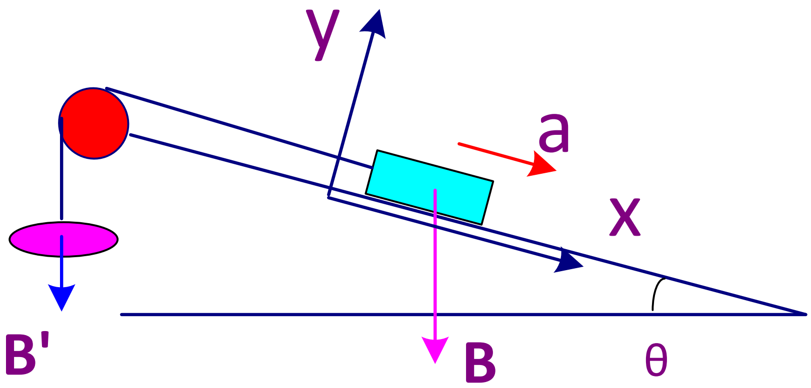
Οι 4 θεμελιώδεις Δυνάμεις στη φύση

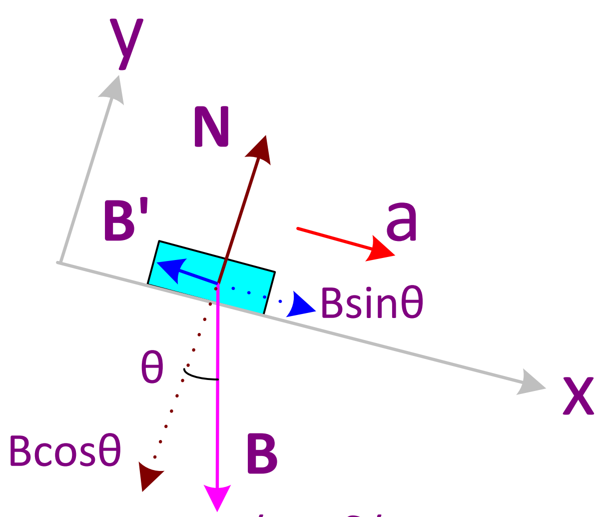
Δύναμη	ασκείται σε	μέγεθος πρωτόνια σε απόσταση 10^{-15}m (διάμετρός τους)	εμβέλεια
Βαρυτική	σε μάζες, m	10^{-34} N	άπειρη
Ασθενής	σε στοιχειώδη σωμάτια	10^{-2} N	$<10^{-17}$m
προκαλεί την ραδιενεργό διάσπαση			
Ηλεκτρομαγνητική	σε ηλεκτρικά φορτία, q	10^{2} N	άπειρη
Ισχυρή	σε πυρηνικά σωματίδια	10^{4} N	10^{-15}m
συγκρατεί τα σωμάτια στο πυρήνα			

Κίνηση υπό σταθερή δύναμη



Επιλογή κατάλληλου αδρανειακού συστήματος : x, y

όπου ισχύουν οι 2 νόμοι του Newton.



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

δείχνει **<u>μόνο</u>** τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα, τα περιβάλλοντα σώματα παραλείπονται

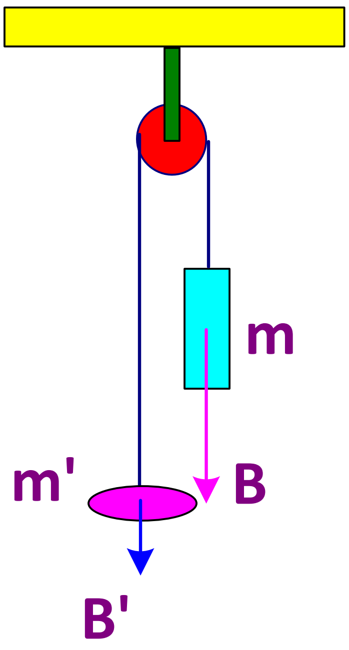
Εξίσωση της κίνησης

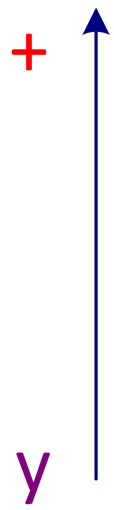
αφού βρούμε την συνιστώσα δύναμη, $\mathbf{F_{ολ}}$, που ασκείται στο σώμα γράφουμε την εξίσωση της κίνησης

$B\cos\theta = N$, $a_y=0$

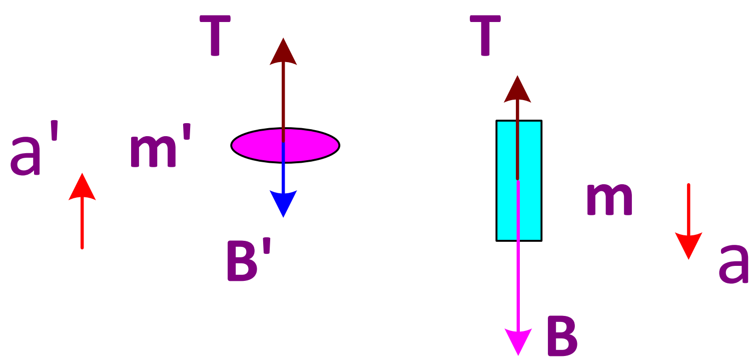
$\mathbf{F_{ολ}} = F_x = m\,\mathbf{a_x} = \mathbf{B\sin\theta - B'}$

Κίνηση σωμάτων μέσω αβαρούς τροχαλίας με μηδενικές τριβές





Διάγραμματα ελευθέρου σώματος



Εξισώσεις της κίνησης

$$-m\,a = \mathbf{T} - mg$$

$$m'\,a' = \mathbf{T} - m'g$$

μόνο κατακόρυφη κίνηση

αφού οι μάζες είναι συνδεμένες με νήμα σταθερού μήκους τότε : $a = -a'$

$$-m\,a = \mathbf{T} - mg$$

$$m'\,a = \mathbf{T} - m'g$$

αφαιρόντας $\quad -m\,a - (m'\,a) = \mathbf{T} - mg - (T - m'g)$

$$m\,a + m'\,a = mg - m'g$$

αν m = m' τότε a=0 $\qquad a = \dfrac{m - m'}{m + m'}\,g$

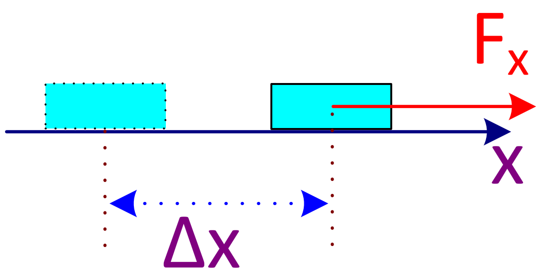
$$T = \frac{2g\,mm'}{m + m'}$$

Έργο & Ενέργεια

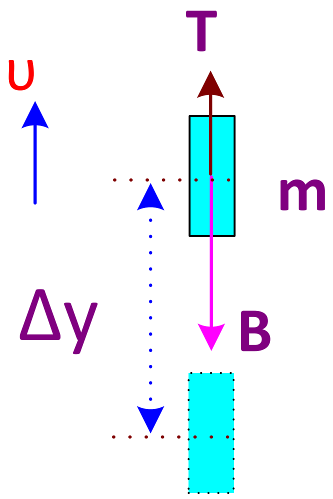
Έργο σε 1 διάσταση

$$W = F_x \, \Delta x$$

1Joule = 1J = 1N 1m



Ανύψωση σώματος



Η Τ παράγει έργο W_T

$$W_T = T \, \Delta y$$

υ = σταθερή **T=B**

Η Β καταναλώνει έργο W_B

$$W_B = -B \, \Delta y$$

Αν σώμα είναι ακίνητο υ = 0

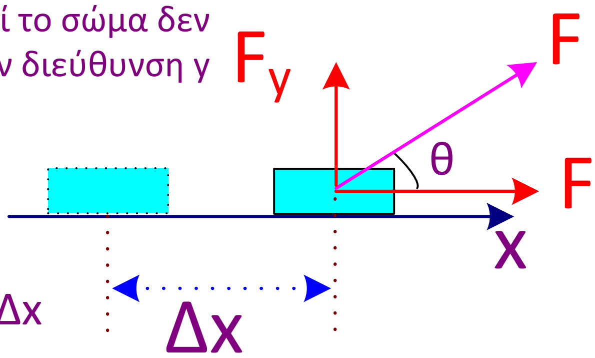
τότε Δy=0 και έτσι καμμία δύναμη δεν παράγει ή καταναλώνει έργο $W_T = 0 = W_B$

η ενέργεια που καταναλώνουμε για να ασκούμε την T θέτει σε κίνηση τα κύτταρα των μυών μέσα στο σώμα μας

Έργο σε περισσότερες διαστάσεις

Η F_y δεν παράγει έργο γιατί το σώμα δεν μετακινείται κατά την διεύθυνση y

Προφανώς θα ασκούνται κιάλλες δυνάμεις για να κινείται το σώμα κατά τη διεύθυνση X, Αλλά όμως μπορούμε να επικεντρωθούμε στο έργο όποιας δύναμης επιθυμούμε π..χ. της F



$F_x = F\cos\theta$

μόνο η F_x παράγει έργο $W_x = F_x \, \Delta x$

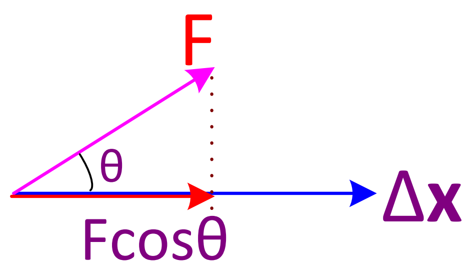
Το έργο W_F που παράγει η F είναι αυτό που παράγει η F_x : $W_x = F_x \, \Delta x$

$$W_F = W_x = F_x \, \Delta x = F\cos\theta \, \Delta x$$

$$W_F = F\cos\theta \, \Delta x = \mathbf{F} \, \mathbf{\Delta x}$$

Το έργο W_F ισούται με το εσωτερικό γινόμενο του ανύσματος **F** επί το άνυσμα **Δx**

$$W_F = \mathbf{F} \, \mathbf{\Delta x} = F \, \Delta x \cos\theta$$



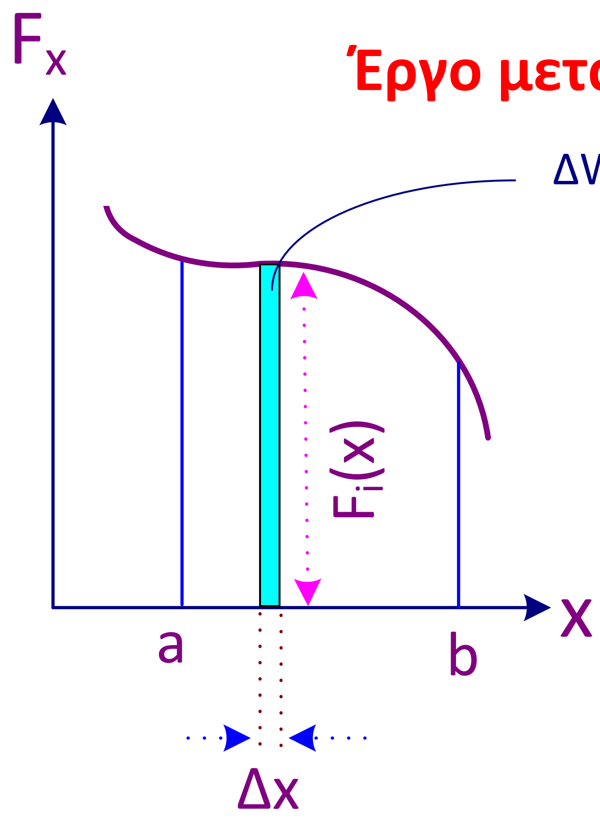
Αν $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{z}$

$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{z}$

Γενικά : $$W = \mathbf{F}\,\Delta\mathbf{r} = F_x\,\Delta x + F_y\,\Delta y + F_z\,\Delta z$$

γιατί : $\mathbf{i}\,\mathbf{i}=1, \mathbf{j}\,\mathbf{j} = 1, \mathbf{z}\,\mathbf{z} = 1$ και $\mathbf{i}\,\mathbf{j}=0, \mathbf{j}\,\mathbf{z} = 0, \mathbf{i}\,\mathbf{z} = 0$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης

