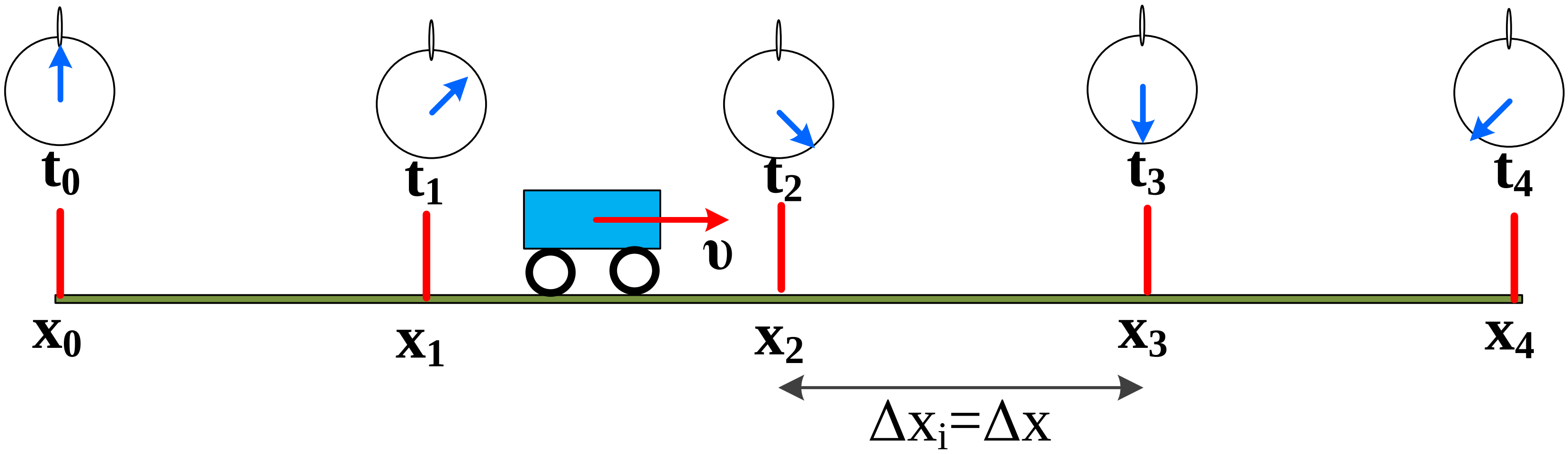
Φυσική σημασία της παραγώγου

Γεωμετρική προσέγγιση

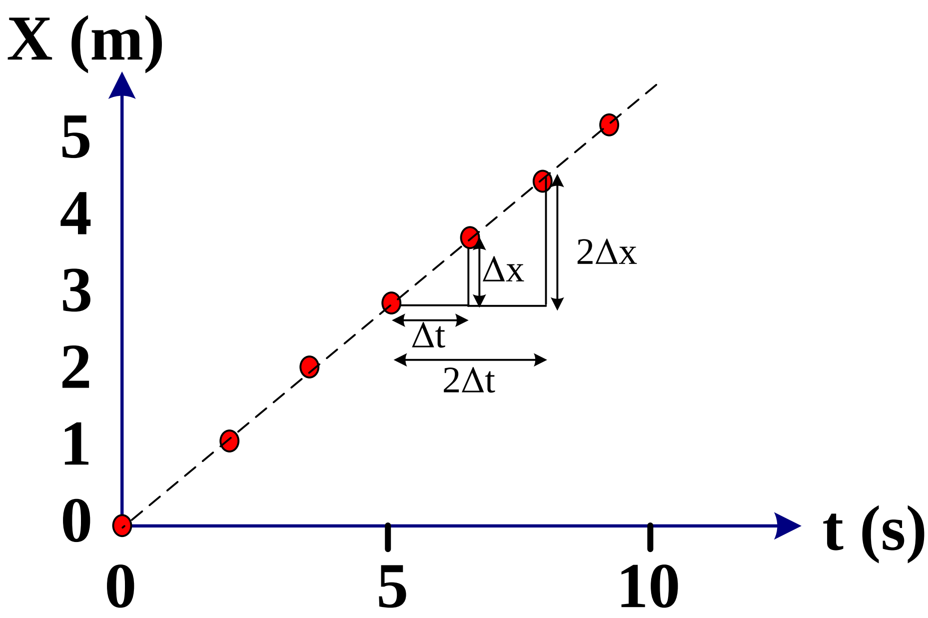
Έστω ότι έχω ένα κινούμενο σώμα και θέλω να μετρήσω την ταχύτητά του.

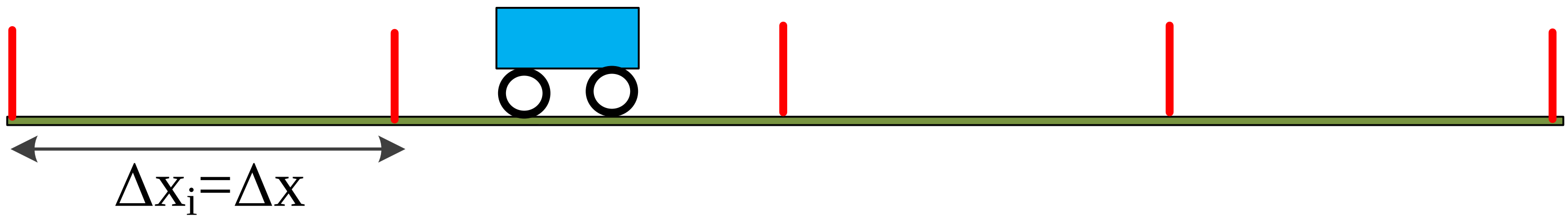
Για το σκοπό αυτό τοποθετώ πασάλους κατά συγκεκριμένα διαστήματα Δx και με ένα χρονόμετρο καταγράφω στο παρακάτω πίνακα μετρήσεων το χρόνο που διέρχεται το όχημα από κάθε πάσαλο

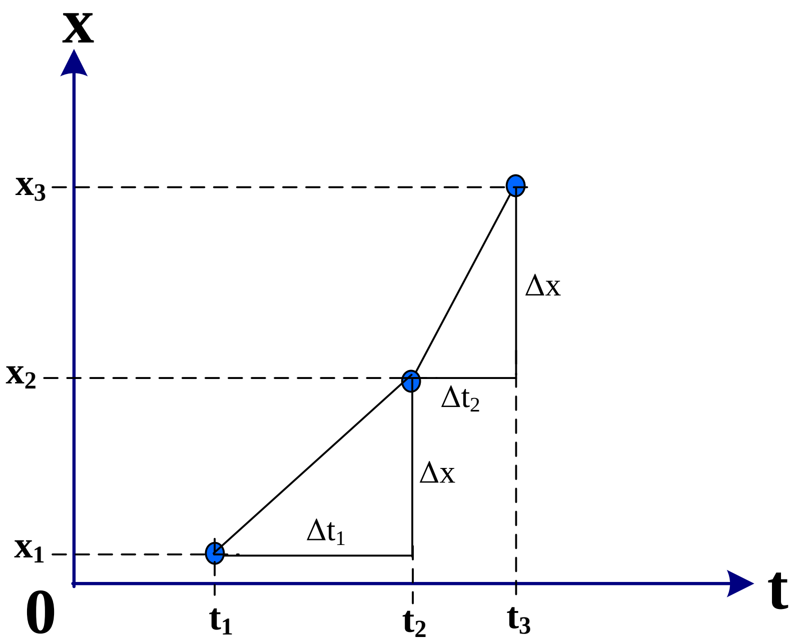


N	t_i (s)	t_{i+1} (s)	$\Delta t = t_{i+1} - t_i$ (s)	x_i (m)	x_{i+1} (m)	$\Delta x = x_{i+1} - x_i$ (m)	$\upsilon = \Delta x / \Delta t$ (m/s)
1	0.0	1.5	1.5	0.0	1.0	1.0	1.0
2	1.5	3.0	1.5	1.0	2.0	1.0	1.0
3	3.0	4.5	1.5	2.0	3.0	1.0	1.0
3	4.5	6.0	1.5	3.0	4.0	1.0	1.0
5	6.0	7.5	1.5	4.0	5.0	1.0	1.0
6	7.5	9.0	1.5	5.0			
7	9.0				.	.	.
.		.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.			
	.						

Από τις διαδοχικές μετρήσεις μετρώ τις μετατοπήσεις και διαιρώ με το Δt Και υπολογίζω την ταχύτητα που παρατηρώ ότι είναι σταθερή

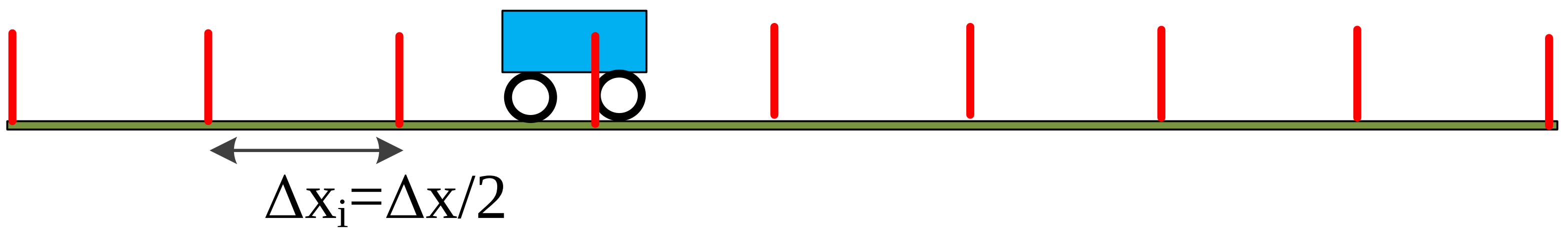


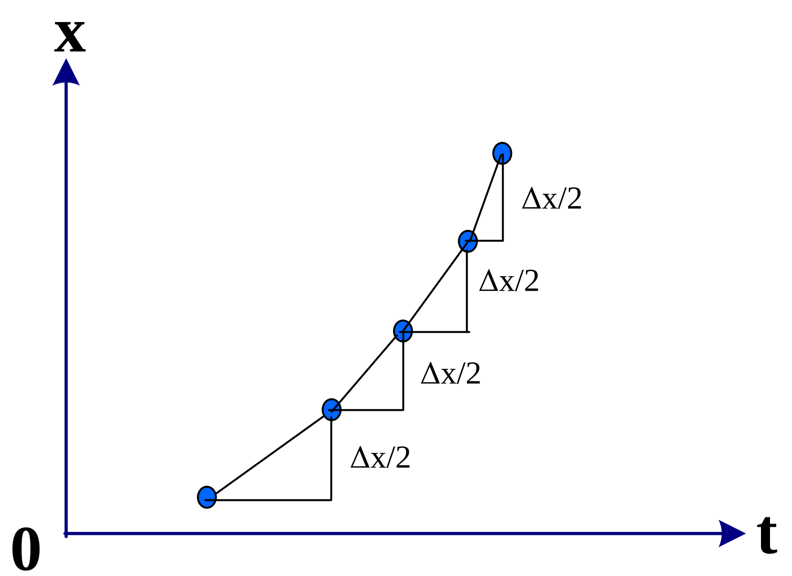




Παρατηρώ πως η ταχύτητα υ_2 σε χρόνο μεταξύ t και t+Δt_2 αντιστοιχεί σε μικρότερη κλίση

Τοποθετώ επιπλέον πασάλους ανάμεσα στους υπάχοντες και έτσι τα διαστήματα γίνονται Δx/2 και με ένα χρονόμετρο καταγράφω στο πίνακα μετρήσεων το χρόνο που διέρχεται το όχημα από κάθε πάσαλο και κάνω γραφική παράσταση του x έναντι του t.

