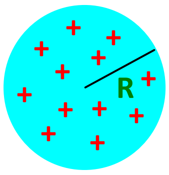
ΠΥΚΝΩΤΕΣ

Πυκνωτής : Μία διάταξη για την αποθήκευση φορτίου.

Καταναλώνεται ενέργεια για την συνάθροιση του φορτίου
άρα αποθυκεύεται ηλεκτρική δυναμική ενέργεια

Δυναμικό μεταλλικής σφαίρας



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R}$$

V ανάλογο του Q

ισχύει γενικότερα
για οποιοδήποτε
αγωγό

$$\mathbf{Q = C\,V}$$

C : η σταθερά αναλογίας

χωρητικότητα

Χωρητικότητα μεγάλη όταν αποθηκεύεται
μεγάλο φορτίο υπό χαμηλό δυναμικό

$$V = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{R}}_{1/C}\,Q$$

$C = 4\pi\varepsilon_o R$

C σφαίρας ανάλογος της R

Μονάδες : $C = \frac{Q}{V}$ $\frac{1\ C}{1\ V} = 1\ F$

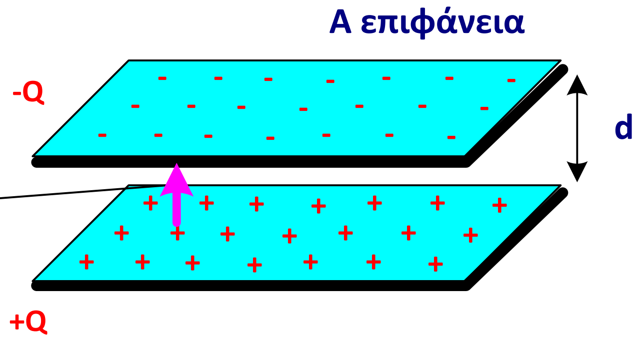
1 μF
1 pF

Η C της Γης (σφαίρα) είναι : $C = 7.1 \times 10^{-5}$ F
απαιτείται μόνο 10^{-3} Coulomb για να αλλάξει το V της Γης κατά 1Volt
Επειδή διαφορές δυναμικού έχουν σημασία **θεωρούμε : V(Γης)=0**

Χωρητικότητα ζεύγους παράλληλων πλακών

$$Q = C\,\Delta V$$

η διαφορά δυναμικού των πλακών



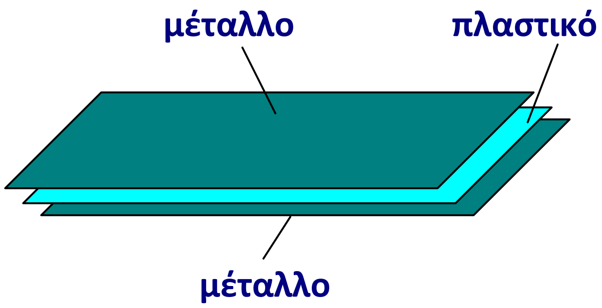
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = -E$$

η φορά του Ε είναι αυτή που η διαφορά δυναμικού ΔV των πλακών ελλατώνεται

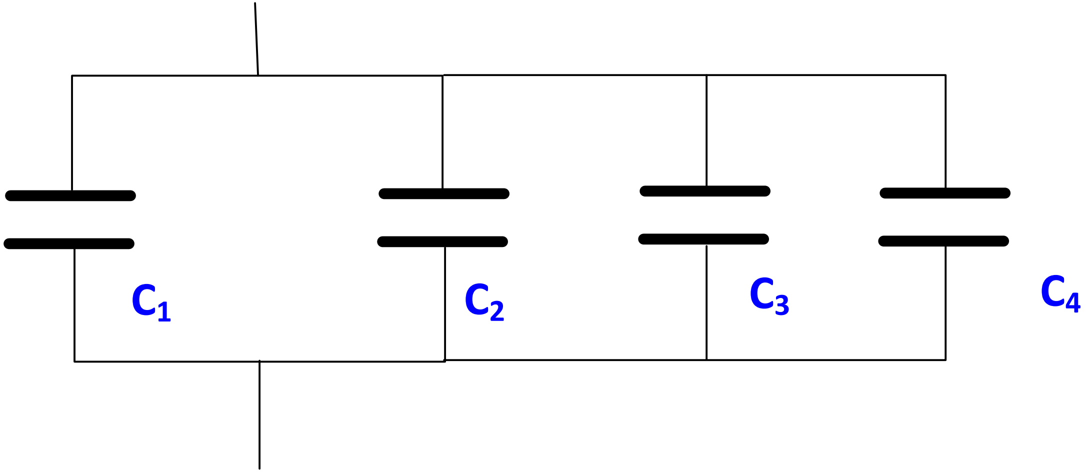
$$\sigma = \frac{Q}{A} \qquad E = \frac{Q}{\varepsilon_o A} \qquad E = \frac{\Delta V}{d}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/\varepsilon_o A} = \frac{\varepsilon_o A}{d}$$



