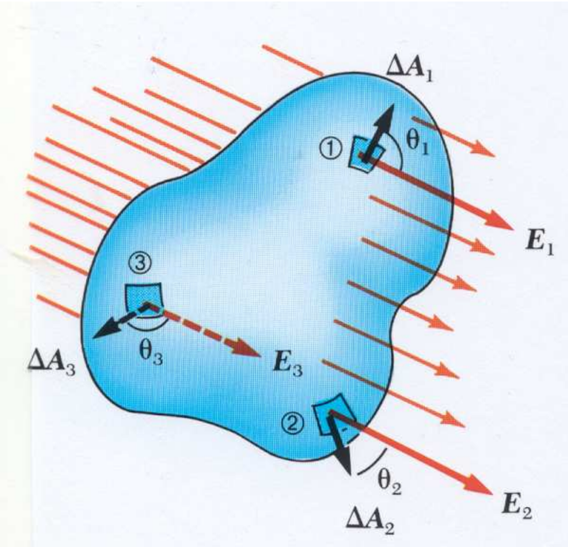
ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ (συνέχεια)

ΝΟΜΟΣ GAUSS ΓΙΑ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Η ηλεκτρική ροή που διέρχεται δια μέσου μιας (τυχούσας) επιφάνειας Α είναι

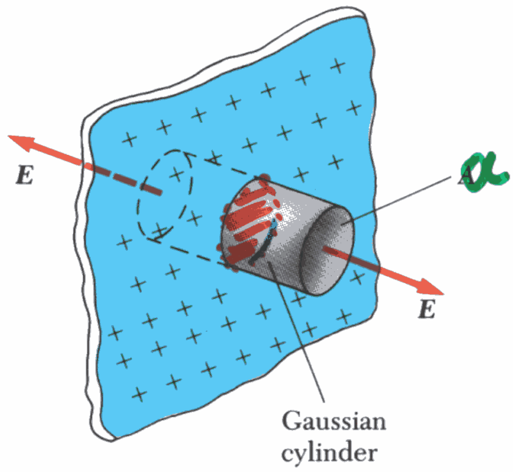
$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα υπολογίζεται πάνω στην επιφάνεια Α, ενώ Ε είναι η τιμή του ηλ. πεδίου στη στοιχειώδη επιφάνεια dA (παραπάνω σχήμα)

Ο νόμος του Gauss λέει ότι η συνολική ηλ. ροή που διέρχεται δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας Α ισούται με $q_{ολ}/\varepsilon_o$, όπου $q_{ολ}$ είναι το ολικό φορτίο που περικλείεται μέσα στην επιφάνεια Α, δηλ.

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_o}$$

- *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο*



Εστω σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του επιπέδου. Λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κάθετες προς το επίπεδο (γιατί;).

Θεωρούμε σαν κλειστή επιφάνεια Α, την κυλινδρική επιφάνεια του σχήματος. Τότε η ηλεκτρική ροή δια μέσου της Α ισούται

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2E\alpha$$

ενώ το συνολικό φορτίο που περικλείεται μέσα στην Α είναι: $q_{o\lambda}=\alpha\sigma$. Συνεπώς, ο νόμος του Gauss δίδει: $2E\alpha=\alpha\sigma/\varepsilon_o$ ή

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

δηλ. το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές και δεν εξαρτάται από την απόσταση x του σημείου P από το επίπεδο.

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση x από το επίπεδο υπολογίζεται από τη σχέση E=-dV/dx, συνεπώς

$$V(x) - V(0) = -\int_0^x E dx = -E \cdot x$$

όπου V(0) είναι η τιμή του δυναμικού πάνω στο επίπεδο. Αν υποθέσουμε V(0)=0, τότε το δυναμικό σε απόσταση x από το επίπεδο θα έχει τη μορφή

$$V(x) = -E \cdot x = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} x$$

ΝΟΜΟΣ GAUSS ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Ο ν. Gauss γράφεται:

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_o} \qquad (1)$$

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα της απόκλισης ή θεώρημα του Green για το ηλεκτρικό πεδίο E (το *θεώρημα αυτό ισχύει για $\forall$ διανυσματική συνάρτηση). Το θεώρημα αυτό γράφεται:*

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, d\Omega \qquad (2)$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα είναι επιφανειακό και υπολογίζεται πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια Α, ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι τριπλό και υπολογίζεται πάνω στον όγκο Ω ο οποίος περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια Α.