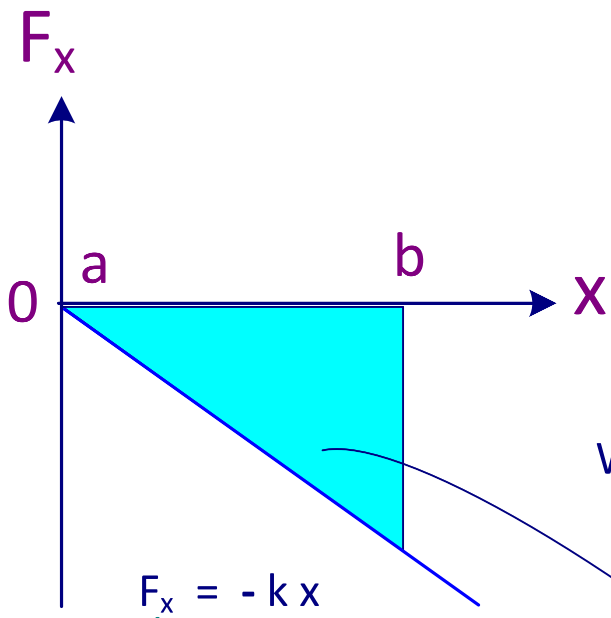


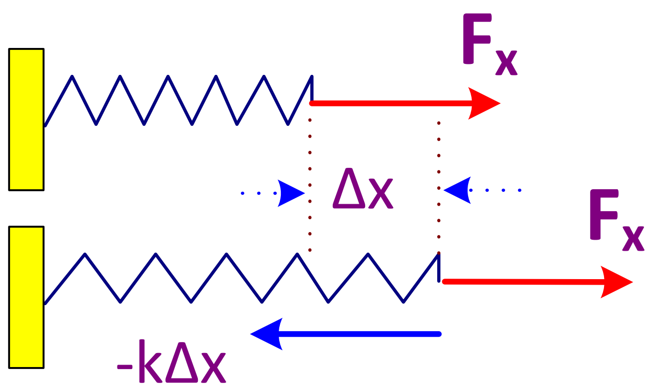
$$\Delta W_i = \mathbf{F}_x(x_i)\,\Delta\mathbf{x}$$

$$W = \Sigma\Delta W_i = \Sigma\,\mathbf{F}_x(x_i)\,\Delta\mathbf{x}$$

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma\,\mathbf{F}_x(x_i)\,\Delta\mathbf{x}$$

$$W = \int_a^b \mathbf{F}_x(x_i)\,d\mathbf{x} = \text{εμβαδόν κάτω από την } F_x$$





$$W = \int_a^b \mathbf{F}_x(x_i)\,d\mathbf{x} \qquad W = \int_a^b (-kx)\,d\mathbf{x}$$

$F_x = -k\,x$
Δύναμη επαναφοράς

$$W = -k\left[(1/2)x^2\right]_b = (1/2)k(a^2-b^2)$$

a=0 $W = -(1/2)\,k\,b^2 = -(1/2)\,kbb = \text{εμβαδόν τριγώνου}$

Έργο-Κινητική Ενέργεια

$$W = \int_a^b \mathbf{F}_x(x)\, d\mathbf{x} = \int_a^b m \frac{d\upsilon_x}{dt} dx \qquad \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dx}\upsilon_x$$

$$W = \int_{\upsilon_a}^{\upsilon_b} m\upsilon_x\, d\upsilon_x = m\left[(1/2)\upsilon_x^2\right]_{\upsilon_a}^{\upsilon_b} = (1/2)m\upsilon_b^2 - (1/2)m\upsilon_a^2$$

Έργο = W = ΔE_κ = μεταβολή κινητικής ενέργειας

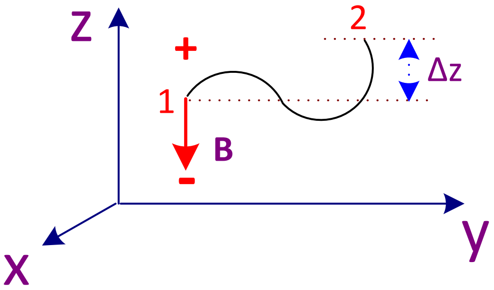
θεώρημα Έργου - Ενέργειας

άρα ο ορισμός

Έργο = F x = Ενέργεια

F_x είναι η $F_{\chi o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}}$

Έργο του βάρους   από 1 σε 2



ανεξάρτητο από Δx, Δy μετατόπιση

εξαρτάται μόνο από την κατακόρυφη Δz μετατόπιση

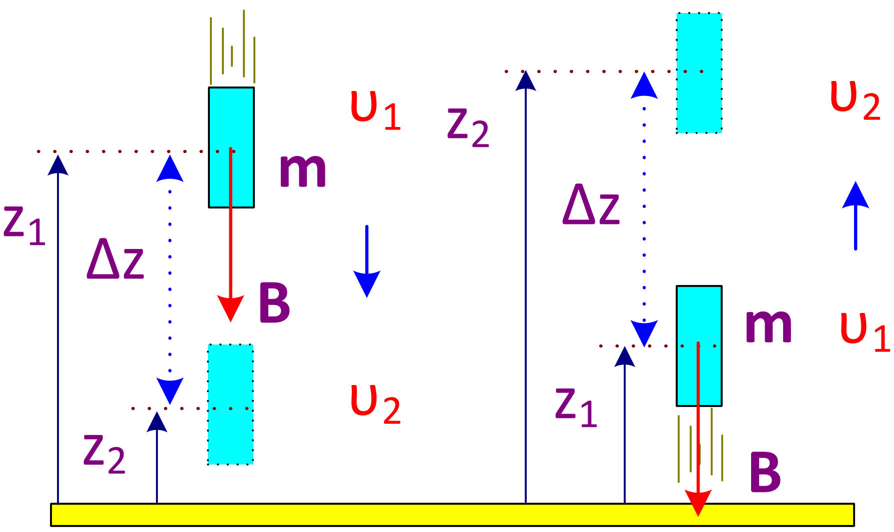
$$W_B = -B\,\Delta z = -B\,(z_2 - z_1) = -B\,z_2 + B\,z_1$$

το B έχει αρνητική φορά

Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια $W_B = B\,y = mg\,y$

Αν μόνο η B ασκείται $W_B = \Delta E_{\kappa\iota\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}}$ τελική-αρχική

z_1: αρχικό
z_2: τελικό



$$-mg\,z_2 + mg\,z_1 = K_2 - K_1$$

$$K_1 + mg\,z_1 = K_2 + mg\,z_2$$

$$K_1 + mg\,z_1 = \text{σταθερό}$$

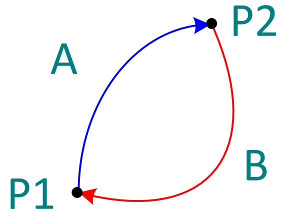
Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας

Δυναμική Ενέργεια ⟷ **Κινητική Ενέργεια**

Διατήρηση της Ενέργειας

Διατηρητική δύναμη

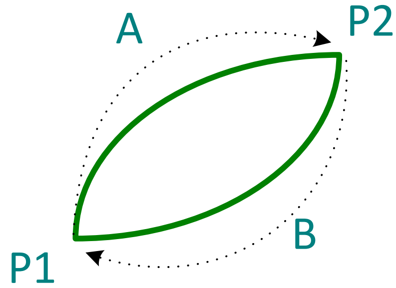
Εργο που παράγει είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.



$W_{P1AP2}=W_{P1BP2}$

Ισοδύναμα ⇕

Εργο σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν.

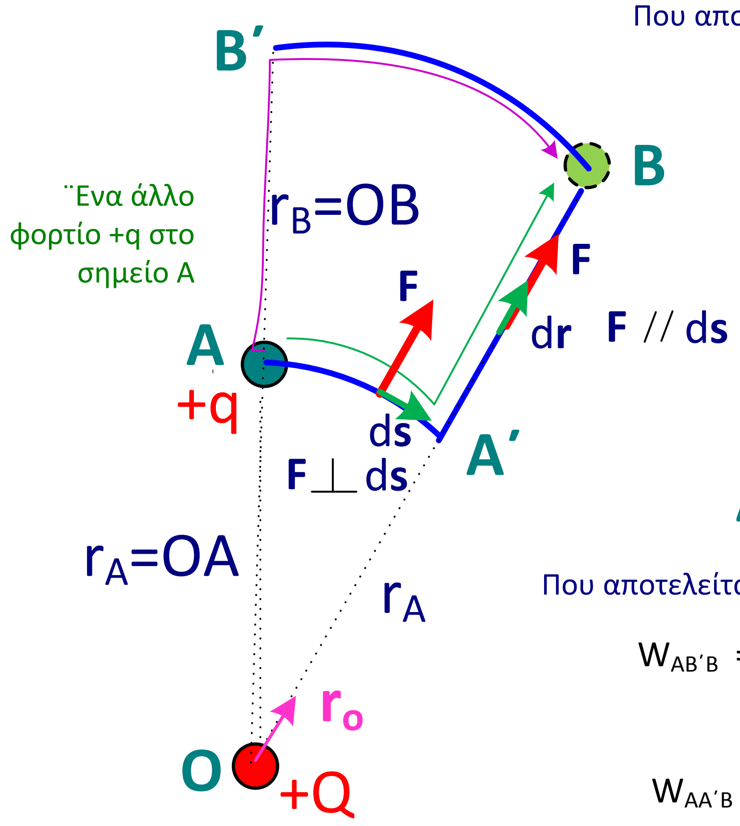


$W_{P1P2P1} = 0$

$W_{P1AP2}=W_{P1BP2} \rightleftarrows 0 = W_{P1AP2}-W_{P1BP2} \rightleftarrows 0 = W_{P1AP2}+W_{P2BP1}$

Η Ηλεκτρική δύναμη είναι διατηρητική δύναμη

Για την απόδειξη αρκεί να πρέπει να αποδέιξω ότι για 2 διαφορετικές διαδρομές για τη μετακίνηση ενός φορτίου q από το A στο B το έργο της ηλεκτρικής δύναμης είναι ίδιο



Θεωρώ ένα ακίνητο φορτίο +Q στο σημείο O

Διαλέγω τη μιά διαδρομή AA΄B

Που αποτελείται από το τόξο AA΄ με ακτίνα r_A και την ακτινική μετακίνηση A΄B

$$W_{AA'B} = W_{AA'} + W_{A'B}$$

$$W_{AA'B} = \underbrace{\int_A^{A'} \mathbf{F}\, \mathbf{ds}}_{0} + \int_{A'}^{B} \mathbf{F}\, \mathbf{dr} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{K} \frac{Q\,q}{r^2}\, \mathbf{dr}$$

$$W_{AA'B} = \mathbf{K\,Q\,q}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \mathbf{K\,Q\,q}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Διαλέγω την άλλη διαδρομή AB΄B

Που αποτελείται από την ακτινική μετακίνηση AB΄ και το τόξο B΄B με ακτίνα r_B

$$W_{AB'B} = W_{AB'} + W_{B'B}$$

$$W_{AA'B} = \int_A^{B'} \mathbf{F}\, \mathbf{ds} + \underbrace{\int_{B'}^{B} \mathbf{F}\, \mathbf{dr}}_{0} = \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{K} \frac{Q\,q}{r^2}\, \mathbf{dr}$$

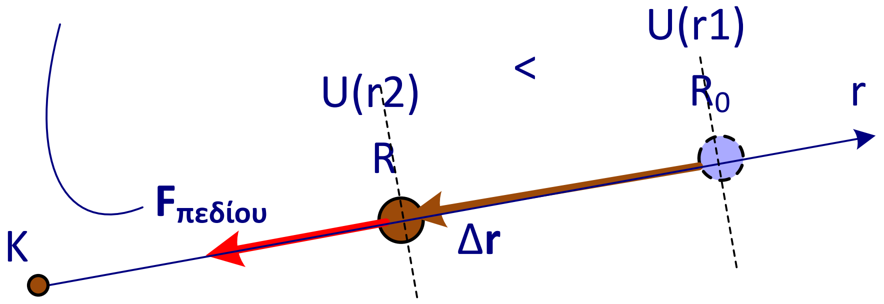
επομένως $W_{AA'B} = W_{AB'B}$ $\qquad W_{AB'B} = \mathbf{K\,Q\,q}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = \mathbf{K\,Q\,q}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$

Άρα η Ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική

Ανάλογη απόδειξη μπορεί να γίνει για τη βαρυτική δύναμη η οποία είναι και αυτή συντηρητική

Συνάρτηση Δυναμικής ενέργειας

Η δύναμη $F_{πεδίου}$ ενός συντηρητικού πεδίου που ωθεί αυθόρμητα παράγοντας έργο $W_{πεδίου}$ το κατάλληλο υπόθεμα (πχ μάζα-(βαρ Πεδίο) φορτίο (Ηλεκ Πεδίο)) προς τη διεύθυνση όπου «καταλανώνεται (ελαττώνεται) η δυναμική ενέργεια (ΔU<0) του πεδίου ώστε : $-\Delta U = \Delta W_{πεδίου}$



$0<W_{πεδίου} = F_{πεδίου}\,\Delta R = -\Delta U$ $\quad F_{πεδίου} = -\dfrac{\Delta U}{\Delta r}$ $\quad F_{πεδίου} = -\dfrac{dU}{dr}$