Συνδυασμός πυκνωτών

Παράλληλος



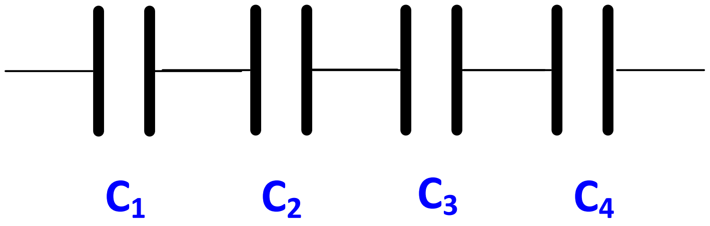
ΔV = σταθερό

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots$$

$$C\Delta V = C_1\Delta V_1 + C_2\Delta V_2 + \ldots$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots.$$

Σε σειρά



Q = σταθερό

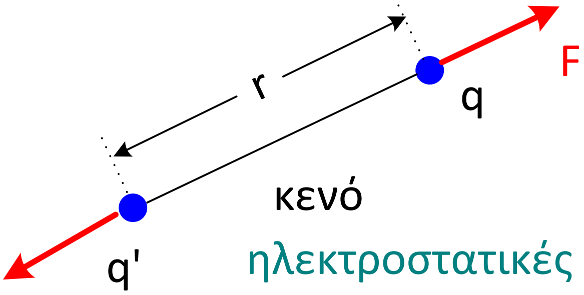
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots$$

$$Q/C = Q_1/C_1 + Q_2/C_2 + Q_3/C_3 + \ldots.$$

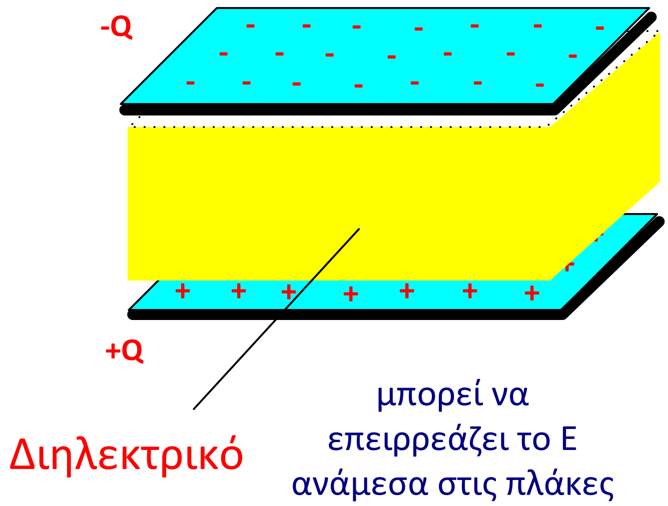
$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \ldots.$$

Διηλεκτρικά

μονωτικά υλικά που μπορούν να ελλατώσουν δραστικά την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου



ηλεκτροστατικές αλληλεπιδράσεις στο κενό

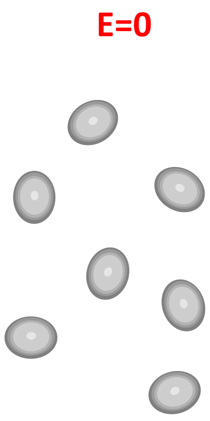


μπορεί να επιρρεάζει το E ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή

Στα διηλεκτρικά τα ηλεκτρόνια είναι δέσμια

Μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο τα ηλεκτρικά φορτία μπορούν να κινηθούν ανεπαίσθητα