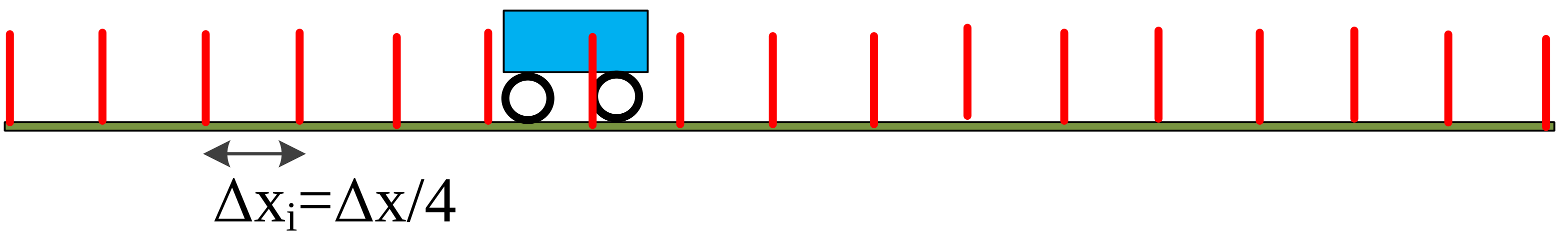


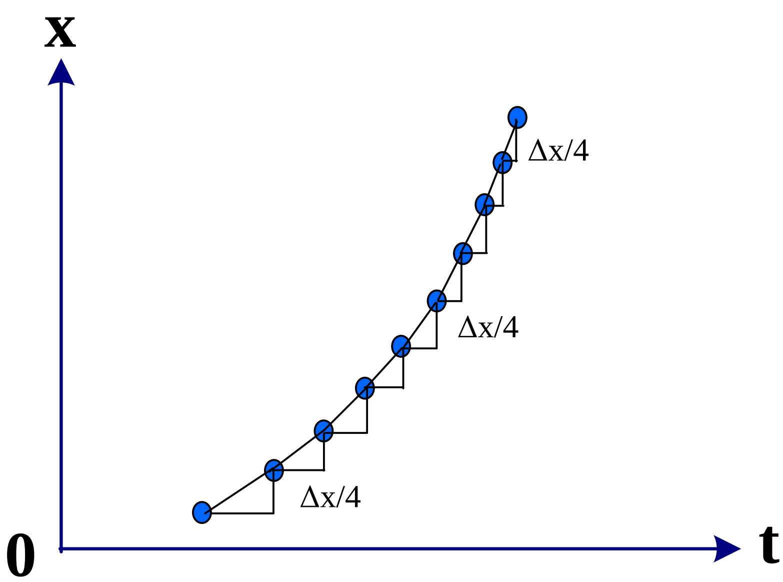


Παρατηρώ πως η ταχύτητα υ_2 σε χρόνο μεταξύ t και t+Δt_2 αντιστοιχεί σε μικρότερη κλίση

$$\upsilon_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} < \upsilon_1$$

Τοποθετώ επιπλέον πασάλους ανάμεσα στους υπάχοντες και έτσι τα διαστήματα γίνονται Δx/2 και με ένα χρονόμετρο καταγράφω στο πίνακα μετρήσεων το χρόνο που διέρχεται το όχημα από κάθε πάσαλο και κάνω γραφική παράσταση του x έναντι του t.





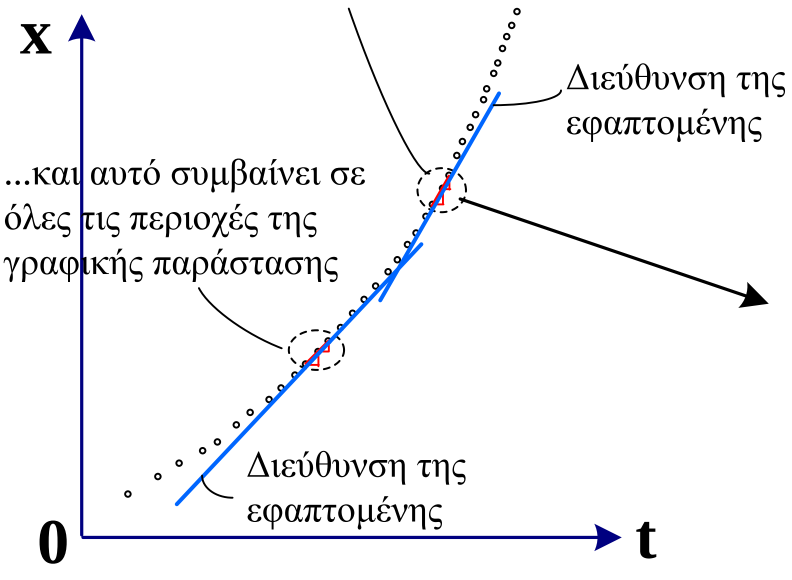
Η κλίση υ_3 είναι πολύ κοντά στη γεωμετρική εφαπτομένη της καμπύλης X(t)

Η ταχύτητα υ_3 σε χρόνο μεταξύ t και $t+\Delta t_3$ έχει κλίση ίδια με τη προηγούμενη

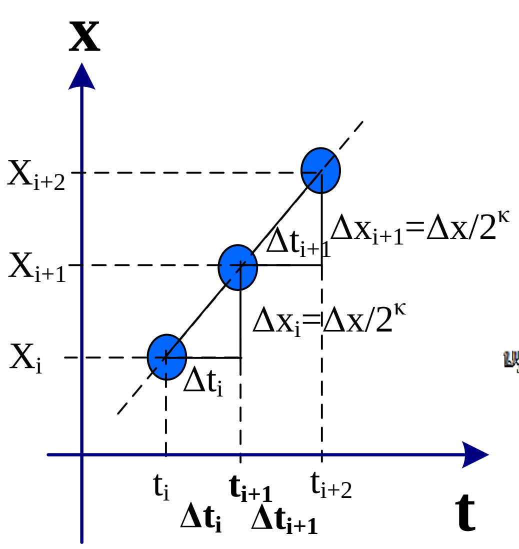
$$\upsilon_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} \cong \upsilon_2$$

Επομένως για κάποιο Δt μικρότερο από κάποιο όριο Δt_3 η κλίση πρακτικά δεν αλλάζει είναι πολύ κοντά στη γεωμετρική εφαπτομένη

Πολλαπλασιάζοντας τους πασσάλους κ φορές, τότε μπορεί να δούμε πως ανά 3 ή περισσότερα διαδοχικά σημεία x_i της γραφικής παράστασης φαίνονται να βρίσκονται σε ευθεία γραμμή με διεύθυνση πολύ κοντά σε αυτή της εφαπτομένης....



Σε αυτή τη περίπτωση οι διαδοχικοί χρόνοι Δt_i και Δt_{i+1} όπου διανύονται τα αντίστοιχα διαστήματα $\Delta x/2^\kappa$ γίνονται περίπου ίσοι:



$$\Delta t_i \cong \Delta t_{i+1}$$

τότε και τα αντίστοιχα πηλίκα που δίνουν τις ταχύτητες γίνονται ίσα :

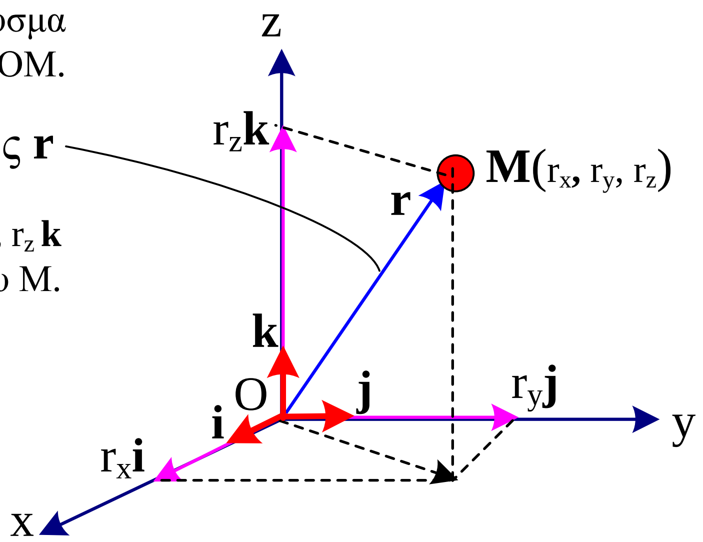
$$\upsilon_i = \frac{\Delta x/\kappa}{\Delta t_i} \cong \frac{\Delta x/\kappa}{\Delta t_{i+1}} = \upsilon_{i+1}$$

Σε κάθε σημείο Μ του χώρου αντιστοιχούμε το διάνυσμα θέσης **r** που ορίζεται από το διάνυσμα με μήκος ΟΜ.

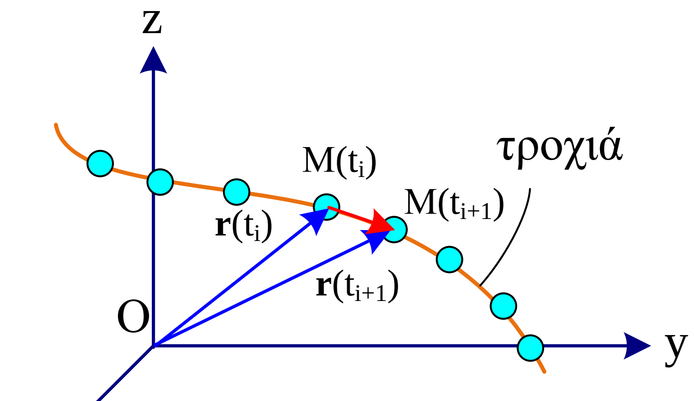
Το λεγόμενο διάνυσμα θέσης **r**

με προβολές στους 3 άξονες τα διανύσματα: $r_x\,\mathbf{i}$, $r_y\,\mathbf{j}$, $r_z\,\mathbf{k}$ τα οποία έχουν μέτρα τις συντεταγμένες του σημείου Μ.

Ισχύει : $\mathbf{r} = r_x\,\mathbf{i} + r_y\,\mathbf{j} + r_z\,\mathbf{k}$

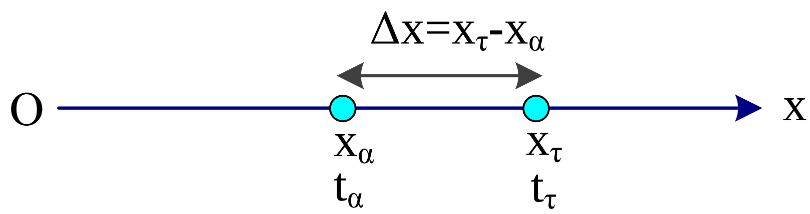


Έστω ένα σημείο Μ κινούμενο στο χώρο . το οποίο ευρίσκεται σε διάφορες χρονικές στιγμές βρίσκεται σε διάφορες θέσεις $M(t_i)$ οι οποίες ορίζουν την τροχιά που ακολουθεί.