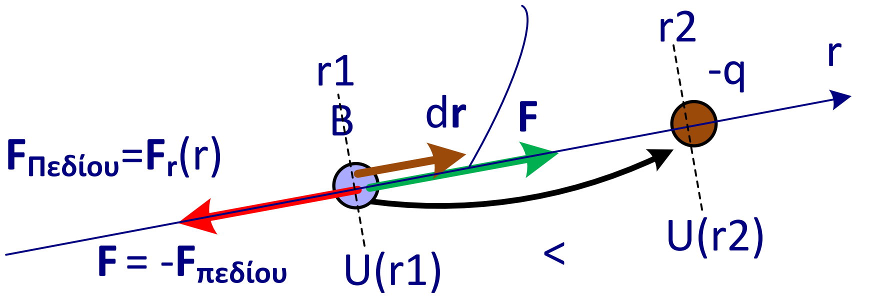
Αφού $\quad \Delta U = U(r2)-U(r1)<0$

Δηλ η **<u>αρνητική</u>** παράγωγος της U ως προς τη μετατόπιση r μας παρέχει τη δύναμη $F_{πεδίου}$ του πεδίου

Αν η δύναμη τυ πεδίου ασκείται από ένα κέντρο και εξαρτάται από την απόσταση r του κέντρου K τότε η δύναμη λέγεται **<u>κεντρική</u>** $\quad F_{πεδίου}=F_r(r)$

Αν εφαρμόσω δύναμη F ίση και αντίθετη του πεδίου F_r $\quad F = -F_{πεδίου}$ $\quad$ Τότε το σώμα κινείται χωρίς να επιταχύνεται

Αν η F είναι **<u>παράλληλη</u>** με τη μετατόπιση dr, τότε η F **<u>παράγει</u>** έργο που προστίθεται στην αρχική δυν ενέργεια U(r1) και αποθηκεύεται σαν δυναμική ενέργεια και το σώμα κινείται από χαμηλή U(r1) σε υψηλή U(r2) δυναμική ενέργεια



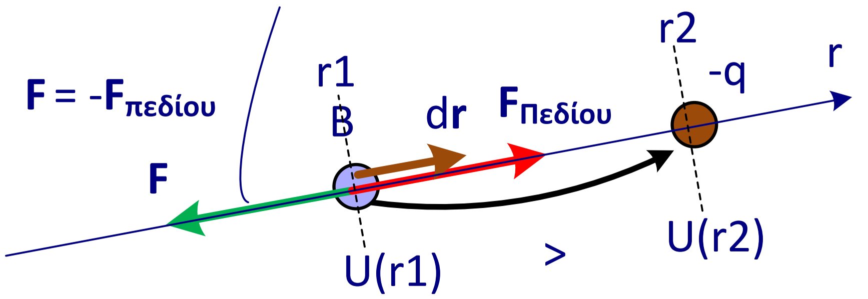
$0<W_F = F\,\Delta r$

$U(r1) + F(r)\,\Delta r = U(r2)$

$0<W_F = F\,\Delta r = \Delta U=U(r2)-U(r1)$

$U(r1)<U(r2)$

Αν η F είναι **<u>αντιπαράλληλη</u>** με τη μετατόπιση dr, τότε η F **<u>καταναλώνει</u>** έργο που αφαιρείται από την αρχική δυναμική ενέργεια U(r1) και το σώμα κινείται προς χαμηλότερη U(r1) δυναμική ενέργεια



$0>W_F = F\,\Delta r$

$U(r1) + F(r)\,\Delta r = U(r2)$

$0>W_F = F\,\Delta r = \Delta U=U(r2)-U(r1)$

$U(r1)>U(r2)$

Υπολογίζοντας το έργο δύναμης αντίθετης του πεδίου από μια τυχαία θέση r=R σε κάποια άλλη συγκεκριμένη θέση $R=R_o$ που επιλέγουμε να προσδιορίσουμε τη τιμή U(r) σε τυχαία θέση του συντηρητικού πεδίου

$$\int_R^{R_0} F\,dr = -\int_R^{R_0} F_r(r)\,dr = \int_R^{R_0} dU = U(R_o)-U(R)$$

Μπορούμε να βρούμε μια θέση $r=R_o$ όπου η δυναμική ενέργεια $U(R_o)$ παίρνει μια γνωστή τιμή π.χ. $U(R_o)=0$

$$U(R) = U(R_o) + \int_R^{R_0} F_r(r)\,dr$$

Έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε τη τιμή U(R) σε τυχαία θέση του συντηρητικού πεδίου

Αλλάζοντας τα όρια του παραπάνω ολοκληρώματος καταλήγουμε σε μια γραφή που συνήθως είναι γνωστή :

$$U(R) = U(R_o) - \int_{R_0}^{R} F_r(r)\,dr$$

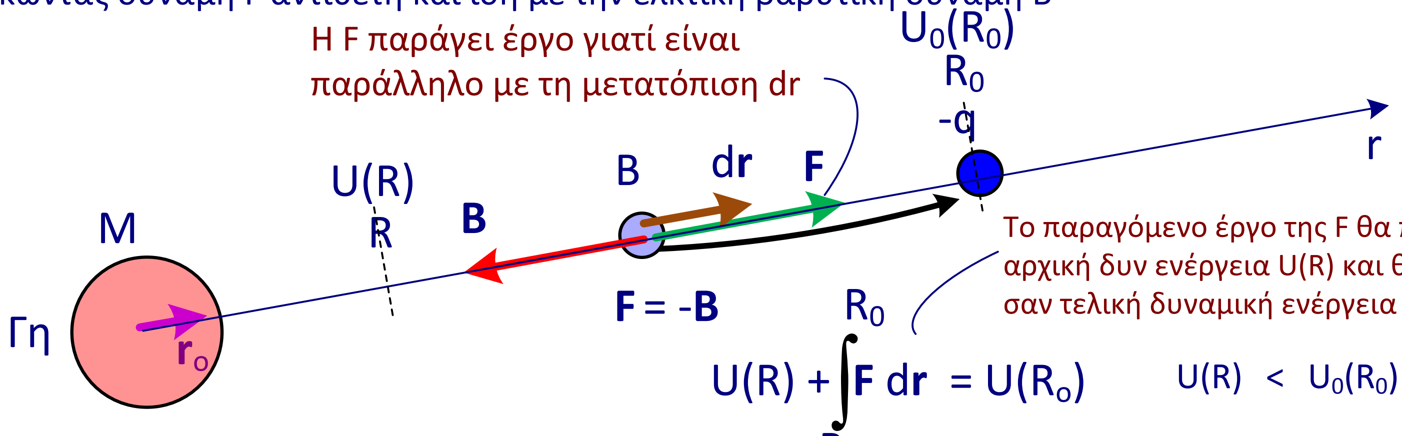
Συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας

Πχ για το βαρυτικό πεδίο [$F_r = K_N(M\ m)/r^2$] ποια είναι η δυν ενέργεια U(r)

Θετικό σώμα μάζας M βρίσκεται στη θέση r=0 και ένα άλλο σώμα μάζας m στη θέση r=R με δυναμική ενέργεια U(R)

Μετακινούμε σιγά-σιγά χωρίς επιτάχυνση το σώμα μάζας m από τη θέση R μέχρι τη θέση R_o ασκώντας δύναμη F αντίθετη και ίση με την ελκτική βαρυτική δύναμη B

Η F παράγει έργο γιατί είναι παράλληλο με τη μετατόπιση dr



Το παραγόμενο έργο της F θα προστεθεί στην αρχική δυν ενέργεια U(R) και θα αποθηκευτεί σαν τελική δυναμική ενέργεια $U(R_o)$

$$U(R) + \int_R^{R_0} \mathbf{F}\,dr = U(R_o) \qquad U(R) < U_0(R_0)$$

$$W_F = U(R_o) - U(R) = \int_R^{R_0} \mathbf{F}\,dr = -\int_R^{R_0} \mathbf{B}\,dr = -\int_R^{R_0} kMm/r^2\,(-\mathbf{r}_o)\,(\mathbf{r}_o\,dr) = \int_R^{R_0} kMm/r^2\,dr$$

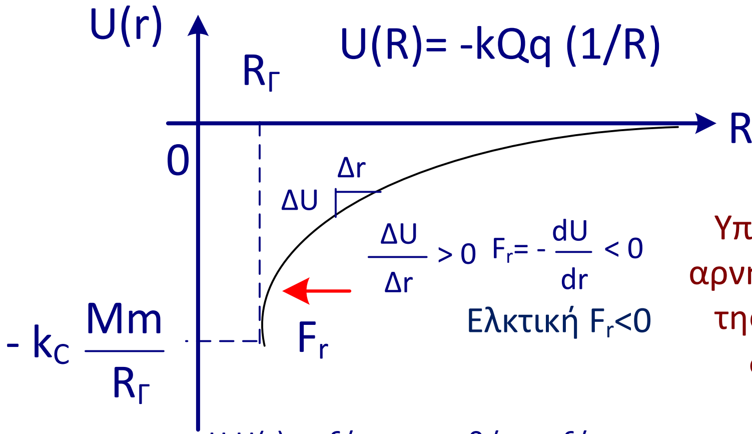
Τα έργο W_F που παράγει η F Θα αυξήσει τη δυναμική ενέργεια από U(R) σε $U(R_o)$. Άρα το W_F δηλ θα είναι ίσο με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας

$$U(R_o) - U(R) = kMm \int_R^{R_0} (1/r^2)dr = [-1/r]_R^{R_0}$$

$$U(R_o) - U(R) = -kQq\,(1/R_o - 1/R) \qquad 0 - U(R) = -kQq\,(0 - 1/R) \qquad -U(R) = -kQq\,(-1/R)$$

Σε πολύ μεγάλη απόσταση τα σώματα ασκούν πρακτικά μηδενική έλξη $\quad R_0 = \infty \quad B(R_0 = \infty) = 0$

Συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας Βαρυτικού Πεδίου Newton



Υπολογίζοντας την αρνητική παράγωγο της U(r) Εξάγω την δύναμη Newton

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -(k_N \frac{Mm}{r^2}) = k_N \frac{Mm}{r^2}$$

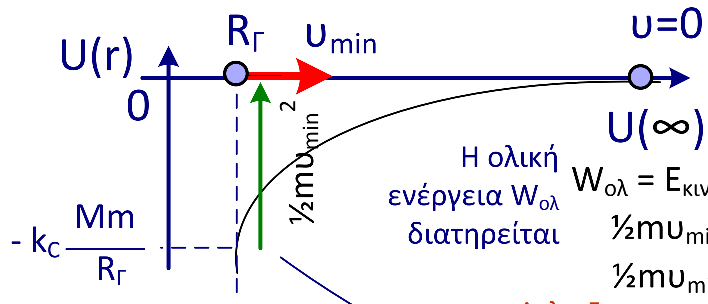
Η U(r) αυξάνεται καθώς αυξάνεται το r από το κέντρο της Γης (δηλ το ύψος).

Σχόλια : Η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας είναι **<u>αρνητική</u>**

$$U(R) = -kQq\,(1/R)$$

...αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η βαρυτική δύναμη είναι ελκτική και επομένως τα σώματα έλκονται, αρχικά από πολύ μεγάλη απόσταση (άπειρη) όπου η βαρυτική δύναμη πρακτικά δεν υπάρχει άρα και η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, σε μια θέση όπου τα σώματα αυθόρμητα ευρίσκονται σχετικά κοντά ελλατώνοντας την αρχική μέγιστη ενέργειά τους που ήταν 0 (στο άπειρο) και επομένως αποκτά ενέργειες U(R)<0 .

Πόση είναι η ελάχιστη ταχύτητα υ_{min} η λεγόμενη $\upsilon_{διαφυγής}$ που πρέπει να εκτοξεύσω ένα σώμα για να ξεφύγει από την έλξη της Γης?



