδόν και σ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας, $\sigma = \dfrac{dm}{dA} \xrightarrow[\sigma=\sigma\tau\alpha\theta]{} \dfrac{M_{o\lambda}}{A_{o\lambda}} = \dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi ab}$. Ο άξονας ως προς τον οποίο υπολογίζεται η ροπή αδρανείας ταυτίζεται με τον x-άξονα.

Η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα x υπολογίζεται από τη (3). Η απόσταση της στοιχειώδους μάζας *dm από τον συγκεκριμένο άγονα είναι* $r \equiv y$, *οπότε η (3) γράφεται,*

(δεν πρέπει να μπερδέψουμε την "απόσταση" r με το "διάνυσμα θέσης" $\vec{r}$ *του σχήματος)*

$$I_x = \int_{\Sigma} r^2 \rho dV \to \sigma \int_A y^2 dA = \sigma \int_A y^2 dx dy = \sigma \int_{-a}^{+a} dx \int_0^{y_1} y^2 dy$$

$$= \sigma \int_{-a}^{+a} dx \left(\frac{y^3}{3}\right)_{y=0}^{y=y_1} = \sigma \frac{b^3}{3a^3} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^{3/2} dx^{\ddagger}$$

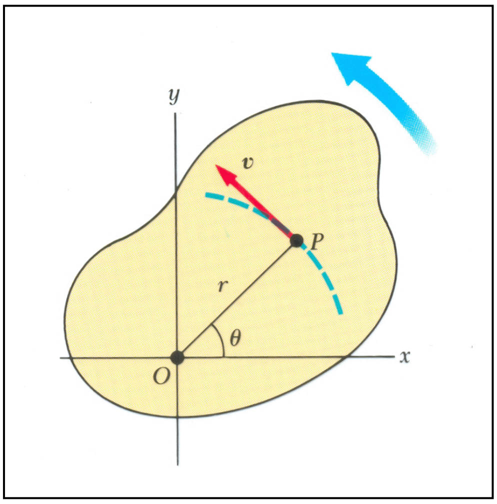
$$= \frac{\sigma b^3}{3a^3} \left[\tfrac{1}{4} x (a^2 - x^2)^{3/2} + \tfrac{3}{8} a^2 x \sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{3}{8} a^4 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\Bigg|_{x=-a}^{x=+a}$$

$$= \frac{\sigma b^3}{3a^3} \left[+\tfrac{3}{8} a^4 \sin^{-1}\left(\frac{+a}{a}\right) - \tfrac{3}{8} a^4 \sin^{-1}\left(\frac{-a}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{\sigma b^3}{3a^3} \left[+\tfrac{3}{8} a^4 \frac{\pi}{2} - \tfrac{3}{8} a^4 \frac{-\pi}{2}\right] = \frac{\sigma b^3}{3a^3} \frac{3}{8} a^4 \pi = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi a b} b^3 \tfrac{1}{8} a \pi = \tfrac{1}{4} M b^2$$

(αν δεν έχω κάνει λάθος υπολογισμούς)

▶ ***περιστροφική κίνηση*** *(γύρω από σταθερό άξονα)*



Εξισώσεις κίνησης: $\vec{\tau}_{o\lambda} = I\vec{\alpha}$ *(1)*

όπου $\vec{\tau}_{o\lambda} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \cdots$ *η συν. ροπή*

και $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ *η γωνιακή επιτάχυνση.*

Επειδή η στροφορμή ισούται με $\vec{L} = I\vec{\omega}$, *η (1) μπορεί ακόμη να γραφεί:* $\vec{\tau}_{o\lambda} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ *(2)*

Η *(2) μπορεί να γραφεί:* $d\vec{L} = \vec{\tau}_{o\lambda} dt$ *η οποία ολοκληρώνεται:*

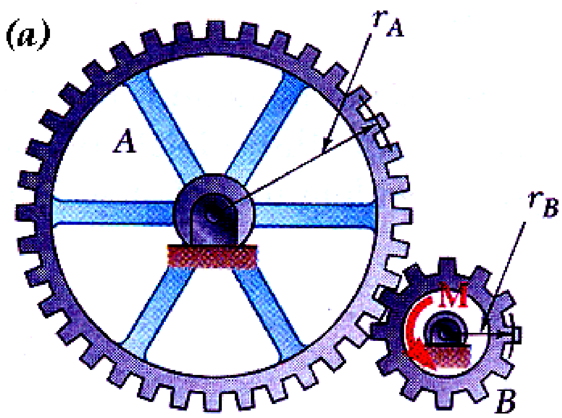
---

‡ Μπορείτε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα ή να χρησιμοποιήσετε το ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ της σειράς SCHAUM'S.

$$\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} \vec{\tau}_{o\lambda}\, dt \qquad (3)$$

Η σχέση (3) αποτελεί το αντίστοιχο θεώρημα ώθησης – ορμής για τη περιστροφική κίνηση.