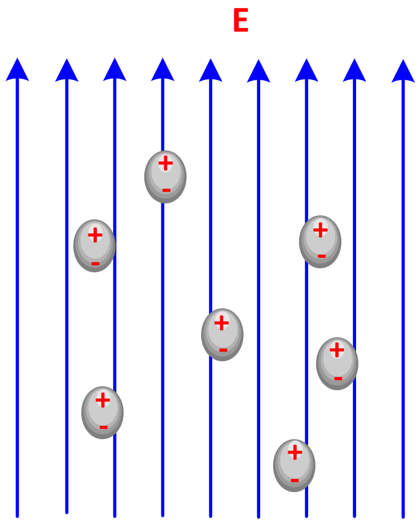
Προκαλείται διαχωρισμός των ηλεκτρικών φορτίων και προσανατολισμός τους.



p = 0

ηλεκτρική διπολική ροπή

Διηλεκτρικό με p=0 και E=0



p = 0 ➜ **$p \neq 0$**

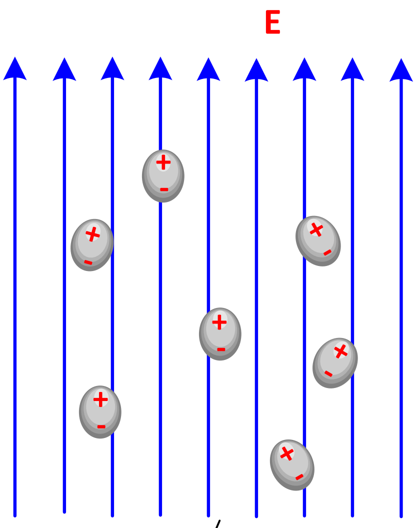
με E = 0 με $E \neq 0$

Μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο τα ηλεκτρικά φορτία κινούνται και τα μόρια παραμορφόνονται και προσανατολίζονται

Γραμμικό διηλεκτρικό p = k E

(p ανάλογο του E)

γυαλί, πολυαιθυλένιο



$p \neq 0$

με E = 0

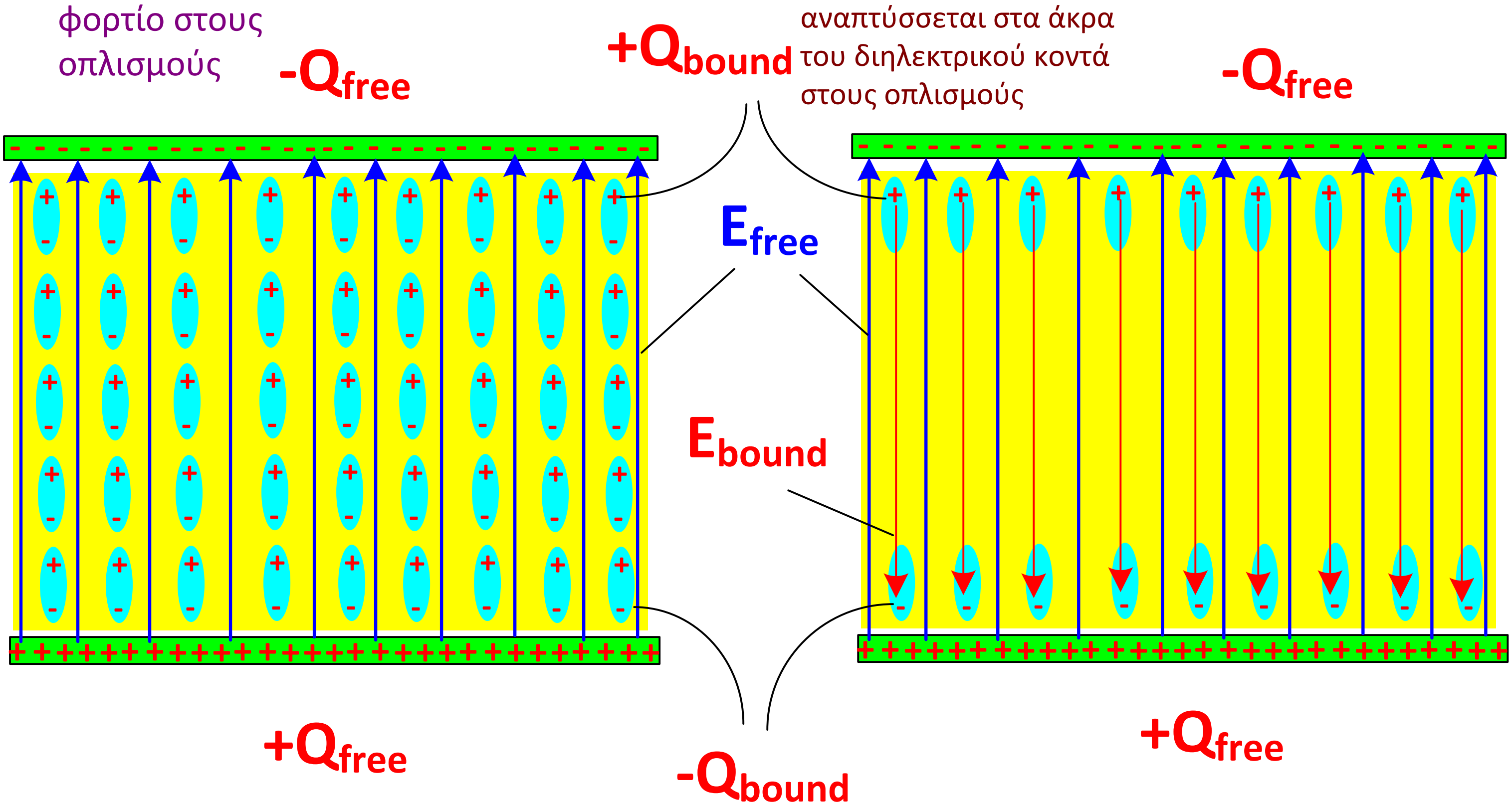
Μερικός προσανατολισμός υπαρχόντων διπολικών ροπών του διηλεκτρικού. Οι θερμικές κινήσεις αντιτίθενται στην ευθυγράμμιση των διπόλων