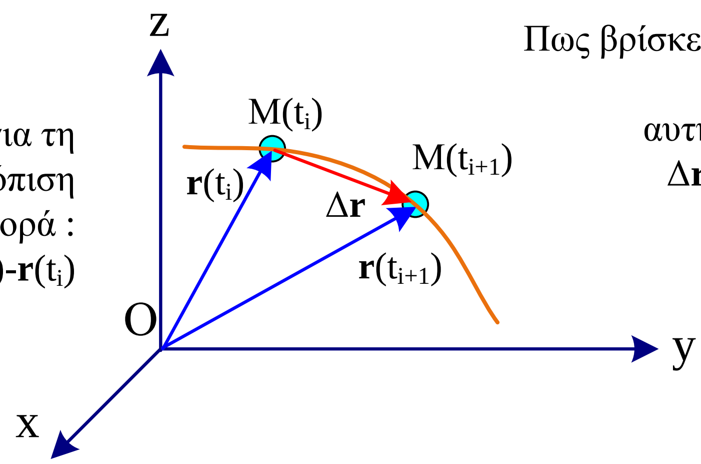
Για τη μελέτη της κίνησης του Μ με τη μπορούμε να μελετήσουμε πως μετατοπίζεται στο χώρο το διάνυσμα **r**(t) σε διάφορες χρονικές στιγμές.

Για κίνηση στη 1Δ, π.χ. στον άξονα x, η μετατόπιση Δx ορίστηκε με τη διαφορά τής τελικής θέσης x_τ που βρέθηκε το σώμα στο χρόνο t_τ μείον την αρχική θέση x_α από όπου ξεκίνησε τη χεονική στιγμή t_α.



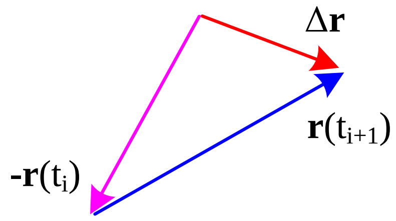
Σε αυτή τη περίπτωση θεωρήσαμε για ταχύτητα το πηλίκο: $\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_\tau - x_\alpha}{t_\tau - t_\alpha}$

Κατά αναλογία, για τη κίνηση στις 3Δ μετατόπιση **Δr** θεωρούμε τη διαφορά : $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)$

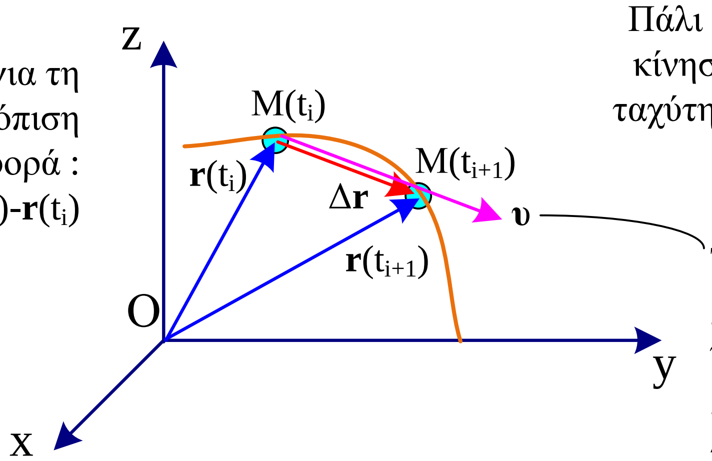


Πως βρίσκεται η διαφορά : $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)$, αυτή γράφεται και: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_{i+1}) + [-\mathbf{r}(t_i)]$

Η σχέση αυτή σημαίνει πως στο $\mathbf{r}(t_{i+1})$ προσθέτω το $-\mathbf{r}(t_i)$ για να προκύψει το **Δr**



Κατά αναλογία, για τη κίνηση στις 3Δ μετατόπιση **Δr** θεωρούμε τη διαφορά : $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)$

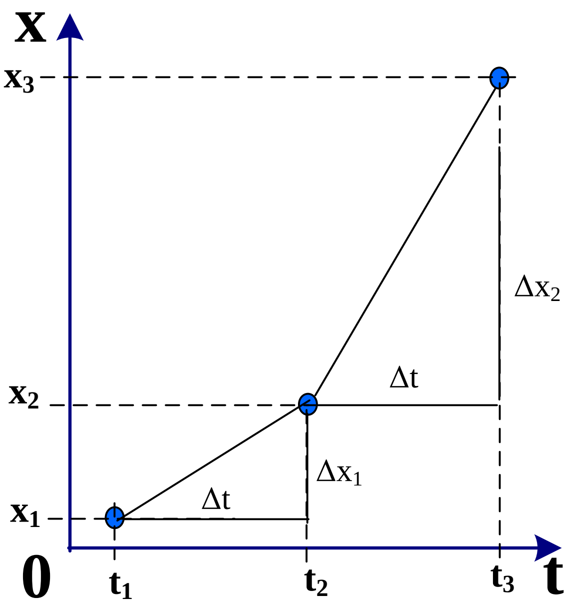


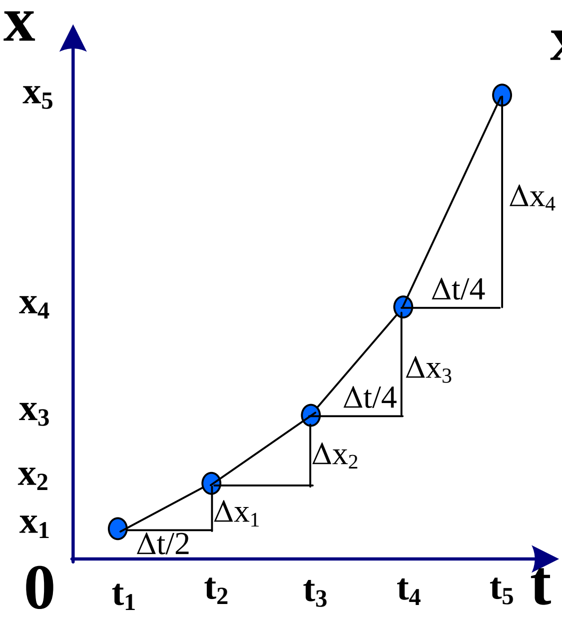
Πάλι κατά αναλογία με τη κίνηση στη 1Δ, θεωρούμε ταχύτητα το **διανυσματικό** πυλίκο: $\boldsymbol{\upsilon} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$

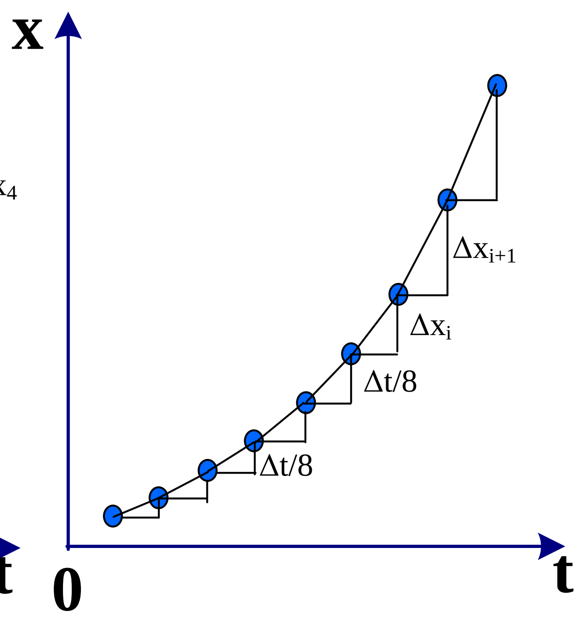
Το αποτέλεσμα της διαίρεσης του Δr με το μονόμετρο μέγεθος Δt, είναι το διάνυσμα **υ** της ταχύτητας ίδιας διεύθυνσης και φοράς με αυτές του **Δr** και μέτρου το μέτρο του Δr διαιρεμένου με το Δt.

Όμως αν μέσα στο χρονικό διάστημα Δt η ταχύτητα **υ** αλλάζει αρκετά τότε η ταχύτητα αυτή θεωρείται μέση ταχύτητα μέσα στο χρόνο Δt.

Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις φαίνεται πως, καθώς υποδιπλασιάζεται ο χρόνος Δt_i μειώνονται οι μετατοπίσεις Δx_i που διανύονται μέσα στους αντίστοιχους χρόνους Δt_i.





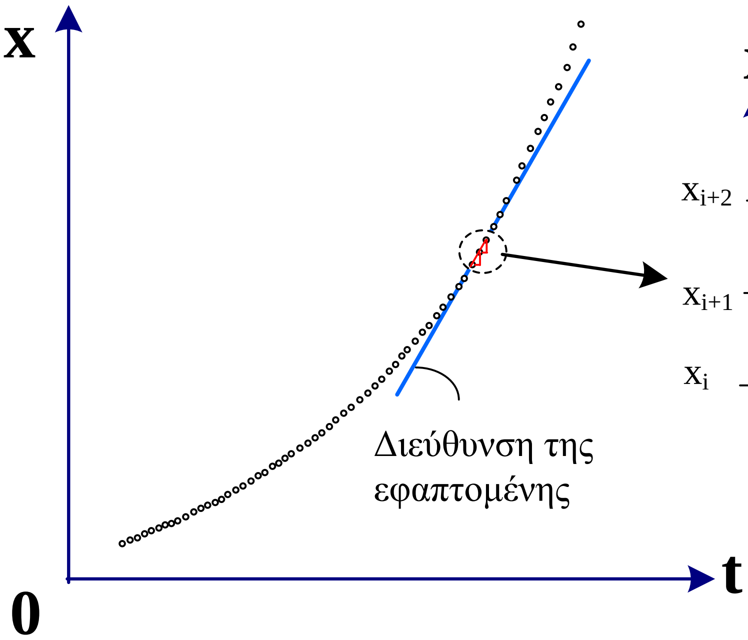


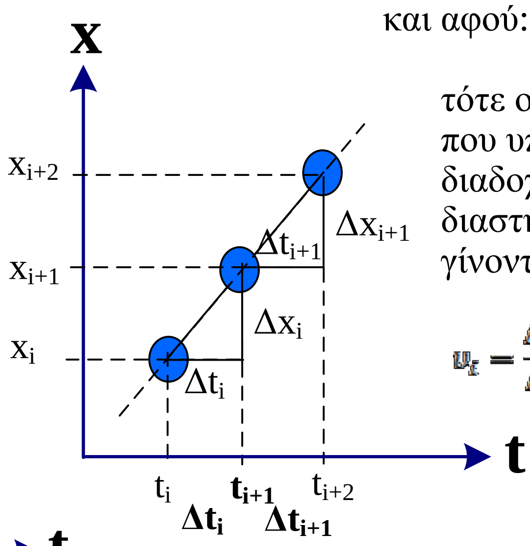
Όταν υποδιπλασιάζεται ο χρόνος Δt_ι για κ φορές, τότε $\Delta t_{I}=\Delta t/2^{\kappa}$, και είναι δυνατόν να δούμε πως ανά 3 τουλάχιστον διαδοχικά σημεία της γραφικής παράστασης x_i, x_{i+1} x_{i+2} να φαίνονται ότι βρίσκονται πρακτικά σε ευθεία γραμμή με διεύθυνση πολύ κοντά σε αυτή της εφαπτομένης.