Το σώμα θα έχει ξεφύγει από την έλξη της Γης όταν φθάσει σε μεγάλη απόσταση r=∞ όπου η βαρύτητα =0 ή U(∞)=0 εκεί μπορεί να έχει μηδενιστεί η ταχύτητά του

Η ολική ενέργεια $W_{ολ}$ διατηρείται

$$W_{ολ} = E_{κιν}(R_\Gamma) + U(R_\Gamma) = E_{κιν}(\infty) + U(\infty)$$

$$½m\upsilon_{min}^2 - KMm/R_\Gamma = 0 + 0$$

$$½m\upsilon_{min}^2 = KMm/R_\Gamma$$

$$\upsilon_{min} = \upsilon_{διαφυγής} = (2KM/R_\Gamma)^{1/2}$$

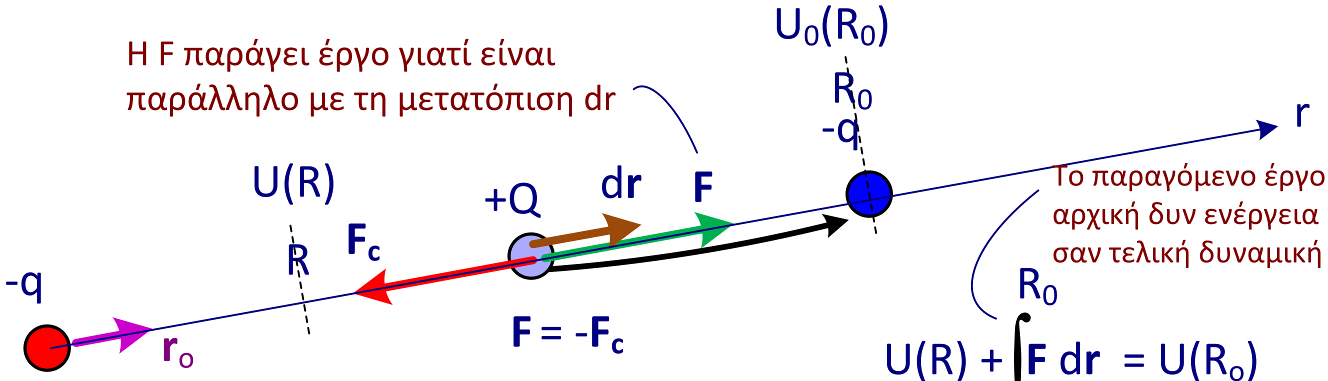
Δηλ η Εκιν που χρειάζεται για ξεφύγει το σώμα από τη Γη πρέπει να είναι ίση με τη αρχική δυναμική ενέργεια του σώματος

Πχ για το πεδίο Coulomb $[F_r = K_C(Q\,q)/r^2]$ ποια είναι η δυν ενέργεια U(r)

αρνητικό -q φορτίο βρίσκεται στη θέση r=0 και Θετικό +Q φορτίο στη θέση r=R με δυναμική ενέργεια U(r)

Μετακινούμε σιγά-σιγά χωρίς επιτάχυνση το θετικό φορτίο +Q από τη θέση R μέχρι τη θέση R_o ασκώντας δύναμη F αντίθετη από και ίση με την ελκτική ηλεκτρική δύναμη F_c

Η F παράγει έργο γιατί είναι παράλληλο με τη μετατόπιση dr



Το παραγόμενο έργο της F θα προστεθεί στην αρχική δυν ενέργεια U(R) και θα αποθηκευτεί σαν τελική δυναμική ενέργεια $U(R_o)$

$$U(R) + \int_R^{R_0} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = U(R_o) \qquad U(R) < U_0(R_0)$$

$$W_F = U(R_o) - U(R) = \int_R^{R_0} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -\int_R^{R_0} \mathbf{F_c}\, d\mathbf{r} = -\int_R^{R_0} [kQq]/r^2\,(-\mathbf{r_o})\,(\mathbf{r_o}\, dr) = \int_R^{R_0} [kQ(q)]/r^2\, dr$$

Τα έργο W_F που παράγει η F Θα αυξήσει τη δυναμική ενέργεια από U(R) σε $U(R_o)$. Άρα το W_F θα είναι ίσο με τη μεταβολή (αύξηση) της δυναμικής ενέργειας

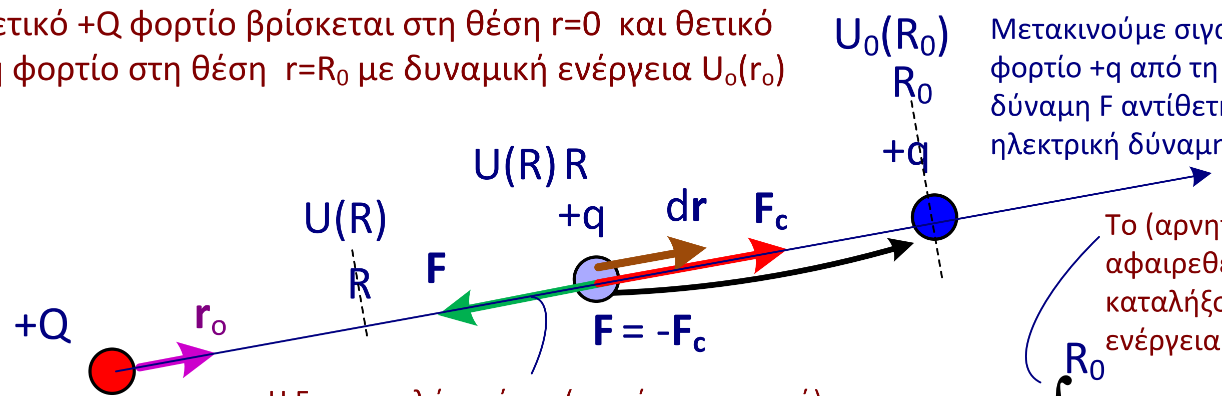
$$W_F = U(R_o) - U(R) = kQq \int_R^{R_0} (1/r^2)dr = [-1/r]_R^{R_0}$$

$$U(R_o) - U(R) = -kQq\,(1/R_o - 1/R) \qquad 0 - U(R) = -kQq\,(0 - 1/R) \qquad -U(R) = -kQq\,(-1/R)$$

$$R_0 = \infty \qquad F_C(R_0=\infty) = 0 \qquad U(R_0=\infty) = 0 \qquad U(r) = -k\frac{Qq}{r}$$

Θετικό +Q φορτίο βρίσκεται στη θέση r=0 και θετικό +q φορτίο στη θέση $r=R_0$ με δυναμική ενέργεια $U_o(r_o)$

Μετακινούμε σιγά-σιγά χωρίς επιτάχυνση το θετικό φορτίο +q από τη θέση R μέχρι τη θέση R_o ασκώντας δύναμη F αντίθετη από και ίση με την απωστική ηλεκτρική δύναμη F_c



Το (αρνητικό) έργο που καταναλώνει η F θα αφαιρεθεί από την αρχική U(R) και θα καταλήξουμε σε μικρότερη τελική δυναμική ενέργεια $U(R_o)$

Η F καταναλώνει έργο (και είναι αρνητικό) γιατί είναι αντιπαράλληλο με τη μετατόπιση dr

$$U(R) + \int_R^{R_0} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = U(R_o) \qquad U(R) > U_0(R_0)$$

$$W_F = U(R_o) - U(R) = \int_R^{R_0} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -\int_R^{R_0} \mathbf{F_c}\, d\mathbf{r} = -\int_R^{R_0} [kQq]/r^2\,(\mathbf{r_o})\,(\mathbf{r_o}\, dr) = -\int_R^{R_0} [kQq]/r^2\, dr$$

Τα έργο W_F που καταναλώνει η F Θα ελλατώσει τη δυναμική ενέργεια από U(R) σε $U(R_o)$.

$$W_F = U(R_o) - U(R) = -kQq \int_R^{R_0} (1/r^2)dr = -[-1/r]_R^{R_0}$$

$$U(R_o) - U(R) = kQq\,(1/R_o - 1/R) \qquad 0 - U(R) = kQq\,(0 - 1/R) \qquad -U(R) = kQq\,(-1/R)$$

$$R_0 = \infty \qquad F_C(R_0=\infty) = 0 \qquad U(R_0=\infty) = 0 \qquad U(r) = k\frac{Qq}{r}$$

Γενικά για 2 φορτία Q, q σε απόσταση r έχουν δυναμική ενέργεια

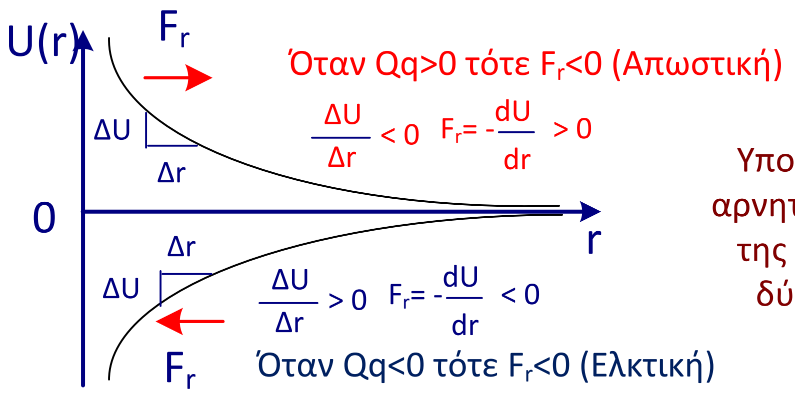
$$U(r) = k\frac{Qq}{r}$$

Όπου τα Q, q θεωρούνται αλγεβρικά με το πρόσημό τους (+ ή -)

$$U(r) = k\frac{Qq}{r} > 0 \qquad U(r) = k\frac{Qq}{r} < 0$$

Όταν Qq>0 τότε U(r)>0 (Απωστική Δυν ενέργεια)

Όταν Qq<0 τότε U(r)<0 (ελκτική Δυν ενέργεια)



Συνάρτηση Δυναμικής ενέργειας Πεδίου Coulomb

Υπολογίζοντας την αρνητική παράγωγο της U(r) Εξάγω την δύναμη Coulomb

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\left(-k_C \frac{Q\,q}{r^2}\right) = k_C \frac{Q\,q}{r^2}$$

$$U(r) = k\frac{Qq}{r}$$

Όπως το ηλεκτρικό πεδίο, που ορίστηκε ως η δύναμη ανά μονάδα φορτίου έτσι πολύ χρήσιμη είναι και το ηλεκτρικό δυναμικό

Δυναμικό σημειακού φορτίου

...είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου

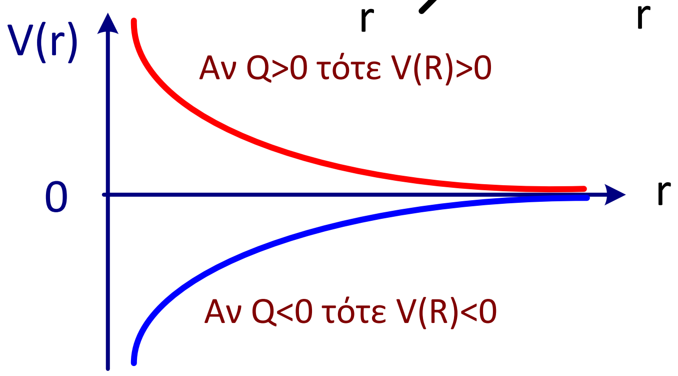
$$V(r) = U(r)/q = \left(k\frac{Qq}{r}\right)/q = k\frac{Q}{r}$$

$$V(r) = k\frac{Q}{r}$$

Μονάδες μέτρησης του Δυναμικού

$$V(r) = U(r)/q$$

$$1\ \text{Volt} = 1\ \text{j} / 1\ \text{C}$$



Συνήθως χρησιμοποιείται η διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ 2 σημείων ενός ηλεκτρικού πεδίου που έχουν δυναμικό V(R1) Και V(R2) Όπου ΔV=V(R2)-V(R1)