νερό, CO_2

Διηλεκτρικά μέσα σε πυκνωτή

Q_{free} ελεύθερο φορτίο στους οπλισμούς

Q_{bound} δέσμιο φορτίο που αναπτύσσεται στα άκρα του διηλεκτρικού κοντά στους οπλισμούς



η ηλεκτρικές διπολικές ροπές p των διπόλων προσανατολίζονται παράλληλα με το E

Στο εσωτερικό του διηλεκτρικού τα φορτία των διπόλων αλληλοεξουδετερόνονται και υπάρχει περίσσεια (δεσμικού) φορτίου Q_{bound} στα άκρα (πλάκα διηλεκτρικού πολωμένη)

$$E = E_{free} - E_{bound}$$

$$E = \frac{1}{\kappa} E_{free}$$

κ>1 (σχετική) διηλεκτρική σταθερά

η κ δείχνει πόσες φορές το E ελλατώνεται μέσα στο διηλεκτρικό

τα μέταλα θεωρούνται με

$\kappa = \infty$

και έτσι είναι E=0 στο εσωτερικό τους

$$\Delta V = E\, d$$

$$V = \frac{1}{\kappa} \Delta V_o$$

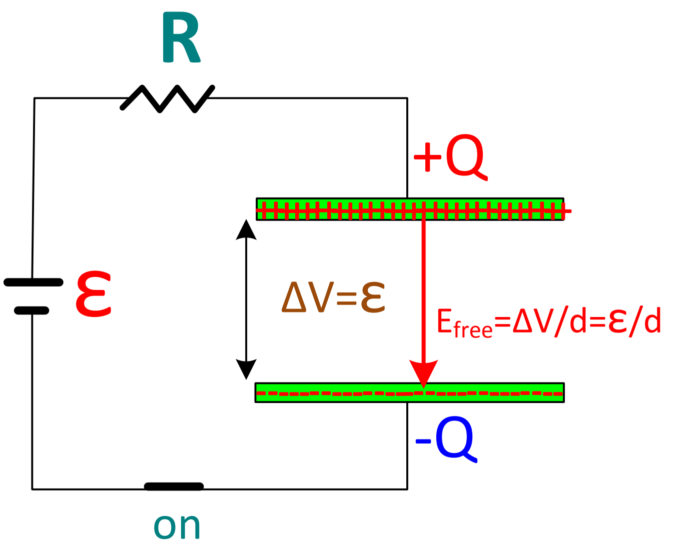
$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad C = \kappa \frac{Q}{\Delta V_o} = \kappa C_o$$