Οι μετατοπίσεις Δx_i και Δx_{i+1} γίνονται πρακτικά ίσες:

$\Delta x_i \cong \Delta x_{i+1}$

και αφού: $\Delta t_i = \Delta t_{i+1} = \Delta t/2^{\kappa}$



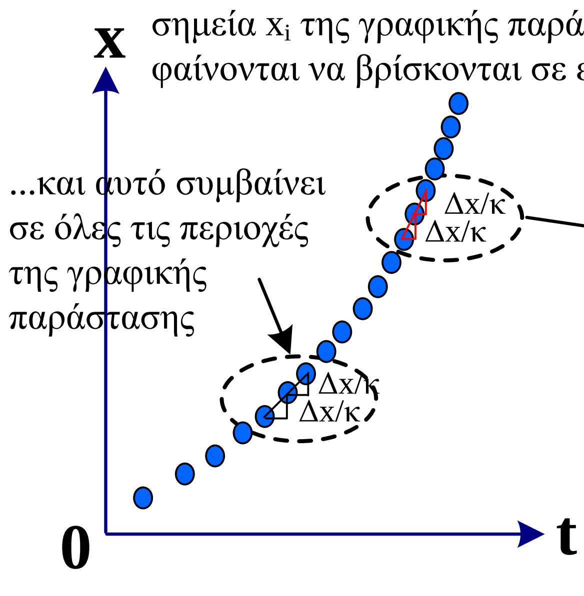


τότε οι ταχύτητες υ_i και υ_{i+1} που υπολογίζεται μέσα σε 2 διαδοχικά χρονικά διαστήματα Δt_i και Δt_{i+1} γίνονται πρακτικά ίσες :

$$\upsilon_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \cong \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta t_{i+1}} = \upsilon_{i+1}$$

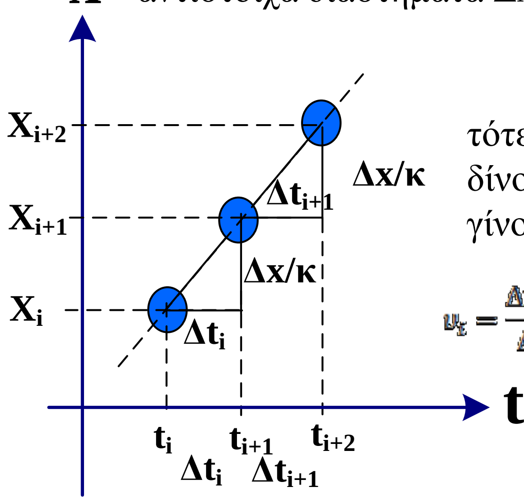
Πολλαπλασιάζοντας τους πασσάλους κ φοορές, 3 ή περισσότερα διαδοχικά σημεία x_i της γραφικής παράστασης φαίνονται να βρίσκονται σε ευθεία....

...και αυτό συμβαίνει σε όλες τις περιοχές της γραφικής παράστασης



Σε αυτή τη περίπτωση οι διαδοχικοί χρόνοι Δt_i και Δt_{i+1} όπου διανύονται τα αντίστοιχα διαστήματα Δx/κ γίνονται ίσοι:

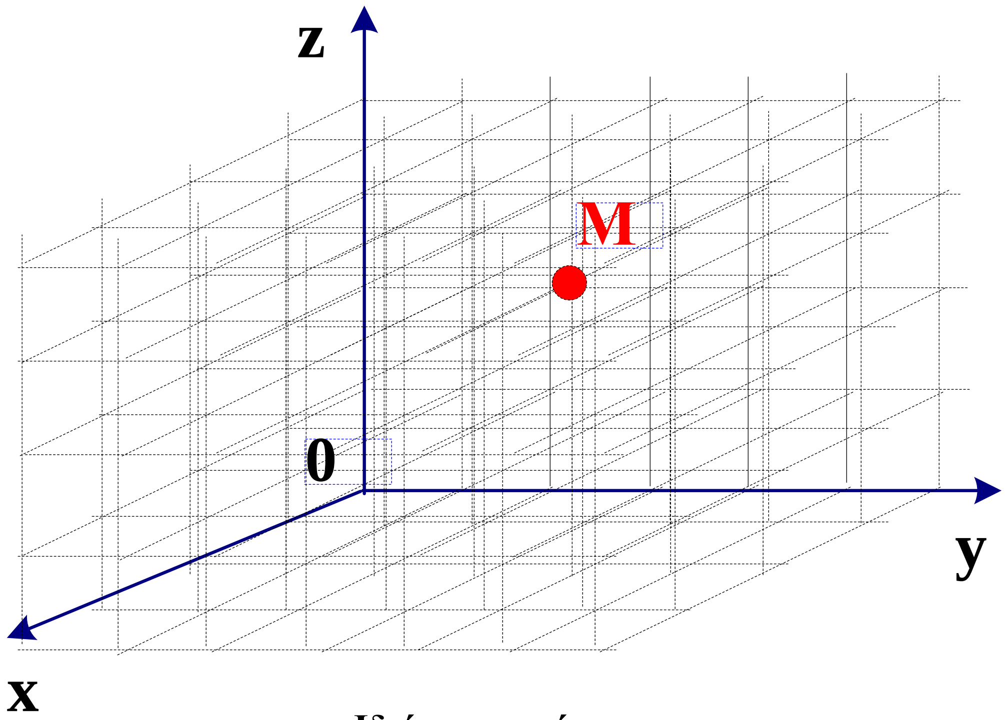
$\Delta t_i = \Delta t_{i+1}$



τότε και τα πηλίκα που δίνουν τις ταχύτητες γίνονται ίσα :

$$\upsilon_i = \frac{\Delta x/\kappa}{\Delta t_i} \cong \frac{\Delta x/\kappa}{\Delta t_{i+1}} = \upsilon_{i+1}$$

Χώρος και Χρόνος.



Για το προσδιορισμό της θέσης ενός γεγονότος μέσα στο χώρο χρειάζεται Ένα σημείο, Ο, για αφετηρία-αρχή και ένα πλέγμα γραμμών μέσα στο οποίο σημειώνεται η θέση ενός γεγονότος σε κάποιο σημείο Μ του χώρου κάποια χρονική στιγμή.

Πρακτικά δεχόμαστε:

Τρισδιάστατος χώρος (x,y,z)

Γεωμετρία του χώρου Ευκλείδιος σε πολύ καλή προσέγγιση (μικρές αποστάσεις).

Επειδή ο χώρος είναι 3Δ χρειάζονται 3 αριθμοί που υποδηλώνουν τη θέση του σημείου Μ σε κάθε μία διάσταση μέσα στο πλέγμα γαρμμών του χώρου και ένας τέταρτος αριθμός που δηλώνει την αντίστοιχη χρονική στιγμή.

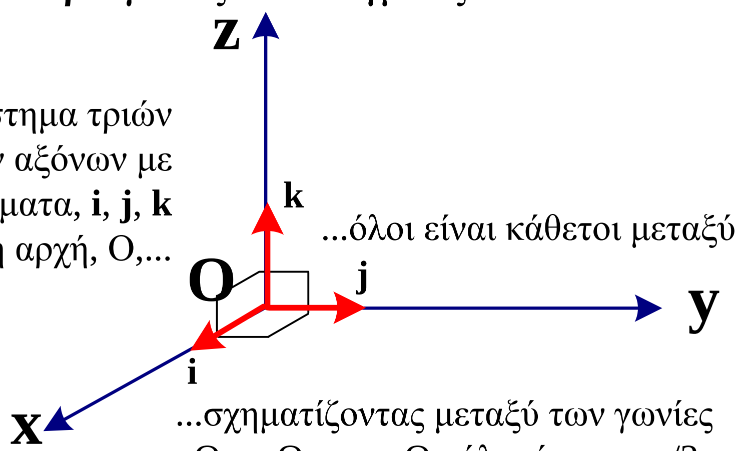
Ιδιότητες χρόνου.

Ο χρόνος είναι απόλυτος σε πρώτη προσέγγιση.

Μπορούμε πρακτικά να συγχρονίζουμε τα ρολόγια σε διαφορετικές τοποθεσίες στη Γη.

Συνήθως χρησιμοποιούμε **ορθογώνιες συντεταγμένες**

Είναι ένα σύστημα τριών βαθμολογημένων αξόνων με μοναδιαία διανύσματα, **i**, **j**, **k** με κοινή αρχή, Ο,...

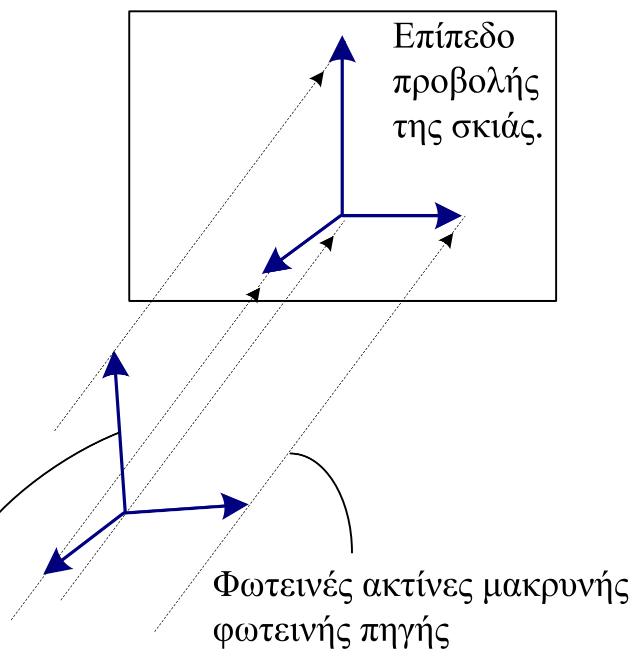


...όλοι είναι κάθετοι μεταξύ των...

...σχηματίζοντας μεταξύ των γωνίες xOy, yOz και zOx όλες ίσες με π/2.

Για τη σχεδίαση του ορθογώνιου συστήματος αξόνων που είναι 3Δ στο επίπεδο που είναι 2Δ γίνεται με τη προοπτική ότι του σχήμα των 3 αξόνων στις 3Δ είναι προβολή αυτού στο επίπεδο των 2Δ.

Για να κατανοήσουμε το πως προκείπτει η προβολή αυτή, θα πρέπει πάρουμε ένα πραγματικό σύστημα 3 ράβδων που αποτελούν πραγματικό ορθογώνιο σύστημα 3 αξόνων όλοι κάθετοι μεταξύ των στο πραγματικό χώρο. Εν συνεχεία να το φωτίσουμε με μια φωτεινή πηγή από μακρινή σχετικά απόσταση και να δούμε τη σκιά που θα σχηματίζεται σε ένα επίπεδο π.χ. στο τοίχο. Τότε θα σχηματιστεί σα σκιά στο επίπεδο ένα σχήμα 3 αξόνων που είναι ακριβώς η προβολή του πραγματικού συστήματος ορθογώνιου συστήματος στο επίπεδο των 2Δ.



Η ονομασία των 3 αξόνων γίνεται με όποια σύμβολα επιθυμούμε όπως: (x,y,z) ή (a,b,c) …..

Η σειρά των αξόνων καθορίζει τη σειρά με την οποία αναγράφονται οι 3 συντεταγμένες k, l, m των σημείων M που απεικονίζονται στο διάγραμμα και οι οποίες αντιστοιχούν στους άξονες x, y, z.

ΠΡΟΣΟΧΗ *Έχει μεγάλη σημασία η σειρά που σχεδιάζονται οι 3 άξονες*

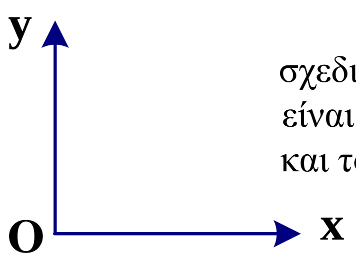
Η σειρά σχεδίασης των αξόνων καθορίζει το προσανατολισμό που έχουν οι 3 άξονες στον 3Δ χώρο και την όψη θέασης που έχουμε στο σχεδιαζόμενο σύστημα όπως εξηγείται παρακάτω.