Αν ρ είναι η πυκνότητα φορτίου στο χώρο, τότε το συνολικό φορτίο που περικλείεται μέσα στο χώρο Ω είναι

$$q_{o\lambda} = \int_\Omega \rho d\Omega \qquad (3)$$

οπότε αντικαθιστώντας τις (2)-(3) στην (1), λαμβάνουμε,

$$\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, d\Omega = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_\Omega \rho d\Omega$$

η οποία γράφεται

$$\int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_o}) d\Omega = 0$$

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε όγκο Ω, έπεται ότι η ολοκληρώσιμη συνάρτηση πρέπει να ισούται με μηδέν, δηλ.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad (\text{νόμος Gauss})$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τον νόμο του Gauss σε διαφορική μορφή.

Επειδή $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$*, η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί σαν εξίσωση του V (και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:* $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$*),*

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad (\text{εξ. Poisson})$$

Η εξίσωση αυτή καλείται εξίσωση Poisson. Ο τελεστής ∇^2 *καλείται Λαπλασιανή (Laplace operator).*

In ***Cartesian*** *coordinates (x,y,z):*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

In ***Cylindrical*** *coordinates (ρ,θ,z):*

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

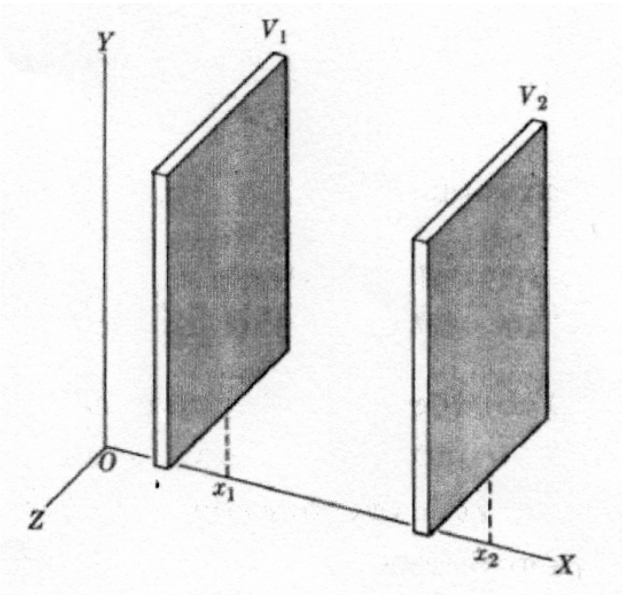
*In **Spherical** coordinates (r,θ,φ):*

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Αν η πυκνότητα του φορτίου είναι ρ=0, τότε η προηγούμενη σχέση είναι γνωστή ως εξίσωση Laplace, δηλ.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (\varepsilon\xi.\ Laplace)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δύο παράλληλες μεταλλικές πλάκες (σε απόσταση d) φέρουν δυναμικά V_1, V_2, αντίστοιχα. Βρείτε το δυναμικό παντού στο χώρο.



Λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου, το πεδίο *και το δυναμικό θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από το x, οπότε στο χώρο μεταξύ των πλακών η εξίσωση Laplace* $\vec{\nabla}^2 V = 0$ *γράφεται,*

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι προφανής. Μια πρώτη ολοκλήρωση δίδει,

$$dV/dx=c$$

όπου c η σταθερά ολοκλήρωσης. Καλούμε τη σταθερά αυτή, –E, δηλ. dV/dx=-E. Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή από $x_1 \to x$ *έχομε,*