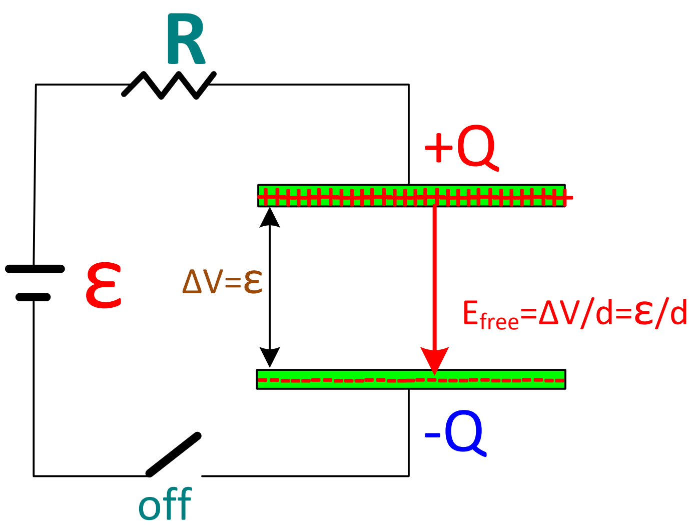
$$C = \kappa \frac{\varepsilon_o A}{d}$$

Η χωρητικότητα C αυξάνεται κ φορές με το διηλεκτρικό

Εισαγωγή διηλεκτρικού μέσα σε πυκνωτή με το διακόπτη off

Φορτίο σταθερό
(δεν μπορεί να μετακινηθεί)





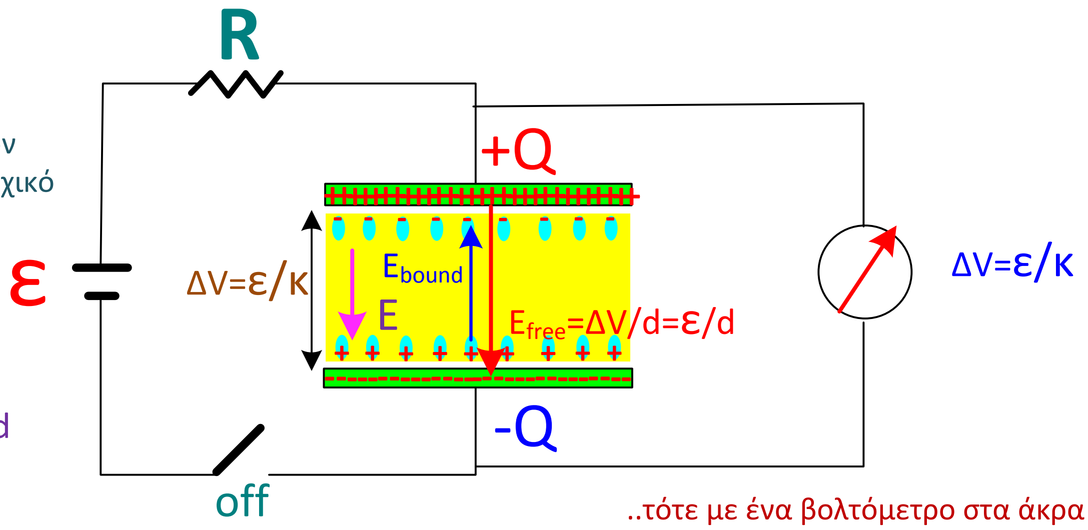
Όταν φορτιστεί ο πυκνωτής, τότε ισχύουν τα εξής:

$C_o=\varepsilon_o A/d=Q/\Delta V=Q/\varepsilon$

$Q=\varepsilon\ \varepsilon_o A/d$

Αφού φορτιστεί ο πυκνωτής και ανοίξει ο διακόπτης, τότε τα φορτία παραμένουν σταθερά στους οπλισμούς του πυκνωτή γιατί δεν μπορούν να μετακινηθούν.