Από τους 3 άξονες x, y, z σχεδιάζω πρώτα 2 διαδοχικούς άξονες x, y ή y, z ή z, x με όποια σειρά επιθυμώ.

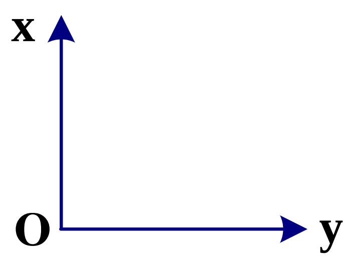
Για παράδειγμα:

Επιλέγω να σχεδιάσω πρώτα τους 2 διαδοχικούς άξονες x, y.

Στον ένα τρόπο σχεδιάζω οριζόντια τον x και κατακόρυφα τον y.

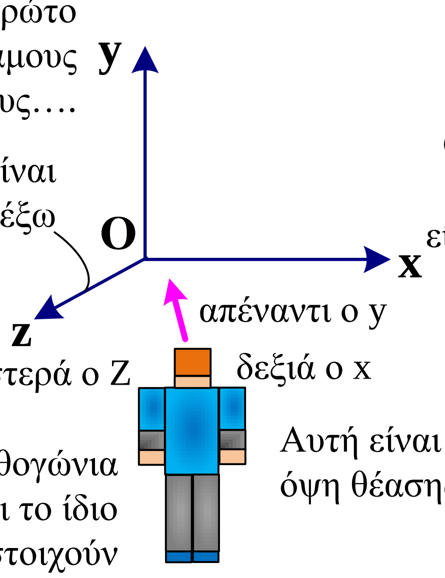


ή ισοδύναμα σχεδιάζω τον x να είναι κατακόρυφα και το y οριζόντια



Επιλέγοντας τον πρώτο από τους 2 ισοδύναμους τρόπους….

...ο τρίτος άξονας z είναι προς τα έξω

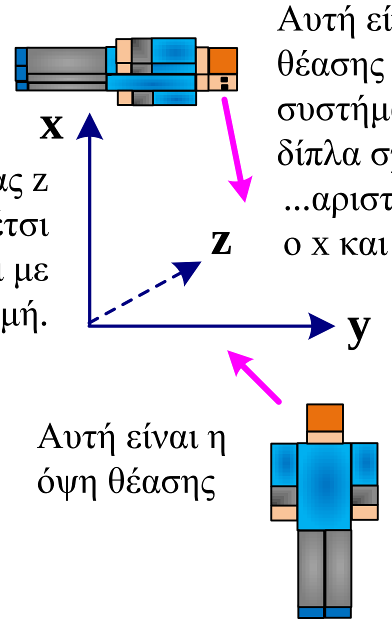


Αυτή είναι η όψη θέασης

Και τα 2 ορθογώνια συστήματα είναι το ίδιο σύστημα. Απλά αντιστοιχούν σε άλλη όψη θέασης.

Αν επιλεγεί ο άλλος τρόπος….

...τότε ο τρίτος άξονας z είναι προς τα μέσα και έτσι σημειώνεται με διακκεκομένη γραμμή.



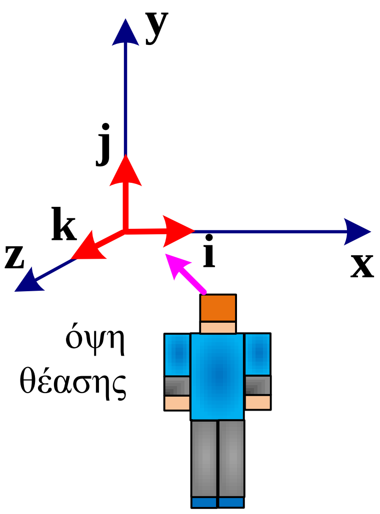
Αυτή είναι όψη θέασης του ίδιου συστήματος στο δίπλα σχήμα...

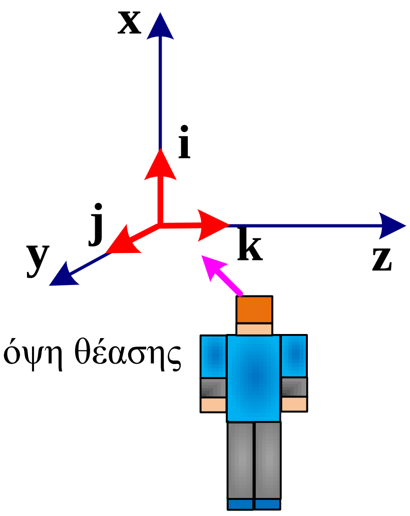
...αριστερά ο z, δεξιά ο x και ο y απέναντι

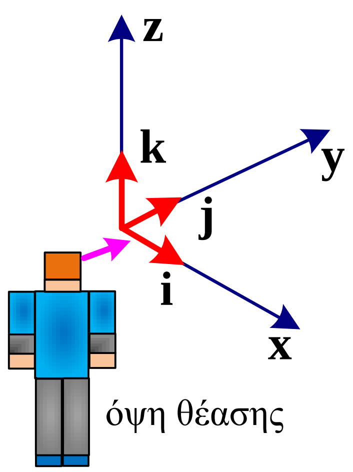
Αυτή είναι η όψη θέασης

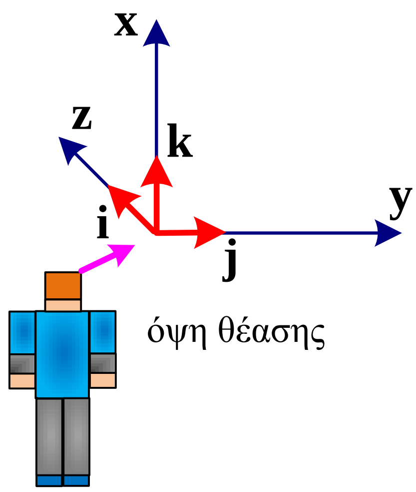
Αν όμως ο άξονας z σχεδιαζόταν τυχαία, δεν θα σχεδιάζαμε πάντα το ίδιο σύστημα αξόνων με συνεπή τρόπο και τότε δεν θα συμφωνούσαμε όλοι στο τι σχεδιάζουμε.

Παραθέτουμε παρακάτω μερικά παράδειγματα απεικόνησης ορθογωνίων συστήματος 3 αξόνων x, y, z σημειώνοντας και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα **i, j, k** .









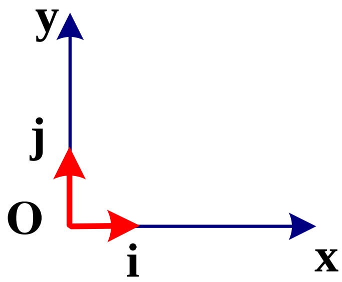
Όλα τα παραπάνω παράδειγματα σχεδίασης τρισορθογώνιου συστήματος αξόνων αντιστοιχούν **στο ίδιο** ορθογώνιο σύστημα αξόνων, αλλά σε διαφορετικές όψεις θέασης.

Σε όλα τα ορθογώνια συστήματα αξόνων τα μοναδιαία διανύσματα **i, j, k** των αξόνων x, y, z σχεδιάζονται ικανοποιώντας τα εξής εξωτερικά γινόμενα: $i \times j = k$ $\quad j \times k = i$ $\quad k \times i = j$

Σειρά σχεδίασης των αξόνων

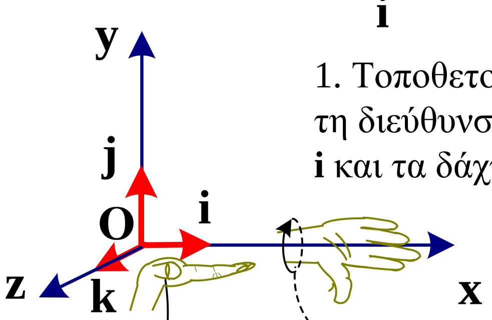
Ακολουθούμε τη παρακάτω διαδικασία.

Επιλέγω να σχεδιάσω τους 2 πρώτους άξονες, π.χ. πρώτον το x και δεύτερον τον y, όπως επιθυμώ. Κατόπιν τοποθετώ τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα **i** και **j**.



Εν συνεχεία εφαρμόζω το εξωτερικό γινόμενο του **i** επί **j** : $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού ακολουθώντας τα 3 διπλανά βήματα.

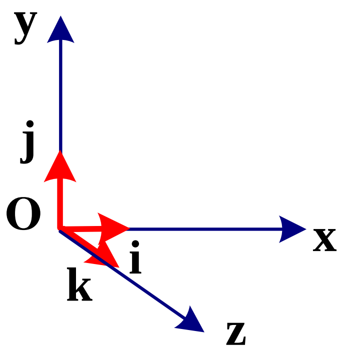


1. Τοποθετούμε τη παλάμη να δείχνει τη διεύθυνση του πρώτου διανύσματος **i** και τα δάχτυλα τη φορά του.

2 Περιστρέφουμε τη παλάμη ώστε ο αντίχειρας να γίνει κάθετος και στον **i** και στον **j**.

3. Τότε ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του **k** προς τα έξω, προσδιορίζοντας τη διεύθυνση και φορά του άξονα z τον οποίο και σχεδιάζω.

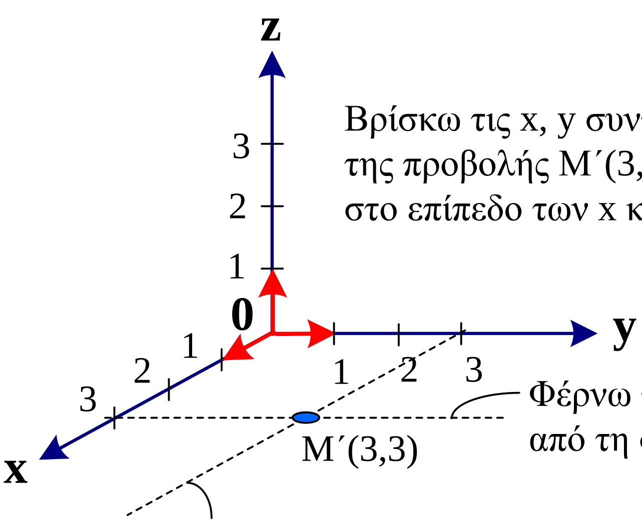
Εναλλακτικά αν επιθυμούμε σχεδιάζω πάλι προς τα έξω τον άξονα z αλλά σε άλλη όψη θέασης.



Πως σχεδιάζεται η θέση ενός σημείου M σε τρισορθογώνιο σύστημα

Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε να απεικονίσουμε το σημείο M (2,3,3) σε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων x,y,z.

Σχεδιάζουμε το τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων x, y, z μαζί τα μοναδιαία διανύσματα **i, j**, **k** των αξόνων σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω.