Παράδειγμα 3^{o}: *Στο παρακάτω σχήμα, το γρανάζι A (μάζας 10Kgr και εξωτ. ακτίνα 250mm), συζευγνύεται με το γρανάζι B (μάζας 3Kgr και εξωτ. ακτίνας 100mm). Το σύστημα είναι αρχικά σε ηρεμία, όταν εφαρμόζεται στο B μια εξωτερική ροπή $\vec{\tau}$ μέτρου $\tau=6Nt{\cdot}m$. Αγνοώντας τις τριβές, να υπολογιστεί: (α) ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί το B όταν φθάνει την γωνιακή ταχύτητα 600rpm,(β) η εφαπτομενική δύναμη που ασκεί το γρανάζι B στο A.*



(Στο σχήμα, η ροπή συμβολίζεται με *M*)

Λύση: Οι ταχύτητες των σημείων της περιφέρειας και στα 2 γρανάζια είναι ίσες, σχήμα (b), οπότε

$$\upsilon_A = r_A\omega_A = r_B\omega_B = \upsilon_B, \text{ άρα } \omega_A = \omega_B r_B / r_A = \omega_B \frac{100mm}{250mm} = 0.4\omega_B$$

Για *ω_B=600rpm=62.8$\frac{rad}{s}$*, *έχομε:* *ω_A=240rpm=25.1$\frac{rad}{s}$*. *Οι ροπές αδρανείας είναι:*

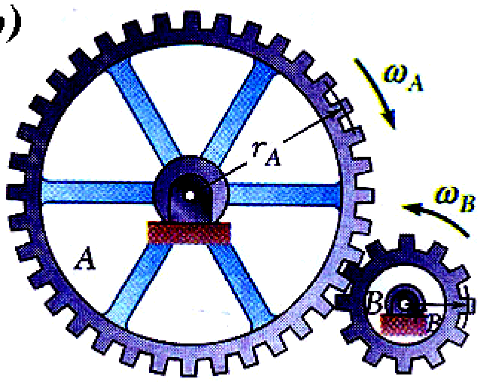
$$I_A = m_A r_A^2 = 10Kgr(0.25m)^2 = 0.625Kgr\cdot m^2$$
$$I_B = m_B r_B^2 = 3Kgr(0.10m)^2 = 0.03Kgr\cdot m^2$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_A \omega_A^2 + \tfrac{1}{2} I_B \omega_B^2 = \tfrac{1}{2}(0.625 Kgr\, m^2)(25.1 \tfrac{rad}{s})^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(0.03 Kgr \cdot m^2)(62.8 \tfrac{rad}{s})^2 = 256\, Joules$$

(ως κατάσταση 1, θεωρούμε την αρχική κατάσταση ηρεμίας, οπότε $T_1 = 0$)

(b)

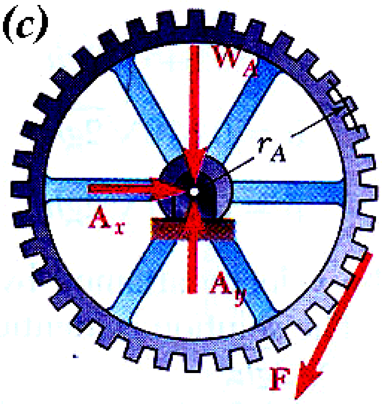


Παραγόμενο έργο: Έστω θ_B η γωνία που περιστρέφεται το γρανάζι B, οπότε $W_{1\to 2} = \tau\theta_B = (6 Nt \cdot m)\theta_B = (6\theta_B) Joules$.