Όταν εισάγουμε διηλεκτρικό (διηλεκτρικής σταθερά κ) τότε λόγω των δέσμιων φορτίων κοντά στους οπλισμούς του πυκνωτή το αρχικό ηλεκτρικό πεδίο E_{Free} εξασθενεί κ φορές



$E=E_{free}-E_{bound}=E_{Free}/\kappa=(\varepsilon/\kappa)/d=\Delta V/d$

Άρα $\Delta V=\varepsilon/\kappa$

$C=Q/\Delta V=Q/(\varepsilon/\kappa)=\kappa C_o$

$C=\kappa C_o$

Δηλ. η χωρητικότητα αυξάνεται κ φορές λόγω του διηλεκτρικού

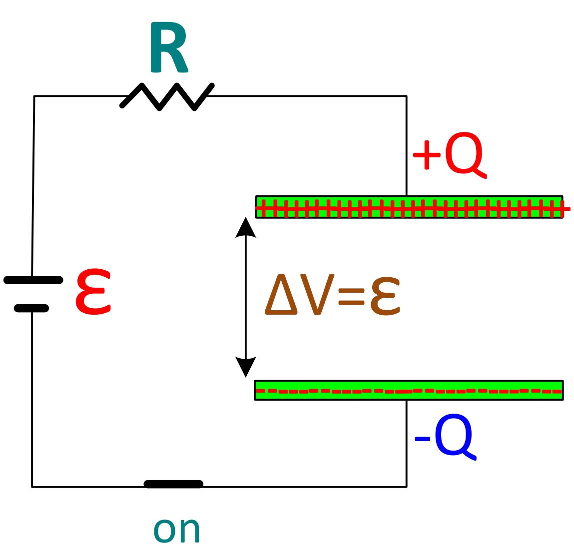
..τότε με ένα βολτόμετρο στα άκρα του πυκνωτή θα μετρήσω το ΔV και θα το βρω

$\Delta V=\varepsilon/\kappa$

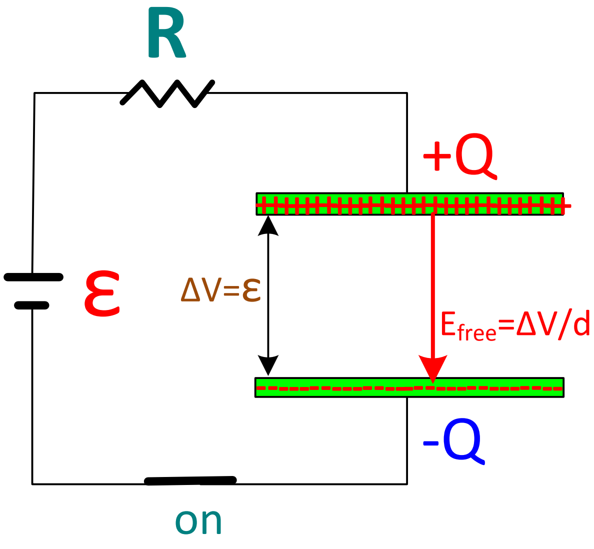
Όμως διατηρώντας το διακόπτη off καθώς εισάγουμε το διηλεκτρικό, η χωρητικότητα μεγαλώνει με μείωση της $\Delta V=\varepsilon/\kappa$ υπό σταθερό φορτίο Q.

Εισαγωγή διηλεκτρικού μέσα σε πυκνωτή με το διακόπτη on

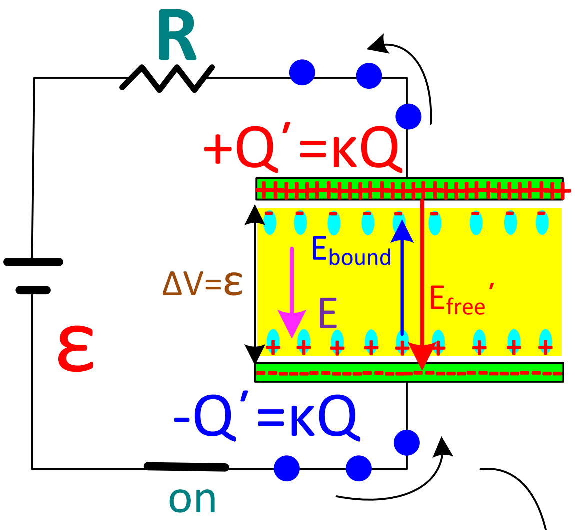
ΔV σταθερό
(αυτό της μπαταρίας ε)



$C_o = \varepsilon_o A/d = Q/\Delta V = Q/\varepsilon$



Αφού φορτιστεί ο πυκνωτής, τότε υπάρχει ισορροπία. Έτσι επιπλέον φορτία δεν μπορούν να μετακινηθούν με τη βοήθεια της μπαταρίας προς στους οπλισμούς λόγω της αντίθετης πολικότητας της ΔV του πυκνωτή.