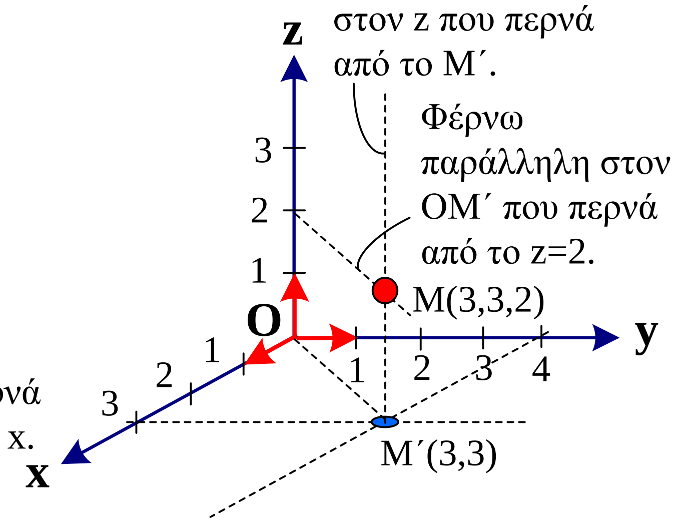
Βρίσκω τις x, y συντεταγμένες της προβολής M΄(3,3) του M στο επίπεδο των x και y αξόνων

Φέρνω παράλληλη στον z που περνά από τη συντεταγμένη 3 του άξονα x.

Φέρνω παράλληλη στον x που περνά από τη συντεταγμένη 3 του άξονα y.

Φέρνω παράλληλη στον z που περνά από το M΄.

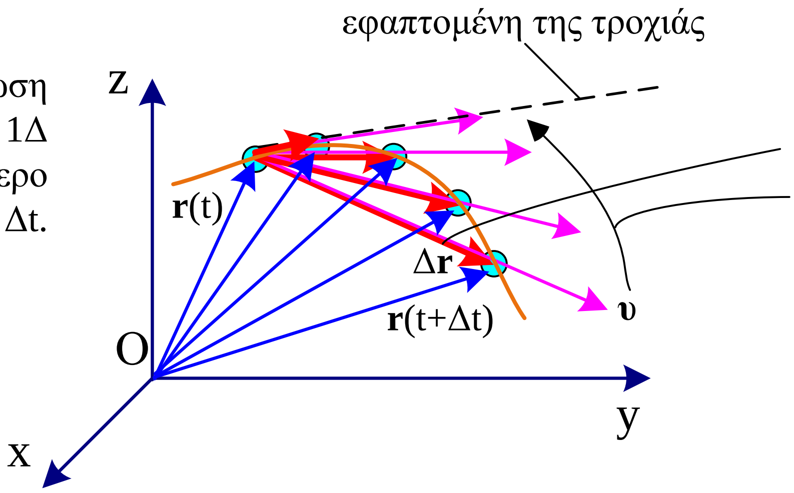
Φέρνω παράλληλη στον OM΄ που περνά από το z=2.



Έτσι βρίσκω το σημείο M(3,3,2)

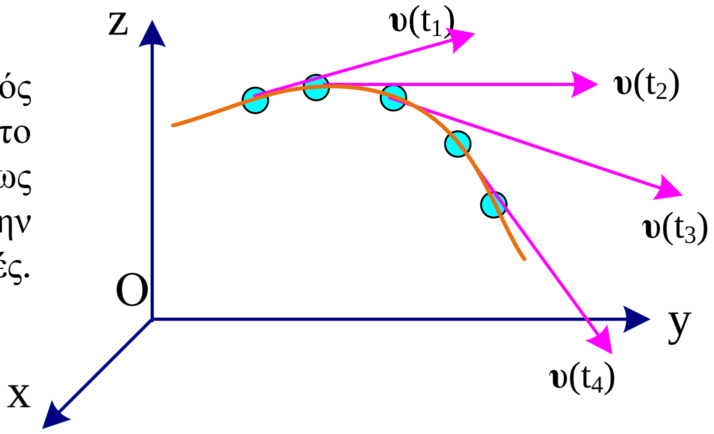
Θα μπορούσα να ακολουθήσω παρόμοια διαδικασία βρίσκοντας πρώτα τη προβολή του M σε ένα από τα άλλα 2 επίπεδα xOy ή zOx το οποίο μπορείτε να κάνετε για άσκηση.

Όπως στη περίπτωση της κίνησης στη 1Δ θεωρούμε μικρότερο χρονικό βήμα Δt.



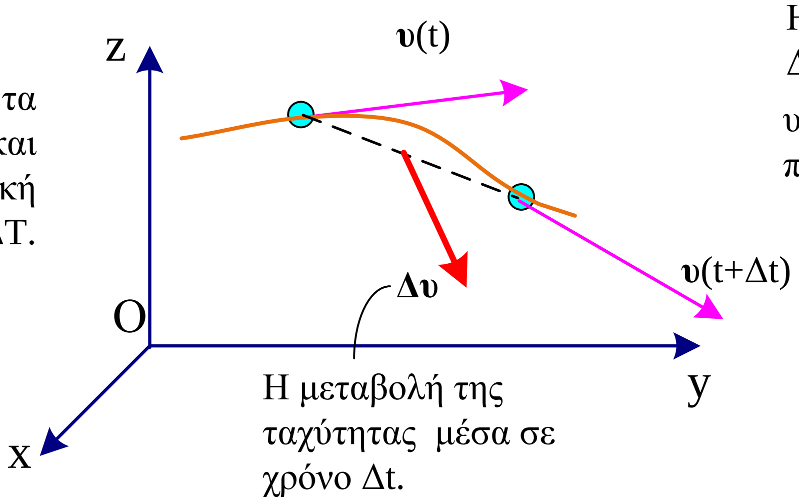
Καθώς μικραίνει το βήμα Δt, συμβαίνουν μικρότερες μετατοπίσεις **Δr** ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας **υ** τείνει να πάρει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς στη θέση που αντιστοιχεί κατά τη χρονική στιγμή t.

Σημειώνουμε τη τροχιά ενός κινούμενου σώματος καθώς και το διάνυσμα της ταχύτητάς **υ**(t) που όπως είπαμε είναι εφαπτομενική στην τροχιά σε διάφορες χρονικές στεγμές.

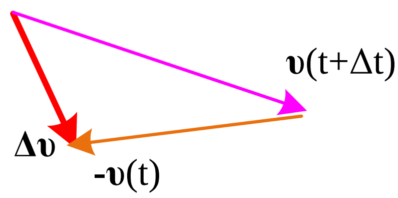


Παρατηρούμε πως η ταχύτητα σαν διάνυσμα αλλάζει συνεχώς δηλαδή παρουσιάζει μεταβολές **Δυ** από μια χρονική στιγμή στην άλλη.

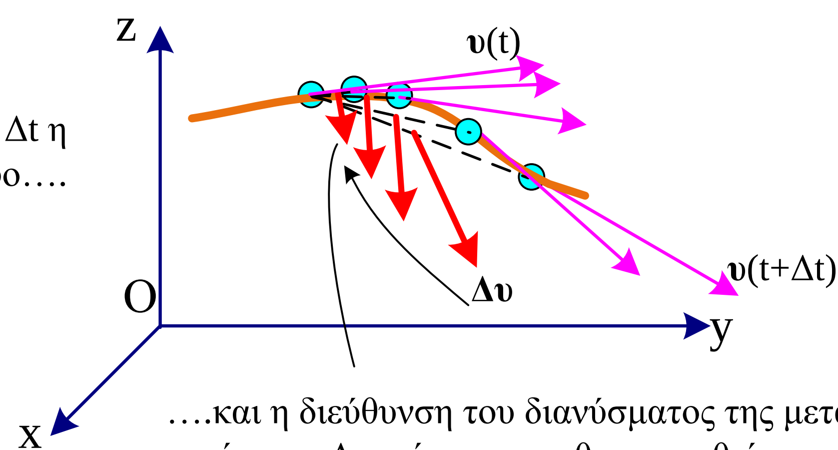
Σχεδιάζεται η ταχύτητα σαν κατά το χρόνο t και στην επόμενη χρονική στιγμή t+ΔT.



Η μεταβολή της ταχύτητας :
Δυ=υ(t+Δt)-υ(t)
υπολογίζεται διανυσματικά προσθέτωντας στο **υ(t+Δt) το -υ(t)**



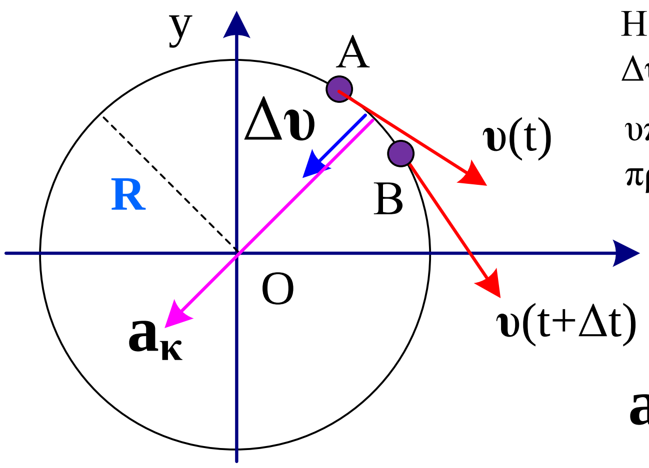
Ελαττώνοντας το χρονικό βήμα Δt η ταχύτητα αλλάζει βαθμιαία λιγότερο….



….και η διεύθυνση του διανύσματος της μεταβολή της ταχύτητας **Δυ** τείνει να σταθεροποιηθεί και το πηλίκο **Δυ**/Δt τείνει σε μια οριακή τιμή που δεν αλλάζει φθάνοντας ένα όριο.

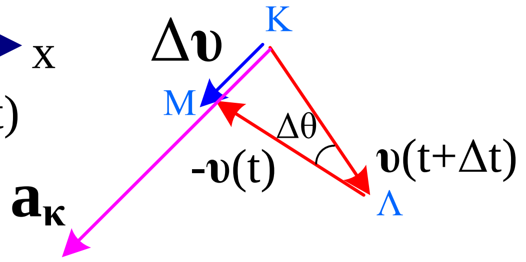
Η διεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης στη κυκλική τροχιά περνάει από το κέντρο της τροχιάς και είναι η λεγόμενη κεντρομόλος επιτάχυνση $a_κ$.

Ένα υλικό σημείο μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R με ταχύτητα σταθερού μέτρου υ. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα το σημείο Μ διανύει ένα μικρό τόξο ΑΒ



Η μεταβολή της ταχύτητας :
Δυ=υ(t+Δt)-υ(t)

υπολογίζεται διανυσματικά προσθέτωντας στο **υ(t+Δt) το -υ(t)**



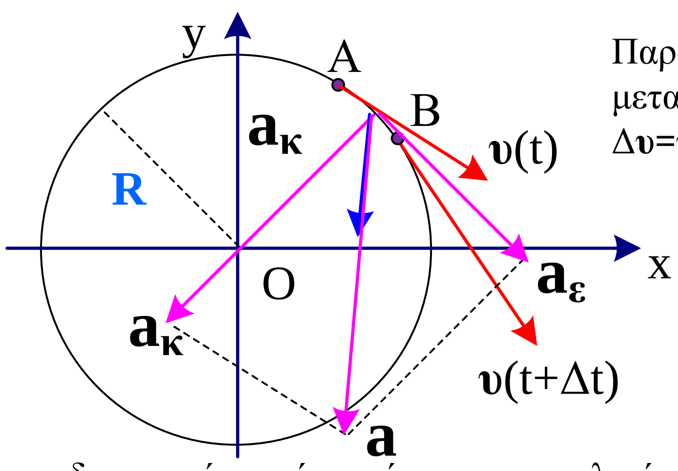
Η γωνία Δθ μεταξύ των **υ(t+Δt)** και **υ(t)** είναι πολύ μικρή, γιατί το Δt το θεωρήσαμε μικρό ώστε η διεύθυνση της ταχύτητας να μην προλαβαίνει να αλλάξει πολύ.