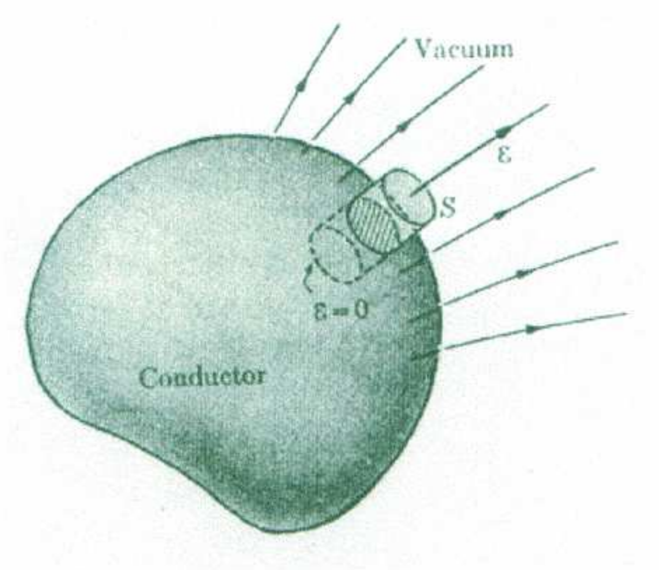
$$V(x) - V(x_1) = -E \cdot (x - x_1)$$

Προφανώς αν θέσουμε $x=x_2$, *προκύπτει η γνωστή μας σχέση (για* $d=x_2-x_1$*),*

$$E = -\frac{V(x_2) - V(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{\Delta V}{d}.$$

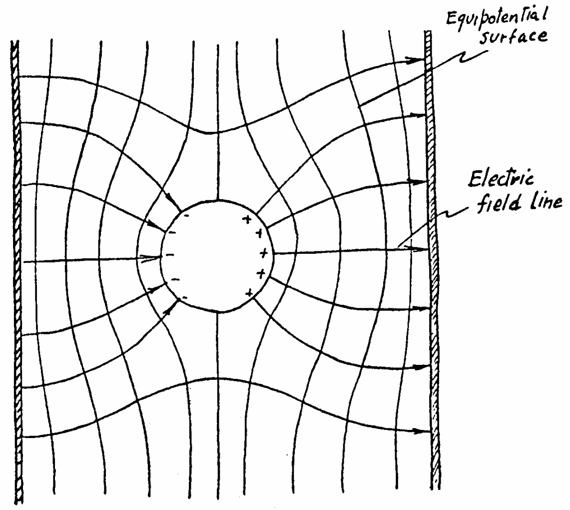
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ: *Θεωρείστε μία μόνο μεταλλική πλάκα σε δυναμικό V_1. Βρείτε το δυναμικό $V(x,y,z)$ παντού στο χώρο.*

- Ηλεκτρικό πεδίο μέσα + έξω από αγωγούς



Εφαρμόζοντας τον νόμο Gauss πάνω στη κλειστή επιφάνεια S του σχήματος, βρίσκουμε $E_{out}=\sigma/\varepsilon_o$, ενώ παντού μέσα στον αγωγό ισχύει: $E=0$.

- Μεταλλική σφαίρα μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο



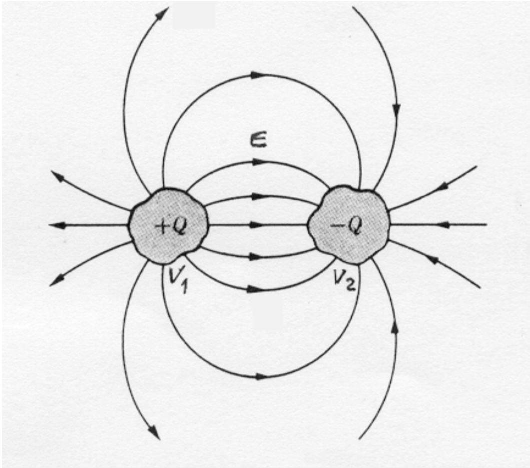
- *ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΣ ΑΓΩΓΟΥ*

ορίζεται η σταθερή ποσότης Q/V, όπου Q είναι το φορτίο του αγωγού και V το δυναμικό του (πάνω στην επιφάνειά του και στο εσωτερικό του). Η ποσότης αυτή συμβολίζεται με C (μονάδες Farads)

- *ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΓΩΓΩΝ*

Ονομάζομε πυκνωτή ένα σύστημα δύο αγωγών οι οποίοι έχουν φορτιστεί με φορτία +Q, -Q, αντίστοιχα (οι αγωγοί καλούνται οπλισμοί του πυκνωτού).