Το θεώρημα έργου-ενέργειας για το σύστημα, $\Delta T \equiv T_2 - T_1 = W_{1\to 2}$, μπορεί να μας δώσει τη γωνία θ_B. Πράγματι, αντικαθιστώντας παίρνομε

$$\theta_B = \frac{256}{6} rad = 42.7 rad \text{, ή}$$
$$\theta_B = 6.79 \pi\varepsilon\rho. \blacktriangleleft$$

(c)



Κίνηση του γραναζιού Α: Αρχικά το γρανάζι ισορροπεί, άρα $T_{A1} = 0$. Όταν *$\omega_B = 600 rpm = 62.8 \frac{rad}{s}$, βρήκαμε:* ***$\omega_A = 240 rpm = 25.1 rad/s$, οπότε τότε η κινητική ενέργεια του γραναζιού Α θα είναι:***

$$T_{A2} = \tfrac{1}{2} I_A \omega_A^2 = \tfrac{1}{2}(0.625 Kgr \cdot m^2)(25.1 rad/s)^2 =$$

Έργο πάνω στο γρανάζι Α: Οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο γρανάζι Α φαίνονται στο σχήμα (c). Μόνο η εφαπτομενική δύναμη F παράγει έργο: $W_{A1\to 2} = F \cdot (r_A \theta_A)$. **Εφόσον τα μήκη των τόξων που διαγράφονται από τα 2 γρανάζια είναι ίσα, δηλ.** $r_A\theta_A = r_B\theta_B$, **έπεται:** $W_{1\to 2} = F \cdot (r_B\theta_B)$. **Χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου-ενέργειας για το γρανάζι Α,** $\Delta T \equiv T_{A2} - T_{A1} = W_{A1\to 2}$, **υπολογίζουμε τη δύναμη F:**

$$F = \frac{T_{A2} - T_{A1}}{(r_B\theta_B)} = \frac{197 J}{0.1 m \cdot 42.7 rad} = 46.2 Nt \blacktriangleleft$$

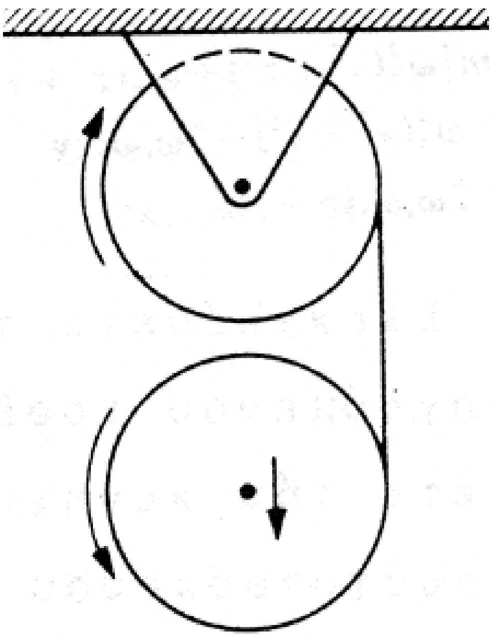
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3) για να βρούμε την εσωτερική δύναμη F. Πράγματι, για το γρανάζι Α έχομε: $L_{A1}=0$, $L_{A2}=I_A\omega_A=0.625 Kgr\, m^2\, 25.1\frac{rad}{s}=15.7 Nt\, m\, s$, **και ομοίως για το γρανάζι Β:** $L_{B1}=0$, $L_{B2}=I_B\omega_B=0.03 Kgr\, m^2\, 62.8\frac{rad}{s}=1.88 Nt\, m\, s$. **Οπότε η (3) γράφεται, ανά περίπτωση:**

<u>γρανάζι Α:</u> $L_{A2}-L_{A1}=(Fr_A)\cdot t$, (α)
<u>γρανάζι Β:</u> $L_{B2}-L_{B1}=\tau\cdot t-(Fr_B)\cdot t$. (β)

Απαλείφοντας τον χρόνο t μεταξύ των (α) και (β), παίρνομε:

$$\frac{\tau\cdot L_{A2}}{Fr_A}=L_{B2}+\frac{r_B}{r_A}L_{A2}, \text{ ή } F=\frac{\tau}{r_A\frac{L_{B2}}{L_{A2}}+r_B}=\frac{6 Ntm}{0.25m\frac{1.88}{15.7}+0.1m}=46.2 Nt \blacktriangleleft$$