Χρησιμότητα του ηλεκτρικού δυναμικού

Έστω ότι έχω σημειακό φορτίο Q Το οποίο έχει δυναμικό $V(r) = k\dfrac{Q}{r}$

Αυτό σημαίνει πως για να μετακινηθεί φορτίο q=1C, αρχικά σε μεγάλη απόσταση, σε μια απόσταση r από το Q, σημαίνει πως καταναλώνεται (ομόσημα φορτία) ή κερδίζεται (ετερόσημα φορτία) ενέργεια σε joule ίση με V(r)1C δηλ U(r)=V(r)1C

$$V(r) = U(r)/q$$

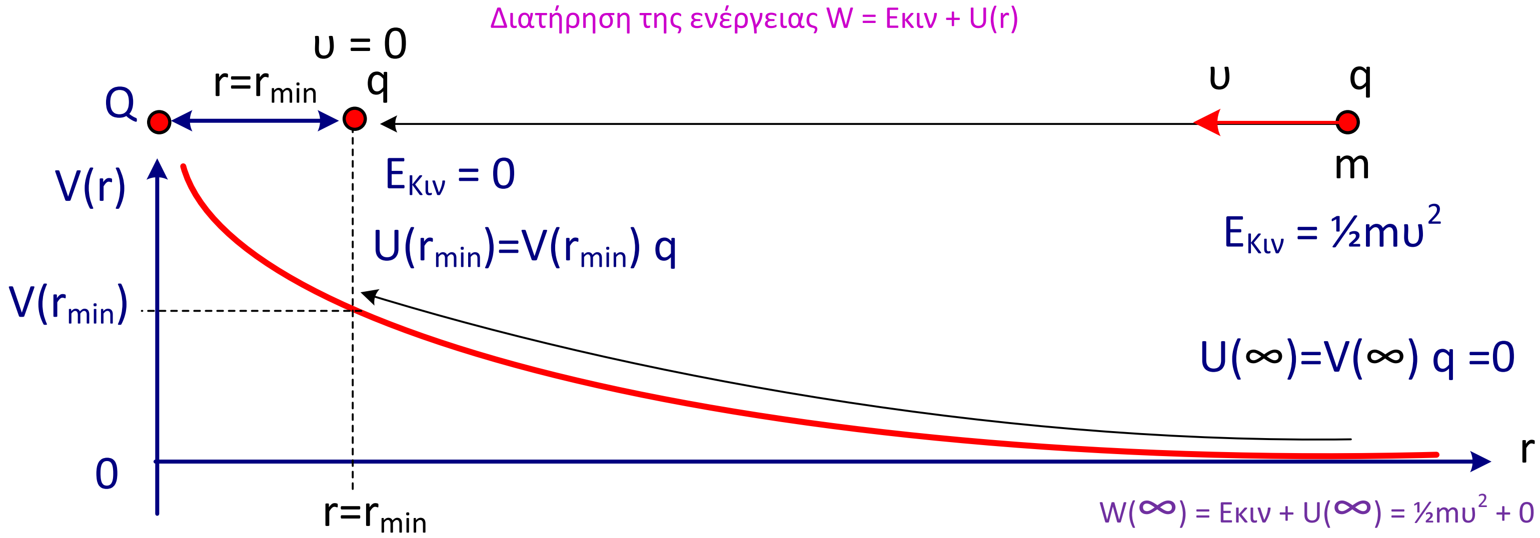
Αν μετακινήσω από πολύ μακρυά ένα τυχαίο φορτίο q ίσο με q = β C κοντά στο Q σε απόσταση r=α

....τότε η δυναμική τους θα ενέργεια είναι $U(\alpha) = V(\alpha)\,q = k\dfrac{Q\,q}{r}$

Και δεν χρειάζεται να την υπολογίζω κάθε φορά που θα μεταφέρω και άλλο φορτίο q

Αν ένα σώμα μάζας m έχει θετικό φορτίο +q Έχει ταχύτητα υ και πλησιάζει από πολύ μακρυά ένα θετικό φορτίο +Q. Να βρεθεί ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση r_{min} που θα βρεθούν τα 2 φορτία.

Διατήρηση της ενέργειας W = Εκιν + U(r)



$W(\infty) = Εκιν + U(\infty) = ½mυ^2 + 0 = ½mυ^2$

$W(r_{min}) = Εκιν + U(r_{min}) = 0 + V(r_{min})q = V(r_{min})q$

$W(r_{min}) = W(\infty) \quad V(r_{min})q = 1/2mυ^2 \quad KQq/r_{min} = 1/2mυ^2 \quad r_{min} = KQq/(½mυ^2)$

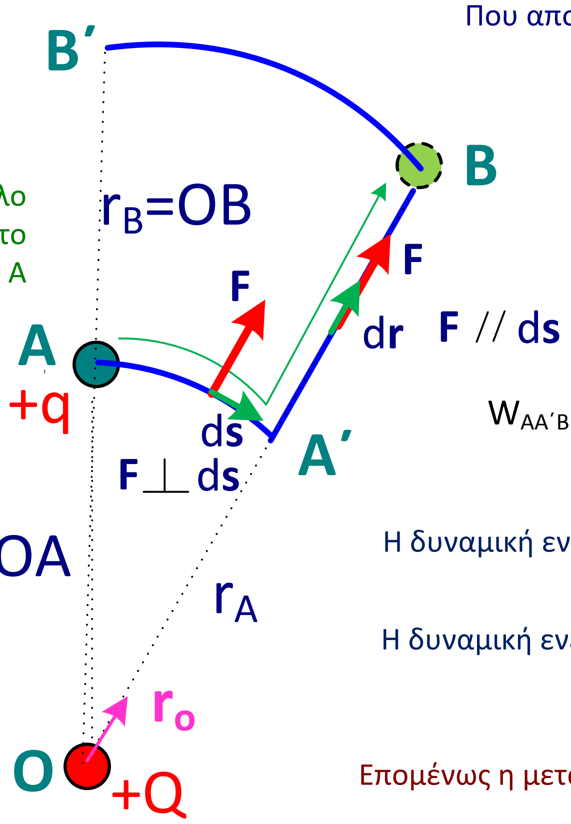
Και έτσι δεν χρειάζεται να κάνω κανένα άλλο υπολογισμό έργου δύναμης του ηλεκτρ πεδίου με ολοκληρώματα

Θετικό φορτίο Q είναι τοπεθετημένο στο Ο
Να βρεθεί το έργο της δύναμης για τη μετακίνηση ενός θετικού φορτίου q από το Α στο Β.
Ακολούθως να βρείτε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας κατά τη πάραπάνω μετακίνηση

Αφού το πεδίο είναι συντηρητικό διαλέγω μιά διαδρομή ΑΑ΄Β για τον υπολογισμό του έργου

Που αποτελείται από το τόξο ΑΑ΄ με ακτίνα r_A και την ακτινική μετακίνηση Α΄Β

¨Ενα άλλο φορτίο +q στο σημείο Α



Θεωρώ ένα ακίνητο φορτίο +Q στο σημείο Ο

$$W_{AA'B} = W_{AA'} + W_{A'B}$$

$$W_{AA'B} = \int_{A}^{A'} \underbrace{F\,ds}_{0} + \int_{A'}^{B} F\,dr = \int_{r_A}^{r_B} K \frac{Q\,q}{r^2}\,dr$$

$$W_{AA'B} = K\,Q\,q\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = K\,Q\,q\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Δηλ. ότι και το έργο της δύναμης του πεδίου που υπολογήσαμε προηγουμένως

Η δυναμική ενέργεια στο Β είναι : $U_B = V(r_B)\,Q = K\,Qq/r_B$

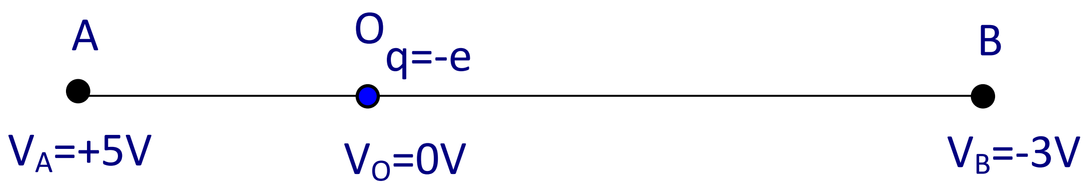
Η δυναμική ενέργεια στο Α είναι : $U_A = V(r_A)\,Q = K\,Qq/r_A$

Επομένως η μεταβολή της δυναμικης ενέργειας είναι :

$$\Delta U = U_B - U_A = V(r_B)\,q - V(r_A)\,q = KQq(1/r_B - 1/r_A)$$

Άρα χρησιμοποιώντας την έννοια του δυναμικού μπορούμε πολύ πιο εύκολα να υπολογίσουμε το έργο για την μετατόπιση φορτίων μέσα σε ηλεκτρικά πεδία

Ένα αρνητικό φορτίο (ηλεκτρόνιο) q=-e είναι τοπεθετημένο στη θέση Ο με δυναμικό 0 V.
Αν το ηλεκτρόνιο αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί κατά μήκος της ευθύγραμμής διαδρομής ΑΟΒ, όπου VA=+5 V Και VB=-3V, σε ποιά από τις διαδρομές ΟΑ ή ΟΒ θα κινηθεί και πόσο θα είναι το αντίστοιχο έργο?



Για τη μετακίνηση από το Ο στο Α το έργο θα είναι :

$U_A - U_O = V(A)\,(-e) - V(O)\,(-e) = (+5V)(-e)-(0V)(-e) = -5eV<0$

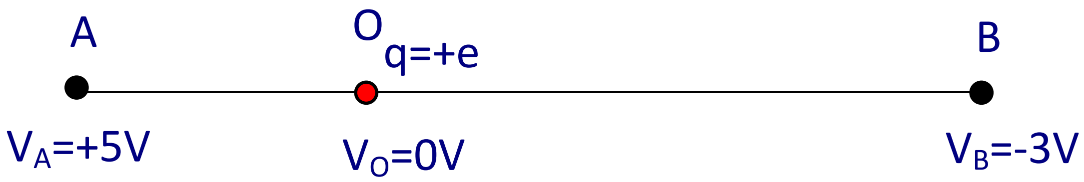
Εδώ η μεταβολή της δυν ενέργειας είναι αρνητική δηλ το ηλεκτρόνιο εκλείει ενέργεια για τη μετακίνηση αυτή, άρα αυτή γίνεται αυθόρμητα

Για τη μετακίνηση από το Ο στο Β το έργο θα είναι :

$U_B - U_O = V(B)\,(-e) - V(O)\,(-e) = (-3V)(-e)-(0V)(-e) = +3eV>0$

Εδώ η μεταβολή της δυν ενέργειας είναι θετική δηλ χρειάζεται να πάρει ενέργεια το ηλεκτρόνιο για τη μετακίνηση αυτή

Να επαναλάβεται την παρπάνω άσκηση με θετικό φορτίο q=+e



Δύναμη και Δυναμική Ενέργεια

αν τα P και P_o διαφέρουν κατά d**r**

$$dU = U(P) - U(P_O) = -\mathbf{F}\, d\mathbf{r} \qquad dU = -\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

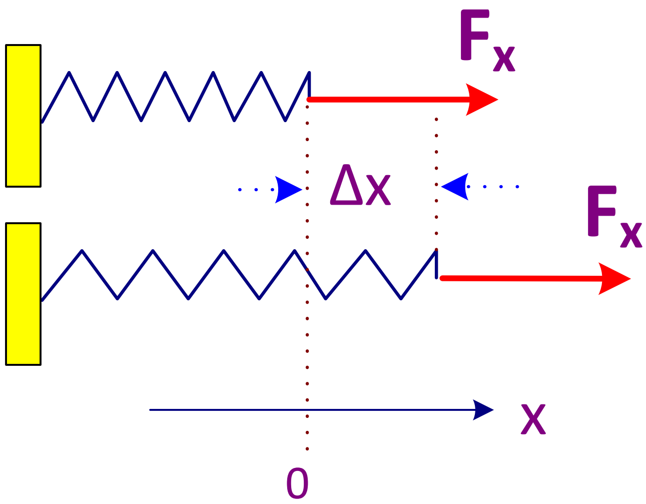
αν $dy = 0$, $dz = 0$ $\qquad dU = -F_x\, dx \qquad F_x = -\dfrac{dU_x}{dx}$

Γενικά

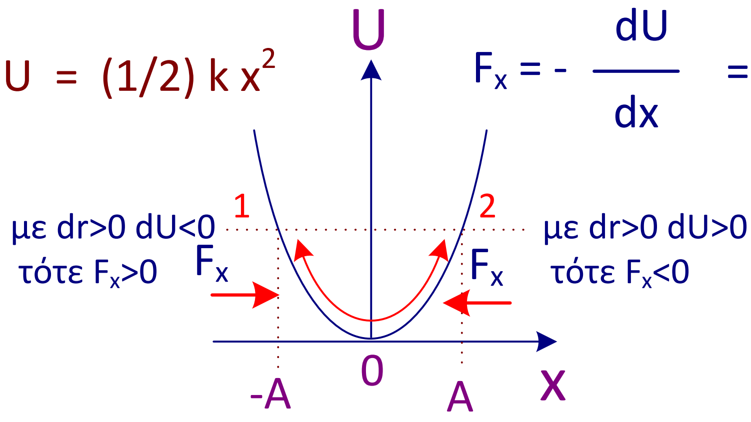
$$F_x = -\frac{\partial U_x}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U_y}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης Δυναμικής ενέργειας δίνει τη Δύναμη

Δυναμική Ενέργεια ελατηρίου



$$U = (1/2)\, k\, x^2 \qquad F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$$