Ορίζουμε ως χωρητικότητα πυκνωτού την ποσότητα $C \equiv Q/V$, όπου Q είναι το φορτίο του ενός αγωγού (απολύτως) και $V=|V_1-V_2|$ η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών.



Στο παράδειγμα των δύο φορτισμένων παραλλήλων επιπέδων πλακών έχομε βρει ότι το πεδίο μεταξύ των πλακών είναι ομογενές με ένταση $E=|V_2-V_1|/d$ *(εκτός των πλακών* $E=0$*). Αν σ είναι η επιφανειακή πυκνότης φορτίου (απόλυτος τιμή) πάνω στις πλάκες, έχομε βρεί ότι* $E=\sigma/\varepsilon_o$*. Συνεπώς*

$$|V_2-V_1|=Ed=d\sigma/\varepsilon_o=d(\sigma A)/(\varepsilon_o A)$$

όμως $\sigma A=Q$*, άρα*

$$C \equiv \frac{Q}{|V_2 - V_1|} = \varepsilon_o \frac{A}{d}$$

Αν μεταξύ των δύο οπλισμών παρεμβάλλεται διηλεκτρικό υλικό διηλεκτρικής σταθερά κ, η σχέση γράφεται,

$$C = \kappa\varepsilon_o \frac{A}{d}$$

κ είναι η διηλεκτρική σταθερά του διηλ. υλικού (γενικά, $C=\kappa C_o$).

(ΔΥΝΑΜΙΚΗ) ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Εστω q το φορτίο του αγωγού στον οποίο προσθέτομε φορτίο dq, άρα δαπανούμε έργο $dW=Vdq$, όπου $V=V_{αγωγού}-V_{\infty}$ (ενώ $V_{\infty}=0$), δηλ. $V=q/C$. Συνεπώς για να φορτιστεί ο αγωγός θα δαπανήσουμε έργο

$$W = \int dW = \int_0^Q Vdq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

(το έργο αυτό είναι δαπανώμενο, δηλ. $W=-Q^2/2C < 0$). Η ηλεκτρική ενέργεια U που αποθηκεύεται μέσα στον αγωγό ισούται

$$U_{τελ}-U_{αρχ}=-W_{αρχ\rightarrow τελ}$$

Υποθέτοντας ότι $U_{αρχ}=0$ και παραλείποντας τον δείκτη, προκύπτει

$$U = \frac{1}{2C}Q^2$$

(πράγματι U>0, εφόσον αυξάνεται η ενέργεια του αγωγού). Ισοδύναμα η σχέση αυτή γράφεται

$$U = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}CQ^2 = \frac{1}{2}QV$$

Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί κατά τον ίδιο τρόπο και για τη περίπτωση της φόρτιση πυκνωτού, οπότε καταλήγουμε στην ίδια σχέση για την ενέργεια που αποθηκεύεται μέσα στο πυκνωτή,

$$U = \frac{1}{2C}Q^2$$

με τη διαφορά ότι τώρα Q είναι το (απόλυτο) φορτίο ενός οπλισμού.

Στη περίπτωση του πυκνωτή με επίπεδους οπλισμούς, η σχέση αυτή γράφεται,

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_o \frac{A}{d})(Ed)^2 = (\tfrac{1}{2}\varepsilon_o E^2)(Ad)$$

Η ποσότης (Ad) παριστά τον όγκο του πεδίου, οπότε η ποσόστης ($\varepsilon_o E^2/2$) παριστά την πυκνότητα ενέργειας του ηλεκ. πεδίου.

Συνεπώς, η ενέργεια αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί σε πιο γενική μορφή

$$U = \int_{\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma} \left(\tfrac{1}{2} \varepsilon_o E^2 \right) d\Omega$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε όλο τον χώρο Ω (πρακτικά μέχρι εκεί που εκτείνεται το ηλεκτρικό πεδίο).