***Παράδειγμα 4^o:* Οι δύο δίσκοι του σχήματος έχουν την ίδια μάζα m και ακτίνα R. Ο δίσκος που βρίσκεται ψηλότερα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του. Ένα σχοινί τυλιγμένο γύρω από τις περιφέρειες τους, τους επιτρέπει να περιστρέφονται, καθώς ο χαμηλότερος δίσκος πέφτει κατακόρυφα. Βρείτε (α) τη γραμμική επιτάχυνση του χαμηλότερου δίσκου, (β) τη τάση του σχοινιού, (γ) τη γωνιακή επιτάχυνση κάθε δίσκου γύρω από τον άξονα περιστροφής του.**

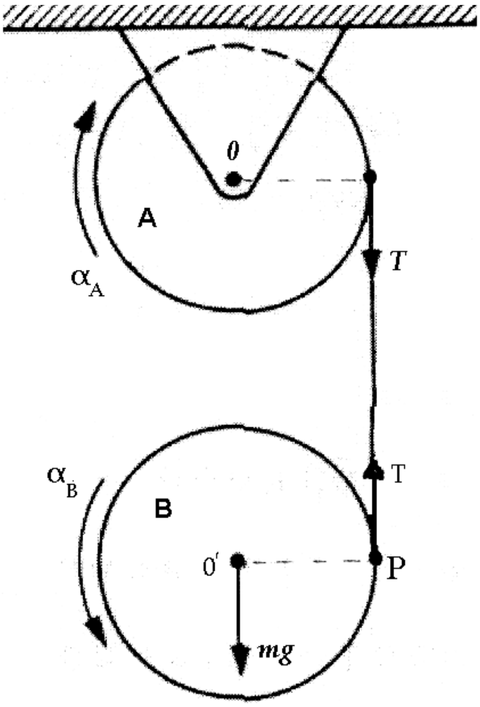


Λύση: Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται καθένας δίσκος. Έστω α_A *και* α_B οι γωνιακές επιταχύνσεις των δίσκων Α και Β, αντίστοιχα. Οι εξισώσεις κίνησης των δίσκων είναι:

<u>δίσκος Α</u>, περιστροφή ως προς 0: $T\cdot R_1=I_0\alpha_A$ (α)
<u>δίσκος Β</u>, περιστροφή ως προς 0′: $T\cdot R_2=I_{0'}\alpha_B$ (β)

[μεταφορική κίνηση]() του 0′: $m_2 g - T = m_2 \text{a}_B$ (γ)

όπου $I_0 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$, $I_{0'} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$ και a_B η γραμμική επιτάχυνση του 0′.



Σύνθεση ταχυτήτων των σημείων της περιφερείας του B: $\upsilon_B = R_1 \omega_A + R_2 \omega_B$, οπότε

$$\text{a}_B = R_1 \alpha_A + R_2 \alpha_B . \qquad (\delta)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (α)-(δ), βρίσκουμε:

Τάση του νήματος: $T = \frac{m_1 m_2 g}{3m_1 + 2m_2} = \frac{1}{5} mg$ ◀

Γωνιακή επιτάχυνση του Α:

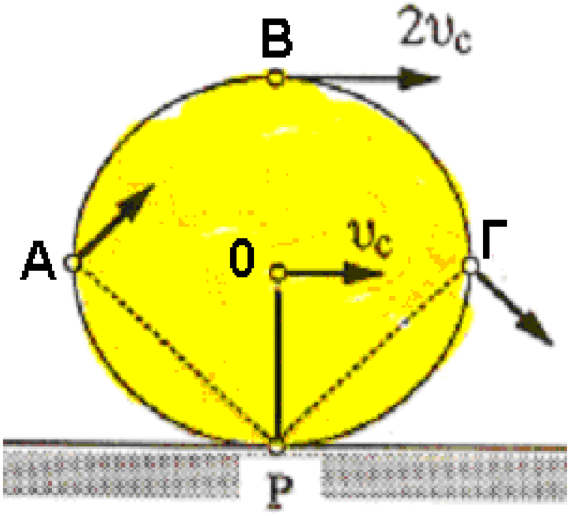
$$\alpha_A = \frac{2m_2 g}{(3m_1 + 2m_2) R_1} = \frac{2}{5} \frac{g}{R}$$ ◀

Γωνιακή επιτάχυνση του Β:

$$\alpha_B = \frac{2m_1 g}{(3m_1 + 2m_2) R_2} = \frac{2}{5} \frac{g}{R}$$ ◀

Γραμμική επιτάχυνση του Β: $\text{a}_B = \frac{2(m_1 + m_2)}{3m_1 + 2m_2} g = \frac{4}{5} g$ ◀