Άρα τα Δ**υ** και $\mathbf{a_κ}$ είναι πρακτικά κάθετα στα υ(t) και υ(t+Δt) τα οποία διαφέρουν πολύ λίγο.

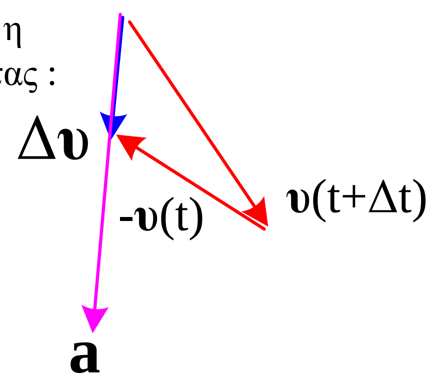
Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές (ΛΚ=ΛΜ=υ), αφού τα μέτρα των υ(t) και υ(t+Δt) είναι ίσα.

Αφού η γωνία Δθ είναι μικρή τότε μπορούμε να το θεωρήσουμε ότι η πλευρά ΚΜ=Δυ (μέτρο) πρακτικά ταυτίζεται με το τόξο του κύκλου με ακτίνα το μέτρο υ της κυκλικής ταχύτητας.

Γνωρίζουμε ότι: γωνία=τόξο/ακτίνα, άρα: Δυ = Δθ υ και επομένως η επιτάχυνση $a_κ$=Δυ/Δt γίνεται $a_κ$= Δθ υ/ΔT. Η γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου σώματος είναι ω=Δθ/ΔT, τότε $a_κ$ = ω υ και αφού υ=ωR τότε: $a_κ=υ^2/R$.



Παρόμοια ευρίσκεται η μεταβολή της ταχύτητας :
Δυ=υ(t+Δt)-υ(t)



Η επιτάχυνση δεν περνάει από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Αναλύεται στην ακτινική συνιστώσα που αντιστοιχεί στη κεντρομόλο επιτάχυνση $\mathbf{a_κ}$ και στην εφαπτομενική συνιστώσα την επιτρόχια επιτάχυνση $\mathbf{a_ε}$.

Φυσική σημασία της παραγώγου

Αριθμητική προσέγγιση

Υπολογίζω τη ταχύτητες υ_I Και τα διαστήματα κατά τη διάρκεια μιάς ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με επιτάχυνση α=0.001 m/s^2

Για Δt_i=100 ms

t_i (s)	$\upsilon_i=\alpha t_i$ (m/s)	$s_i=1/2at^2$ (m)	s_{i-} (m)	$(s_i-s_{i-1})/\Delta t$ (m/s)
0	0	0	5E-6	5E-5
0.1	1E-4	5E-6	2E-5	1.5E-4
0.2	2E-4	2E-5	4.5E-5	2.5E-4
0.3	3E-4	4.5E-5	8E-5	3.5E-4
0.4	4E-4	8E-5	1.25E-4	4.5E-4
0.5	5E-4	1.25E-4	1.8E-4	5.5E-4
0.6	6E-4	1.8E-4	2.45E-4	6.5E-4
0.7	7E-4	2.45E-4	3.2E-4	7.5E-4
0.8	8E-4	3.2E-4	4.05E-4	8.5E-4
0.9	9E-4	4.05E-4	5E-4	9.5E-4
1.0	1E-3	5E-4	6.05E-4	0.00105

Παρατηρώ ότι το πηλίκο $\Delta S_i/\Delta t$ δεν είναι σταθερό και επομένως δεν μπορεί να εκφράζει τη στιγμιαία ταχύτητα υ_i.

Για Δt_i=10 ms

0	0	0	5E-8	5E-6
0.01	1E-5	5E-8	2E-7	1.5E-5
0.02	2E-5	2E-7	4.5E-7	2.5E-5
0.03	3E-5	4.5E-7	8E-7	3.5E-5
0.04	4E-5	8E-7	1.25E-6	4.5E-5
0.05	5E-5	1.25E-6	1.8E-6	5.5E-5
0.06	6E-5	1.8E-6	2.45E-6	6.5E-5
0.07	7E-5	2.45E-6	3.2E-6	7.5E-5
0.08	8E-5	3.2E-6	4.05E-6	8.5E-5
0.09	9E-5	4.05E-6	5E-6	9.5E-5
0.1	1E-4	5E-6	6.05E-6	1.05E-4

Για Δt_i=0.1 ms

t_i	$\upsilon_i=\alpha t_i$	$s_i=1/2at^2$	s_{i-1}	$(s_i-s_{i-1})/\Delta t$
0.0807	8.07E-5	3.25625E-6	3.26432E-6	8.075E-5
0.0808	8.08E-5	3.26432E-6	3.27241E-6	8.085E-5
0.0809	8.09E-5	3.27241E-6	3.2805E-6	8.095E-5
0.081	8.1E-5	3.2805E-6	3.28861E-6	8.105E-5
0.0811	8.11E-5	3.28861E-6	3.29672E-6	8.115E-5
0.0812	8.12E-5	3.29672E-6	3.30484E-6	8.125E-5
0.0813	8.13E-5	3.30484E-6	3.31298E-6	8.135E-5
0.0814	8.14E-5	3.31298E-6	3.32113E-6	8.145E-5
0.0815	8.15E-5	3.32113E-6	3.32928E-6	8.155E-5
0.0816	8.16E-5	3.32928E-6	3.33744E-6	8.165E-5
0.0817	8.17E-5	3.33744E-6	3.34562E-6	8.175E-5
0.0818	8.18E-5	3.34562E-6	3.3538E-6	8.185E-5
0.0819	8.19E-5	3.3538E-6	3.362E-6	8.195E-5
0.082	8.2E-5	3.362E-6	3.37021E-6	8.205E-5
0.0821	8.21E-5	3.37021E-6	3.37842E-6	8.215E-5
0.0822	8.22E-5	3.37842E-6	3.38664E-6	8.225E-5
0.0823	8.23E-5	3.38664E-6	3.39488E-6	8.235E-5

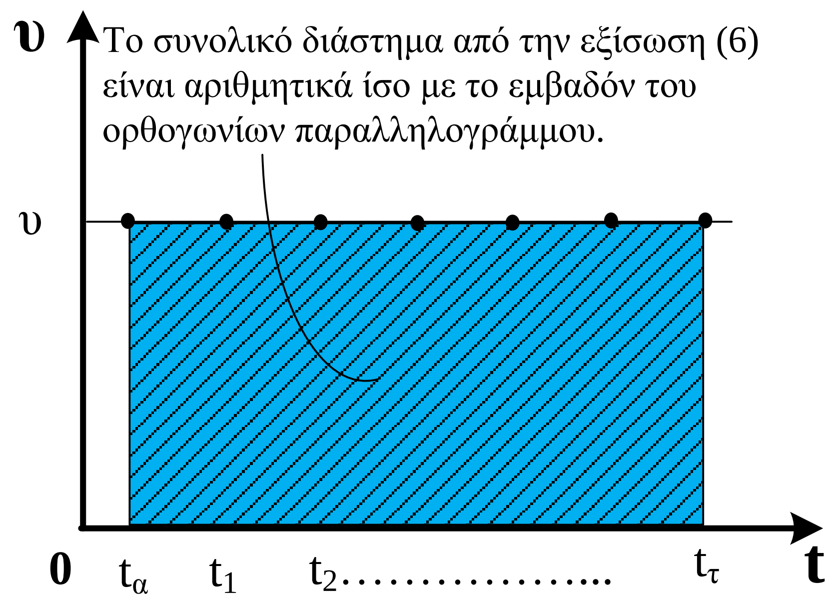
Παρατηρώ ότι το πηλίκο $\Delta S_i/\Delta t$ είναι σταθερό με ακρίβεια στο 2ο σημαντικό ψηφίο (ΣΨ) σε <u>διαδοχικά χρονικά διαστήματα</u> και επομένως μπορεί να εκφράζει τη στιγμιαία ταχύτητα υ_i μέσα στα πλαίσια του ορίου της παραγώγου.

$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S_i}{\Delta t_i} = \frac{ds}{dt}$$

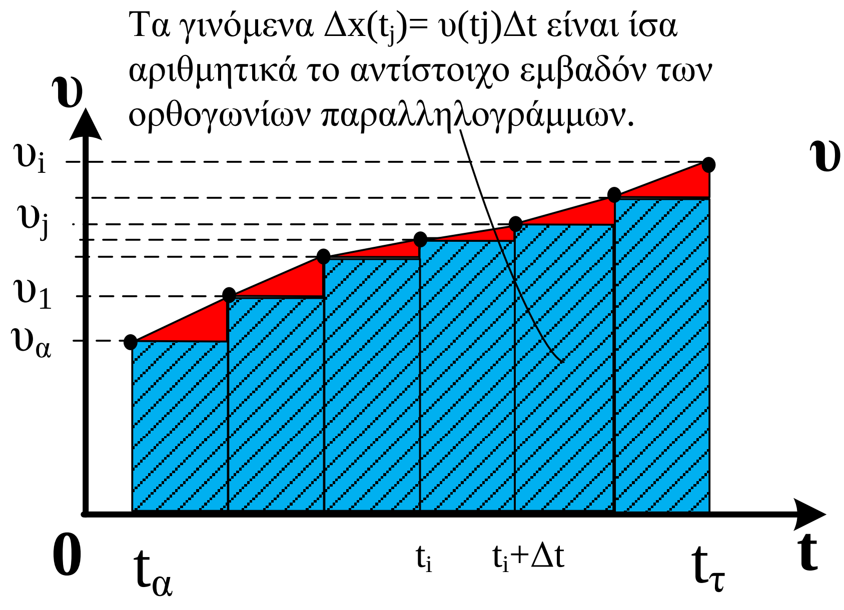
εδώ ισχύει για

$\Delta t_i<\Delta t$=0.1 ms

Με μικρότερο Δt_i τότε η $\upsilon=\Delta S_i/\Delta t$ θα μπορεί να είναι σταθερή στο 3 ΣΨ…..

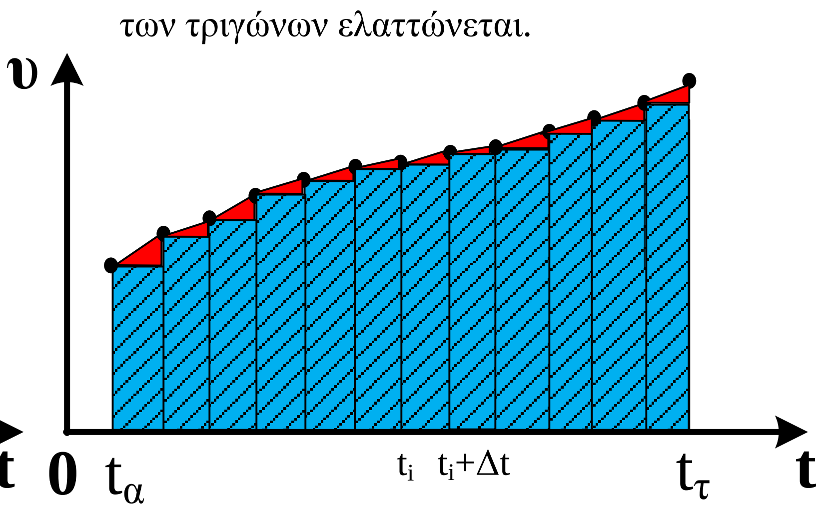


Κατά τη διάρκεια των χρονικών διαστημάτων Δt οι αντίστοιχες ταχύτητες υ_α, υ_1, υ_2,….υ_i παρουσιάζουν μια εμφανή μικρή αλλαγή.