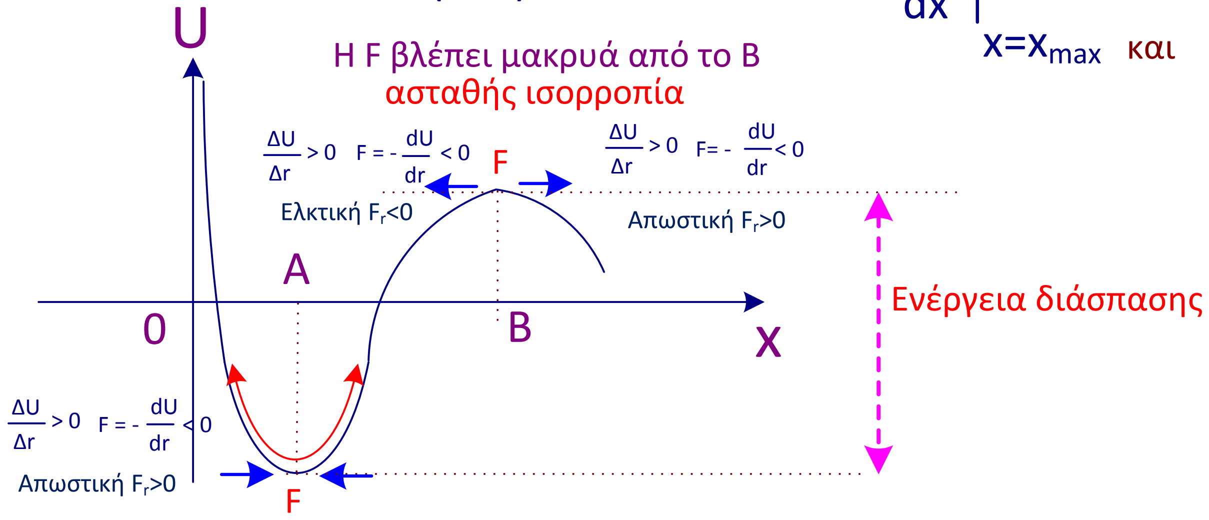


Για x=0 είναι U = 0

Διερεύνηση του συστήματος με τη παρακάτω U(x)

$$U(x=B) = \max \quad \text{δηλ} \quad F_x = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{max}} = 0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=B} < 0$$

Η F βλέπει μακρυά από το B
ασταθής ισορροπία

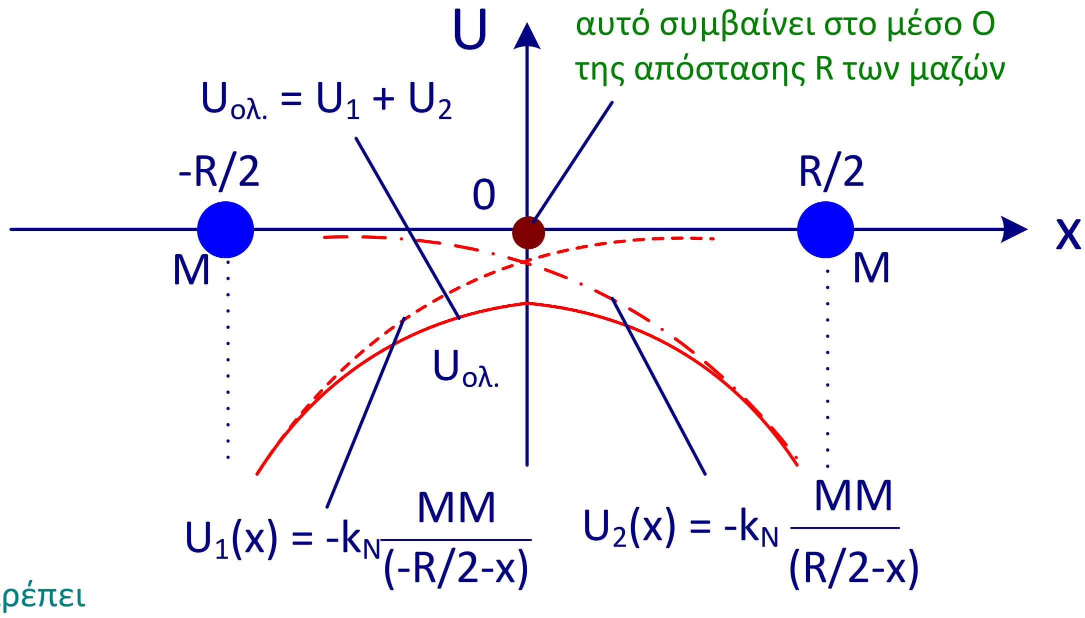


Η F βλέπει προς το A

ευσταθής ισορροπία

$$U(x=A) = \min \quad \text{δηλ} \quad F_x = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=A} = 0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=A} > 0$$

Ένα σώμα μάζας m ευρίσκεται υπό τη επίδραση του βαρυτικού πεδίου 2 ακίνητων μαζών M, M που ευρίσκονται σε απόσταση R. Πότε το σώμα m μπορεί να ισορροπεί ; Τι είδους ισορροπία μπορεί να είναι αυτή;

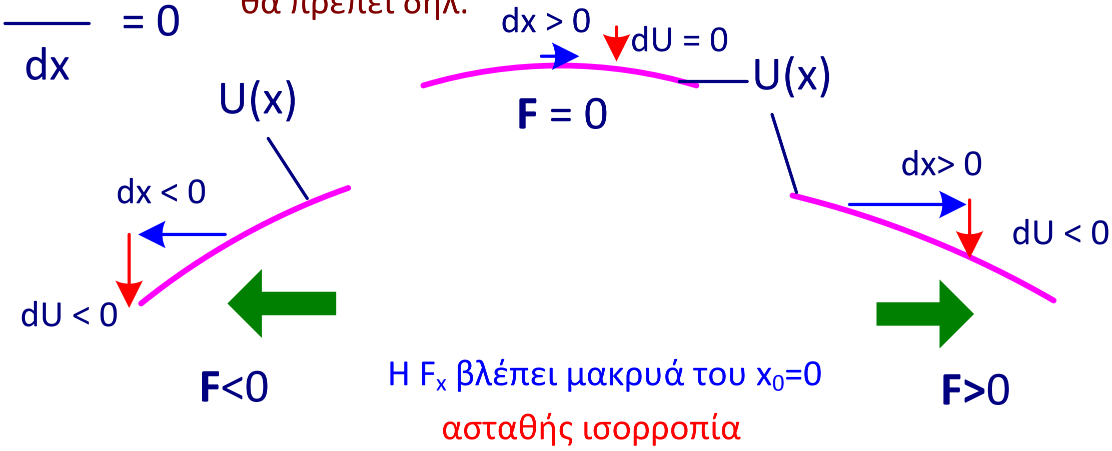


Για να ισορροπεί πρέπει
F=0 ή

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

θα πρέπει δηλ.

Η ισορροπία είναι ασταθής γιατί

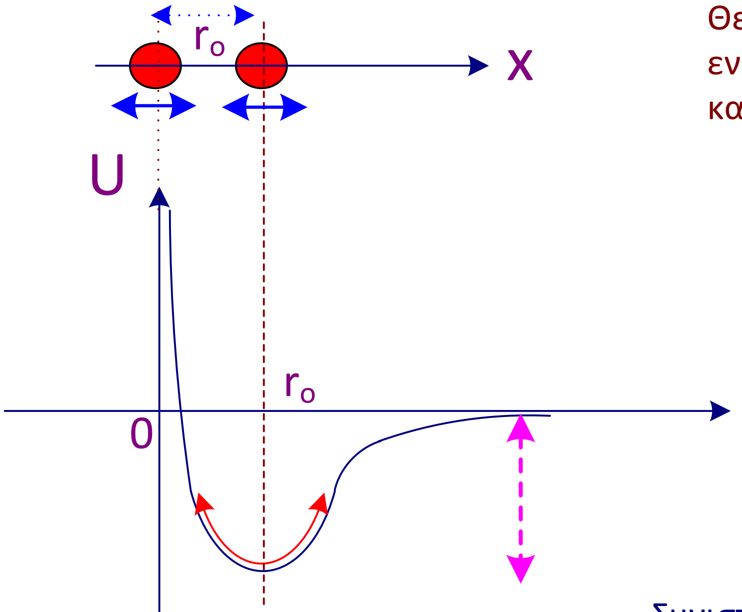


$U_{ολ}(x) = U_1 + U_2$ $\qquad$ $U_{ολ}(x=x_{max}) = \max$

δηλ $\quad F_x = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{max}} = 0$

και $\quad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{max}} < 0$

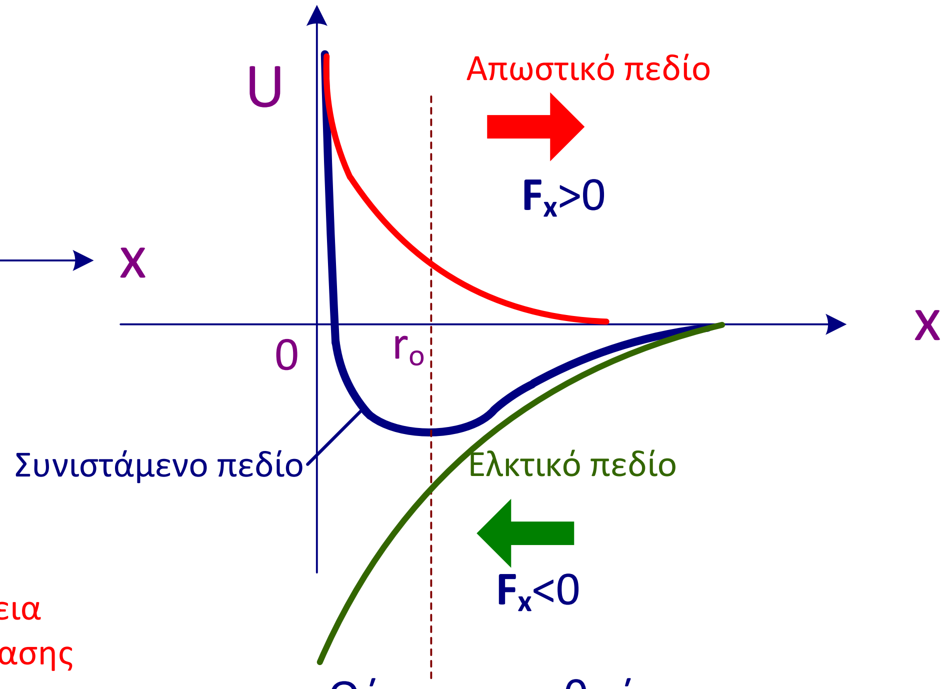
Διατομικό μόριο



Θέση ευσταθούς ισορροπίας

Ενέργεια διάσπασης μορίου

Θεωρείται πως είναι ο συνδιασμός ενός απωστικού που υπερισχύει για $x<r_o$ και ενός ελκτικού πεδίου που υπερισχύει για $x>r_o$



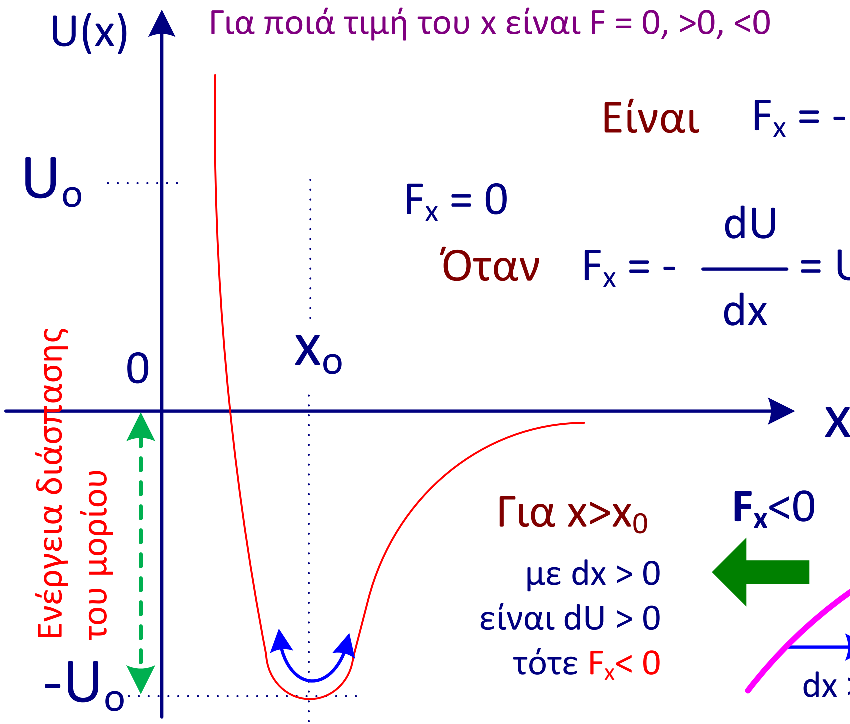
Θέση ευσταθούς ισορροπίας

Στα διατομικά μόρια το δυναμική ενέργεια για την κίνηση του κάθε ατόμου είναι

$$U(x) = U_o\left(\underbrace{e^{-2(x-xo)/b}}_{\text{Απωστική δυν Ενέργ}} - \underbrace{2e^{-(x-xo)/b}}_{\text{Ελκτική δυν. ενέργ}}\right)$$

x_o , b , U_o : σταθερές

Πόση είναι η δύναμη που ασκείται σε κάθε άτομο ;
Για ποιά τιμή του x είναι F = 0, >0, <0