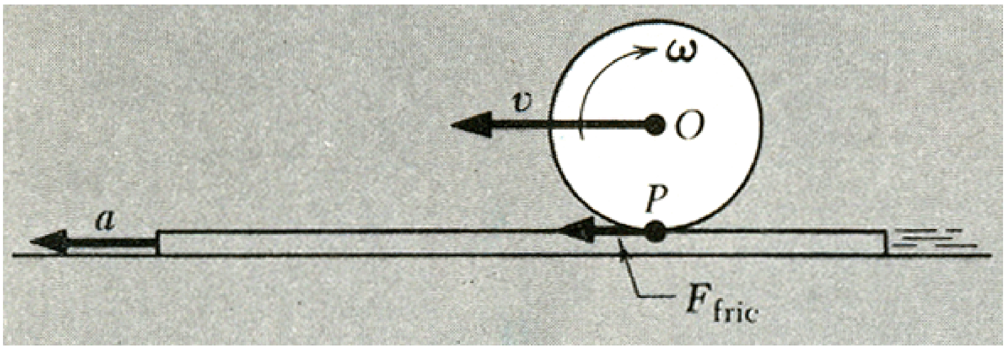
► ***κύλιση*** *(περιστροφή γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής)*



Εξίσωση κίνησης: $\vec{\tau}_{ολ} = I_P \vec{\alpha}$ *(1)*

όπου η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων, I_P η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής που περνά από το σημείο επαφής με το δρόμο P, και $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ *είναι η* *γωνιακή επιτάχυνση ως προς P.*

Παράδειγμα 4º (κύλιση): ***Στο παρακάτω σχήμα, ένας κύλινδρος μπορεί να κυλίεται πάνω σε ιμάντα με ανώμαλη επιφάνεια, ο οποίος σύρεται με επιτάχυνση α. Προσδιορίσετε τη κίνηση του κυλίνδρου, ο οποίος δεν ολισθαίνει πάνω στον ιμάντα.***



Λύση: Πάνω στο κύλινδρο, η μοναδική οριζόντια δύναμη που ασκείται είναι η δύναμη τριβής F_{fric} από τον ιμάντα, η οποία εφαρμόζεται στο σημείο επαφής P (οι κατακόρυφες δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται). Οι εξισώσεις κίνησης του κυλίνδρου γράφονται:

περιστροφή ως προς P: $0 = I_P \alpha$

μεταφορ. κίνηση του 0: $F_{fric} = m$a

όπου $I_P = I_0 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$, α είναι η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου, και a η γραμμική επιτάχυνση του CM του κυλίνδρου ως προς τον ιμάντα. Ισχύει: a=Rα. Όμως οι παραπάνω εξισώσεις είναι λάθος, αφού αναφέρονται ως σύστημα αναφοράς (του ιμάντα) που δεν είναι αδρανειακό!

Αν θέλουμε να εργαστούμε στο σύστημα αυτό του ιμάντα, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και τις δυνάμεις αδρανείας d' Alembert. Τότε, ασκείται στο CM του κυλίνδρου επί πλέον η (οριζόντια) δύναμη αδρανείας –mα (το μείον δηλώνει ότι η φορά της δύναμης αυτής είναι αντίθετη της φοράς της α). Οπότε οι εξισώσεις κίνησης του κυλίνδρου στο σύστημα αναφοράς του ιμάντα γράφονται:

περιστροφή ως προς P: $ma \cdot R = I_P \alpha$ (α)
μεταφορ. κίνηση του 0: $ma - F_{fric} = m\mathrm{a}$ (β)

Τώρα η (α) δίνει: $\alpha = \frac{2}{3}\frac{a}{R}$, άρα: $\mathrm{a} = R\alpha = \frac{2}{3}a$, ενώ η (β) δίδει:

$$F_{fric} = ma - m\mathrm{a} = ma - \tfrac{2}{3}ma = \tfrac{1}{3}ma\,.◄$$

Η ολική επιτάχυνση του κυλίνδρου ως προς ακίνητο παρατηρητή θα είναι το άθροισμα:

$$\mathrm{a}_K = a - \mathrm{a} = a - \tfrac{2}{3}a = \tfrac{1}{3}a\,.◄$$