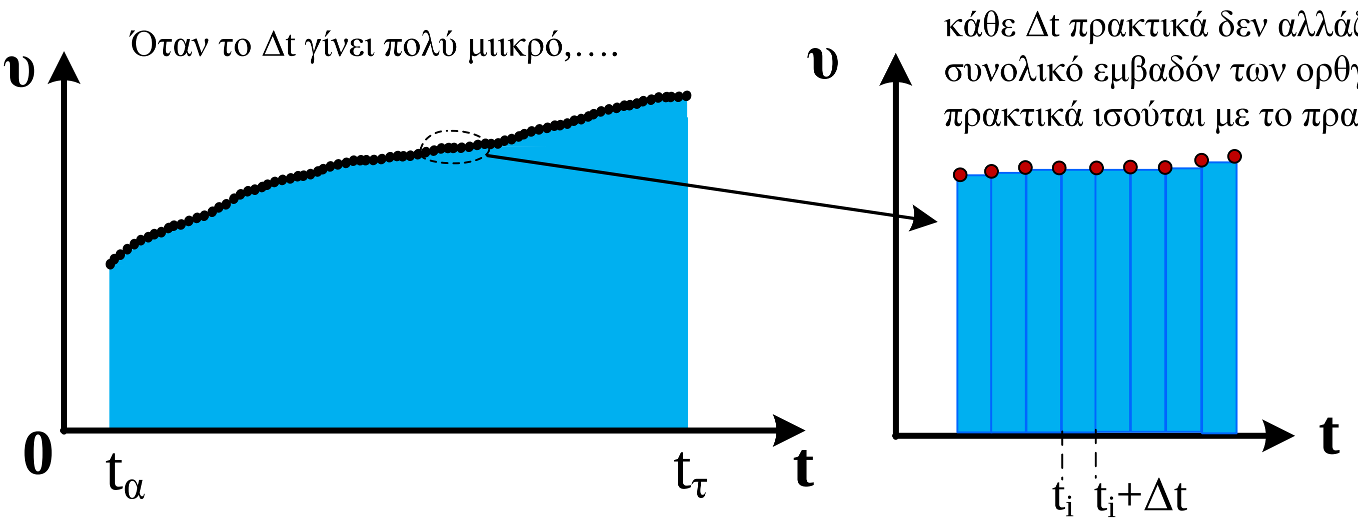
Το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων παραλληλογράμμων ισούται αριθμητικά με το συνολικό διάστημα $X_{ολ}$ μείον το εμβαδόν των τριγώνων.

Μικραίνοντας όμως το βήμα Δt, η ταχύτητα κατά την διάρκια του κάθε Δt αλλάζει σχετικά λιγότερο και το συνολικό εμβαδόν των τριγώνων ελαττώνεται.



Έτσι το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων παραλληλογράμμων όπως υπολογίζεται με την εξίσωση (5) προσεγγίζει αριθμητά καλύτερα το συνολικό διάστημα $X_{ολ}$ που διανύει το κινητό.

...τότε η ταχύτητα με το χρόνο μέσα σε κάθε Δt πρακτικά δεν αλλάζει και το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων πρακτικά ισούται με το πραγματικό $X_{ολ}$.



Υπάρχει ένα Δt όπου για Δt'<Δt το άθροισμα $\Sigma\Delta x_i$ δεν αλλάζει στο ψηφίο του σφάλματος δίνοντας πρακτικά το $x_{ολ}$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{x_\alpha}^{x_\tau}\Delta x_i = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{t_\alpha}^{t_\tau}\upsilon_i\Delta t = x_{ολ}$$

Ορισμός ολοκληρώματος

Τότε το αθροισμα ισοδυναμεί με το ολοκλήρωμα και γράφω:

$$\int_{x_\alpha}^{x_\tau} dx = \int_{t_\alpha}^{t_\tau}\upsilon(t)\,dt = [x]_{x_\alpha}^{x_\tau} = x_\tau - x_\alpha = x_{ολ}$$

Όρια ως προς τη μεταβλητή x

Όρια ως προς τη μεταβλητή t

Δηλ. το διάστημα x προκύπτει από την ολοκλήρωση της υ(t)

$$\mathbf{\Delta r} = \Delta x\,\hat{\mathbf{x}} + \Delta y\,\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{\Delta z}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

$$\frac{\mathbf{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathbf{\Delta z}}{\Delta t}\,\hat{\mathbf{z}}$$

Ότι ισχύει στις εξισώσεις της γραμμικής κίνησης ισχύει και στη περίπτωση των διανυσμάτων στις 3 διαστάσεις π.χ.

$$\mathbf{\Delta t} \rightarrow \mathbf{0}$$

$$\frac{\mathbf{dr}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathbf{dz}}{dt}\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{v} = \upsilon_x\,\hat{\mathbf{x}} + \upsilon_y\,\hat{\mathbf{y}} + \upsilon_z\,\hat{\mathbf{z}}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει πως

οι λόγοι $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ $\frac{\Delta z}{\Delta t}$

κάτω από ένα όριο του Δt

θα παραμένουν σταθεροί πέραν του ορίου της ακρίβειας των μετρήσεων του Δx και Δt

δηλ

Εχει φτάσει το όριο της της παραγώγου

ο λόγος

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \upsilon_x$$

στιγμιαία ταχύτητα

Εκφράζει τη παράγωγο

Το ίδιο ισχύει και για τους άλλους λόγους

Αν γενικά $\mathbf{r} = \mathbf{F(t)}\,\hat{\mathbf{x}} + g(t)\,\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{H}(t)\,\hat{\mathbf{z}}$

Τότε παραγωγίζοντας παίρνω την ταχύτητα

$$\mathbf{V(t)} = \frac{dr}{dt} = \frac{\mathbf{dF(t)}}{dt}\,\hat{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{d}g(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathbf{dH}(t)}{dt}\,\hat{\mathbf{z}}$$

Π.χ. Αν $\mathbf{r} = \mathbf{(kt+a)}\,\hat{\mathbf{x}} + (mt^2+b)\,\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{c}\,\hat{\mathbf{z}}$

Να βρεθούν τα διανύσματα της ταχύτητας και επιτάχυνσης. Τι είδους κίνηση έχουμε?

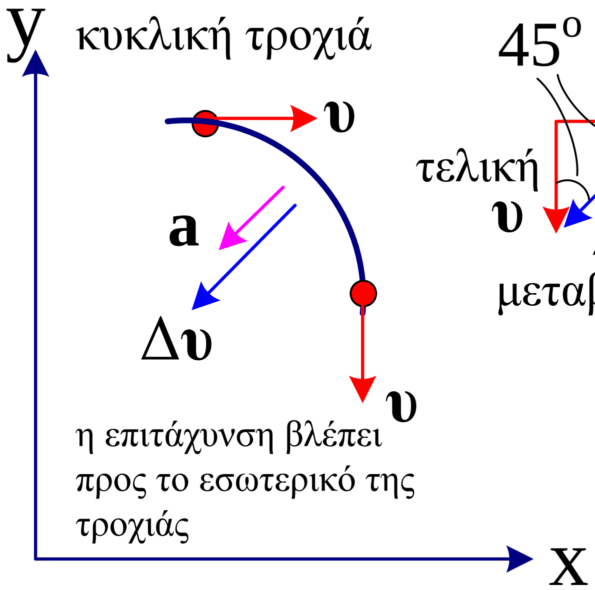
Ομαλή κυκλική κίνηση

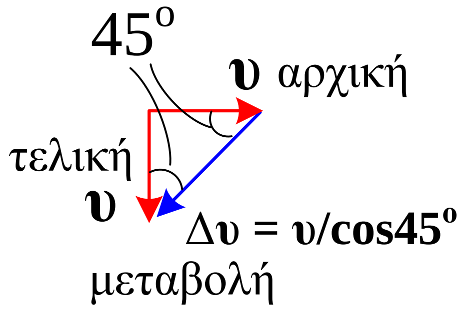
Επιτάχυνση

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

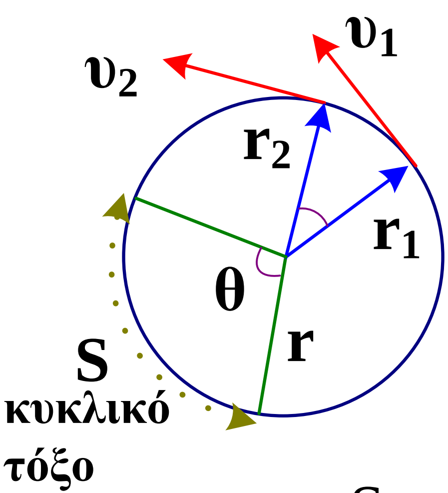


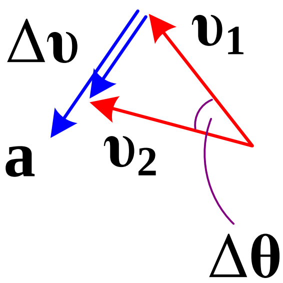


$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$

Έχουμε σταθερα μέτρα γραμμικής, γωνιακής ταχύτητας και κεντρομόλου επιτάχυνσης

Έχουμε μεταβαλλόμενο διάνυσμα ταχύτητας Και κετρομόλου επιτάχυνσης





$$\Delta\upsilon \cong \upsilon\Delta\theta$$

$$a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \cong \upsilon \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\upsilon = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r\,\omega$$

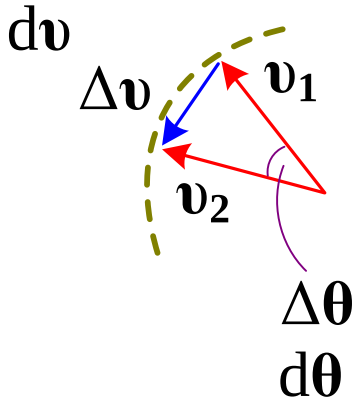
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{r}$$

$$\theta = \frac{S}{r}$$

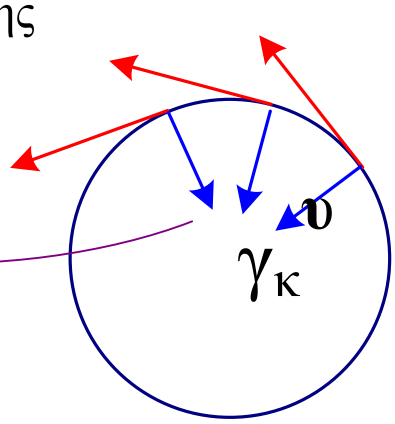
Σε ακτίνια
Γι αυτό μόνο τα ακτίνια έχουν νόημα στη Φυσική

$$a = \frac{\upsilon^2}{r}$$ μέτρο κεντρομόλου επιτάχυνσης

στο όριο $\Delta t \rightarrow 0$



Διάνυσμα κεντρομόλου επιτάχυνσης



είναι πάντα κάθετο στην υ

γιατί Δυ γίνεται κάθετο στο υ

όταν $\Delta t \rightarrow 0$

$\mathbf{\Delta t \rightarrow 0}$ $\mathbf{\Delta\upsilon \rightarrow d\upsilon}$ $\mathbf{\Delta\theta \rightarrow d\theta}$

στο όριο πέρνουμε