Είναι $F_x = -\dfrac{dU}{dx}$

$F_x = 0$

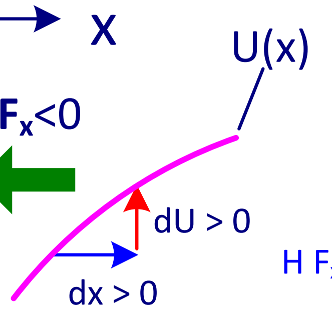
Όταν $F_x = -\dfrac{dU}{dx} = U_o\{(2/b)\, e^{-2(x-xo)/b} - (2/b)\, e^{-(x-xo)/b}\} = 0$

$x - x_o = 0$

$x = x_o \quad F_x = 0$

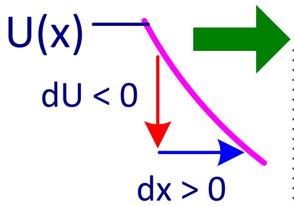
Για $x>x_0$ $F_x<0$

με dx > 0
είναι dU > 0
τότε $F_x< 0$



Η F_x βλέπει πάντα προς το x_0

ευσταθής ισορροπία



$F_x>0$

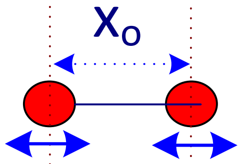
Για $x<x_0$

με dx > 0
είναι dU < 0
τότε $F_x> 0$

Αυτό επιβεβαιώνεται από τη 2η παραγωγο της U

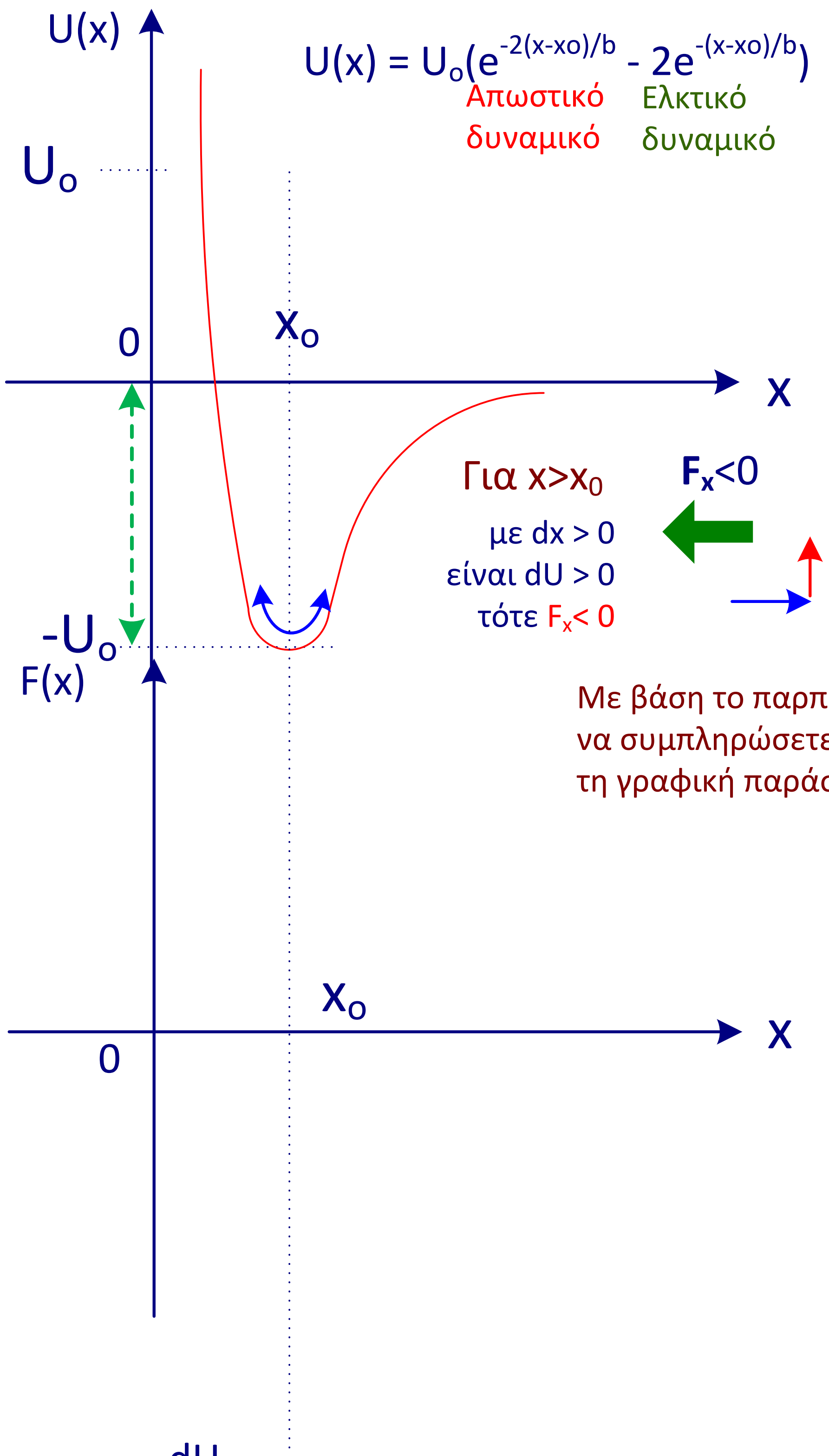
$$\frac{d^2U}{dx^2} = U_o\{(4/b^2)\, e^{-2(x-xo)/b} - (2/b^2)\, e^{-(x-xo)/b}\} = 0$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_o} = U_o 2/b^2 > 0 \text{ άρα } U(x=x_0) = \min$$



περιγράφει διατομικό μόριο

$$U(x) = U_o(e^{-2(x-xo)/b} - 2e^{-(x-xo)/b})$$

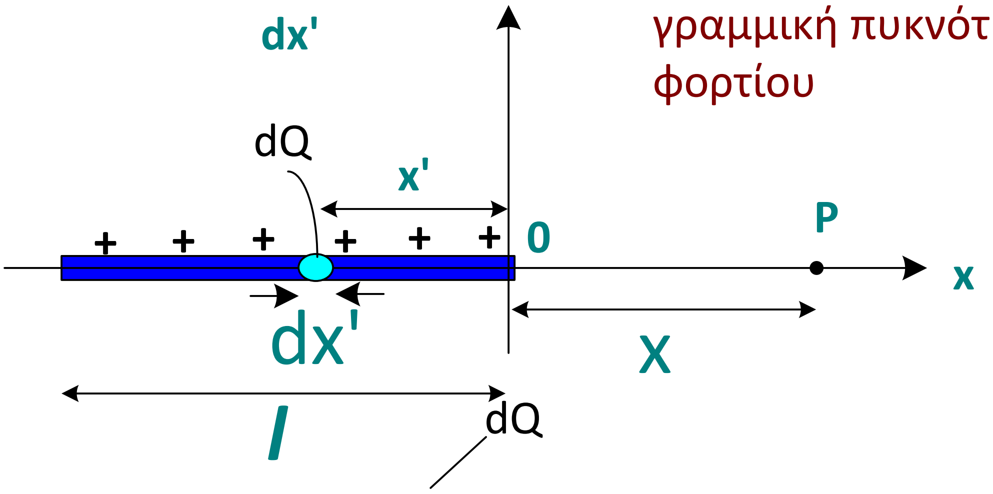


Με βάση το παρπάνω διαγραμμα της U(x) να συμπληρώσετε στο παρακάτω διάγρμμα τη γραφική παράσταση της F(x) Θεωρώντας

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = U_o\{(2/b)\, e^{-2(x-xo)/b} - (2/b)\, e^{-(x-xo)/b}\} = 0$$

Q φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμιμένο σε ράβδο. Να βρεθεί το δυναμικό σε απόσταση x από το άκρο της.



γραμμική πυκνότητα φορτίου

dQ = Q/l dx

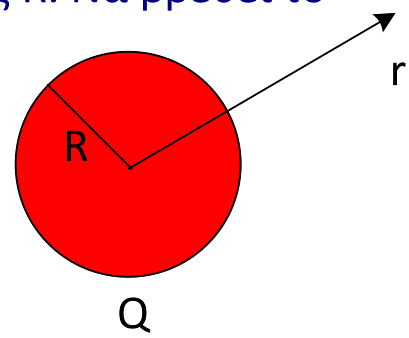
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{(Q/l)\,dx'}{x + x'}$$

$$V(P) = V(x) = \int_{-l}^{0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{(Q/l)\,dx'}{x + x'}$$

εκτείνεται σε όλο το μήκος l

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Q}{l}\,\left[\ln(x + x')\right]_{-l}^{0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Q}{l}\,\ln[x/(x - l)]$$

+Q φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμιμένο σφαίρα ακτίνας R. Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό και εξωτερικό της.



Για $r \geq R$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q}{r^2} \qquad V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Q}{r}$$

Όπως σε σημειακό φορτίο

Για $r \leq R$

Γνωρίζω από προηγούμενη άσκηση το ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας : $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{qr}{R^3}$

(Δες προηγούμενη ενότητα)

Βρίσκω το δυναμικό παρόμοια με σημειακό θετικό φορτίο

$$V(r) - \int_{r}^{R} E\,dr' = V(R) \qquad V(r) - \int_{r}^{R} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Qr'}{R^3}}_{E}\,dr' = V(R)$$

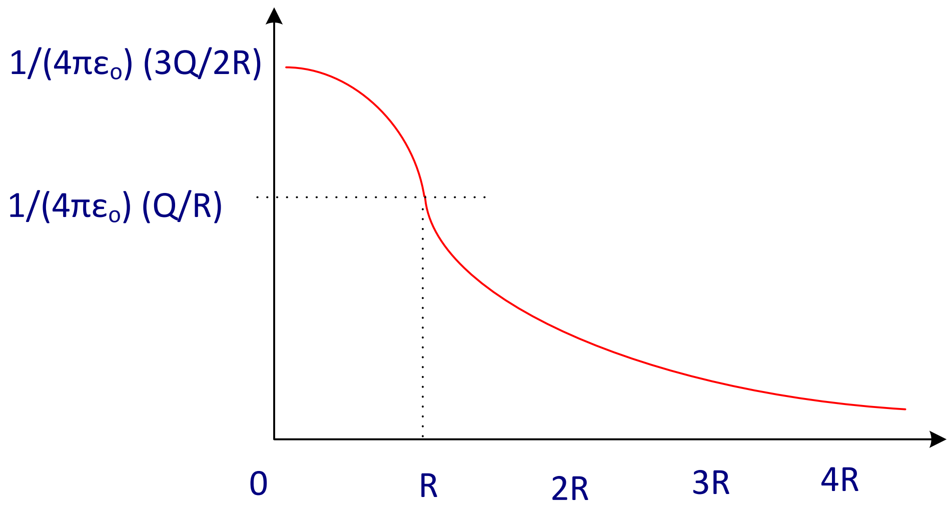
$$V(r) - V(R) = +\int_{r}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Qr'}{R^3}\,dr' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{2R}\right)$$

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{2R}\right) + V(R)$$

$$V(r) = \underbrace{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Qr^2}{2R^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{3Q}{2R}}$$

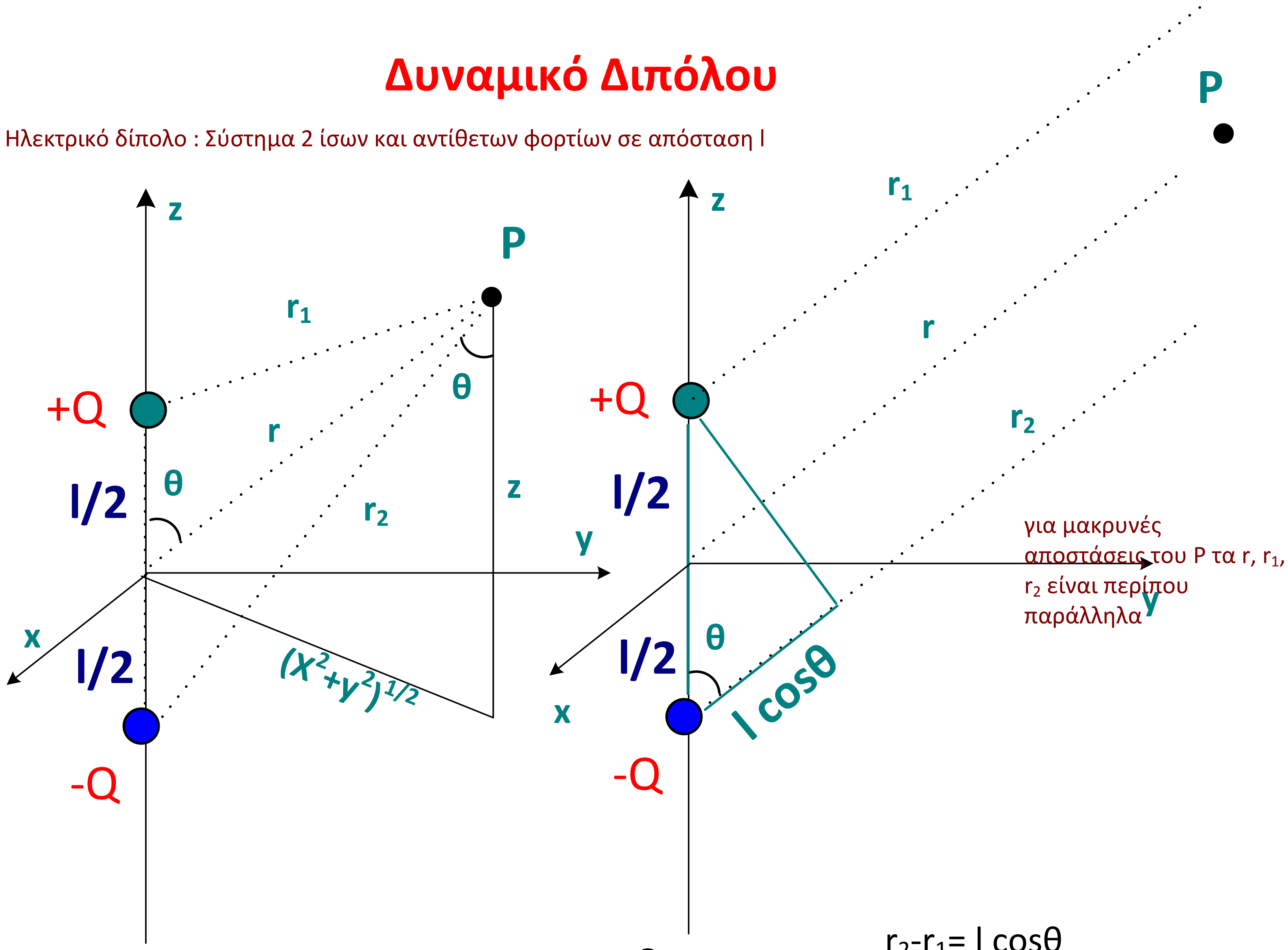
Για r = R

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{Q}{R}$$



Δυναμικό Διπόλου

Ηλεκτρικό δίπολο : Σύστημα 2 ίσων και αντίθετων φορτίων σε απόσταση l



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}$$

$r_2-r_1= l\cos\theta$

$r_1 \cong r_2 \cong r$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{l\cos\theta}{r^2}$$

$p = l\,Q$

ηλεκτρική διπολική ροπή

$$V(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

$$\cos\theta = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

$$V(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_o}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Διερεύνηση — το P είναι

Για θ=90° ή z=0 — στο επιπεδο xy

Για z>0 — $V(r) > 0$ — επάνω από το επιπεδο xy

Για z<0 — $V(r) < 0$ — κάτω από το επιπεδο xy

Βαθμίδα δυναμικού

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_x/q = -\frac{dU/q}{dx}$$

Διαιρώ με δοκιμαστικό φορτίο

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Βαθμίδα δυναμικού στη διεύθυνση x

Γενικά στις 3 διαστάσεις

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x$$

το μείον (-) γιατί το Ex έχει φορά κατά τη διεύθυνση όπου το V ελλατώνεται

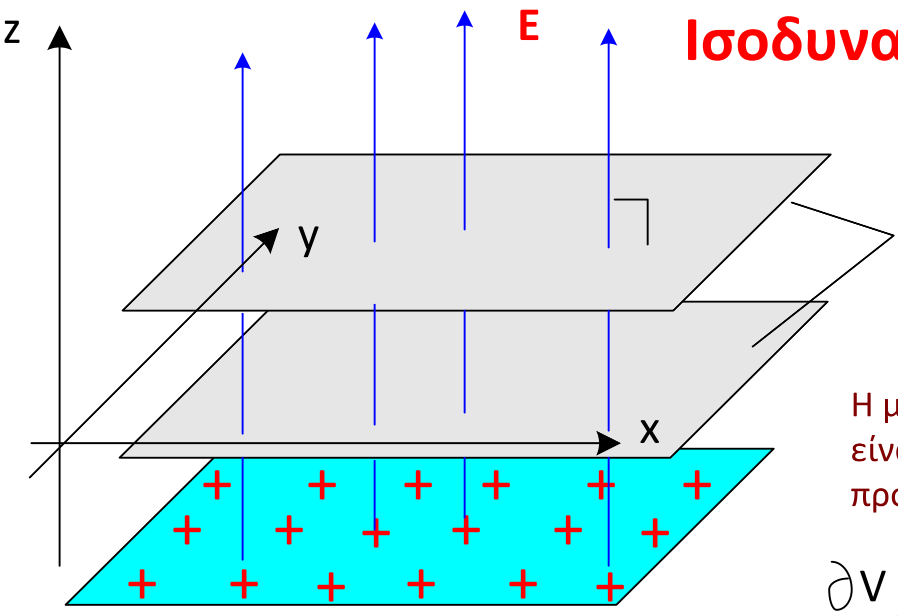
$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = -E$$

Βαθμίδα δυναμικού

Ισοδυναμικές επιφάνειες

Όπου το δυναμικό είναι σταθερό



Ισοδυναμικές επιφάνειες κάθετες στο Ε

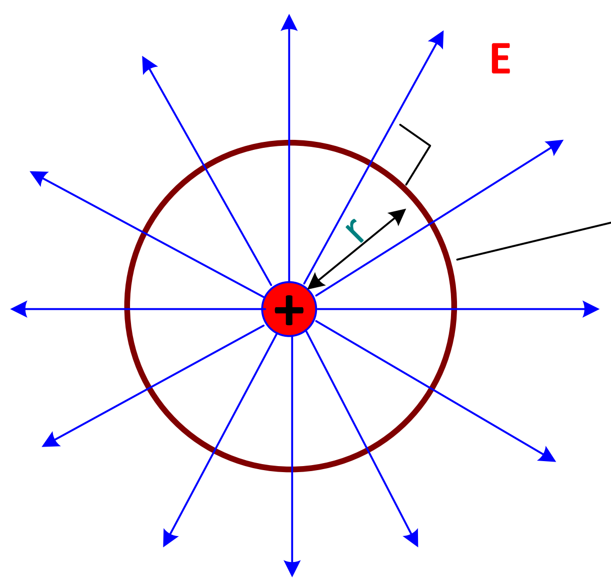
Η μεταβολή του V κατά τη διεύθυνση x ή y είναι 0 γιατί το Ε είναι κάθετο χωρίς να έχει προβολή στα ισοδυναμικά επίπεδα δηλ.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = E$$

Υπάρχει μόνο η μεταβολή του V κατά το z = E_Z



Ισοδυναμική επιφάνεια σημειακού φορτίου είναι η επιφάνεια σφαίρας που είναι πάντα κάθετη στο Ε

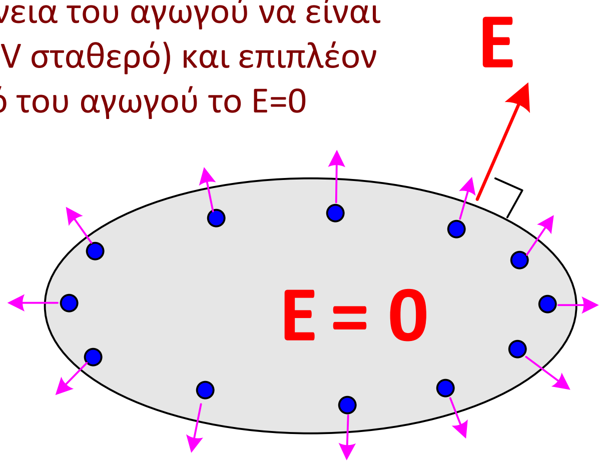
Πως βρίσκω τις ισοδυναμικές επιφάνειας-γραμμές

Σχεδιάζω τις γραμμές-επιφάνειες που είναι κάθετες στο ηλεκτρικό πεδίο

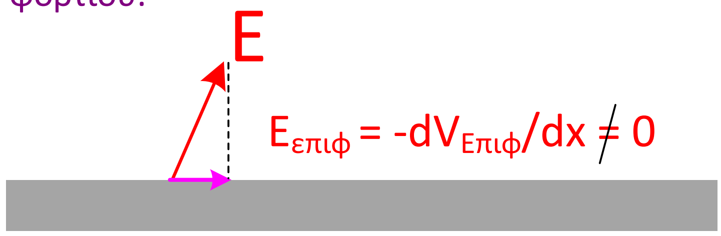
Πρόσθετα ηλεκτρικά φορτία σε αγωγώγιμη πλάκα κατανέμονται στην επιφάνεια

τα πρόσθετα ελεύθερα ηλεκτρόνια λόγω άπωσης κατανέμονται και ισορροπούν στην επιφάνεια και ιδιαίτερα σε τυχόν άκρα του αγωγού ώστε η επιφάνεια του αγωγού να είναι ισοδυναμική (V σταθερό) και επιπλέον στο εσωτερικό του αγωγού το E=0

Η παράλληλη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του αγωγού είναι μηδέν

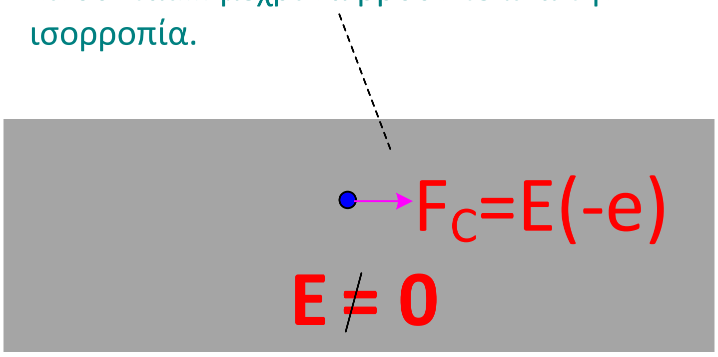


Δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετες στην επιφάνεια, διαφορετικά θα υπήρχε συνιστώσα του ηλεκτ πεδίου στη επιφάνεια του αγωγού και δεν θα υπήρχε ισορροπία φορτίου.



Άρα $V_{E\pi\iota\varphi}$ όχι σταθερό Και επομένως τα επιφανειακά ηλεκτρόνια θα κινούντο

Αν στο εσωτερικό δεν είναι E=0 τότε δεν μπορει να υπάρξει ισορροπία και τα ελεύερα ηλεκτρόνια με την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου θα έπρεπε να κινούνται…. μέχρι να βρουν τελικά την ισορροπία.



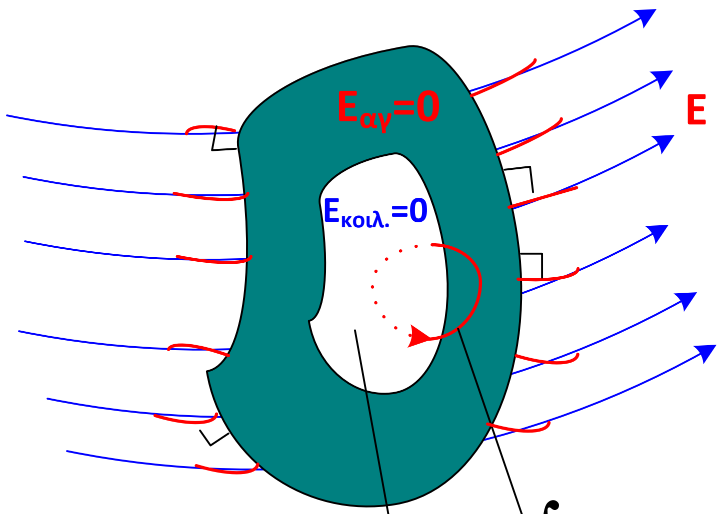
Κλοβός Faraday

Ηλεκτροστατική δύναμη
Διατηρητική δύναμη

Ηλεκτροστατικό πεδίο
Διατηρητικό πεδίο

$$\oint F\,dl = 0 = \oint (F/q)\,dl = \oint E\,dl = 0$$

Κενή κοιλότητα σε αγωγό



οι ηλ. δυναμικές γραμμές πρέπει να είναι κάθετες στην επιφάνεια του αγωγού

γιατί λόγω ισορροπίας δεν υπάρχει συνιστώσα του Ε παράλληλη με την επιφάνεια του αγωγού

$E_{κοιλ}$=0

$$0 = \oint E\,dl = 0 = \int \cancelto{0}{E_{αγ}}\,dl + \int \cancelto{0}{E_{κοιλ}}\,dl$$

για κλειστή τυχαία διαδρομή

στη διαδρομή στον αγωγό (συνεχής γραμμή)

στη διαδρομή στην κοιλότητα (συνεχής γραμμή)

Κλοβός Faraday

Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας διατηρείται σε μηδενικο ηλεκτρικό πεδίο ανεξάρτητα του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου και λειτουργεί σαν ηλεκτρική θωράκιση.