Όταν εισάγουμε το διηλεκτρικό (διηλεκτρικής σταθερά κ) με κλειστό το διακόπτη, τότε λόγω των δέσμιων φορτίων κοντά στους οπλισμούς του πυκνωτή, το ΔV στα άκρα του πυκνωτή στιγμιαία ελλατώνεται. **Έτσι στιγμιαία επιπλέον ηλεκτρόνια κινούναι και φορτίζεται ο πυκνωτής σε μεγαλύτερο φορτίο Q΄.**

Άρα $C = Q'/\Delta V = Q'/\varepsilon$

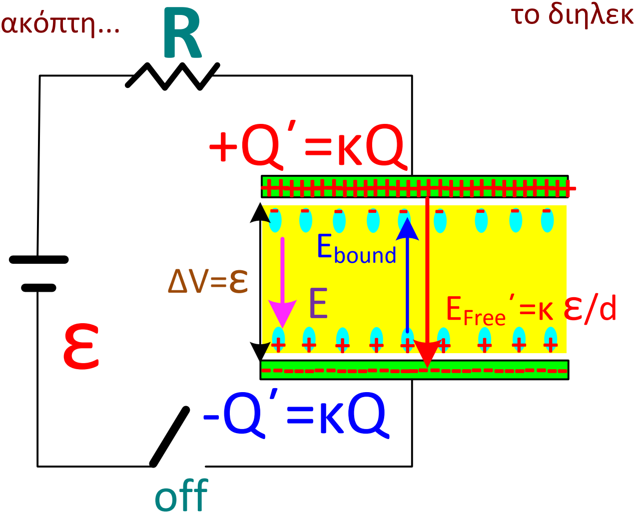
Επομένως για να βρώ το C χρειάζεται να βρώ το Q΄ του πυκνωτή.

Ισχύει $E = E_{free}' - E_{bound} = E_{Free}'/\kappa = \Delta V/d = \varepsilon/d$ Άρα $E_{Free}' = (\kappa\,\varepsilon)/d = \Delta V'/d$

Όμως ποιο είναι το E_{Free}'?

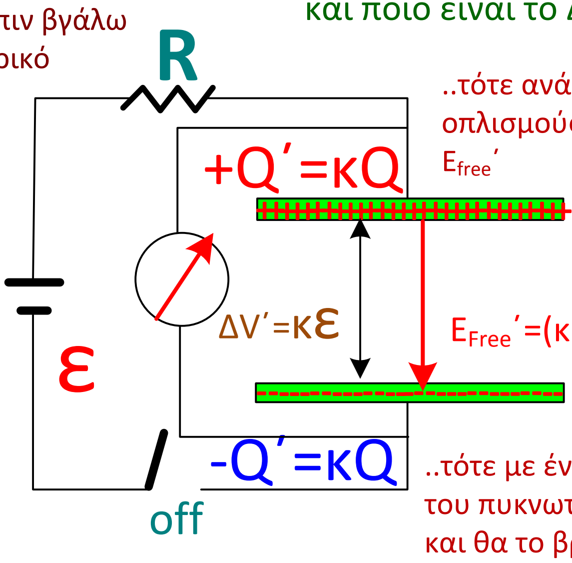
και ποιο είναι το ΔV΄?

το E_{Free}' θα βρεθεί αν ανοίξω το διακόπτη...



..οπότε το Q΄ παραμένει στο πυκνωτή..

...και κατόπιν βγάλω το διηλεκτρικό



..τότε ανάμεσα στους οπλισμούς θα υπάρχει το E_{free}'

$E_{Free}' = (\kappa\,\varepsilon)/d = \Delta V'/d$

$\Delta V' = \kappa\varepsilon$

..τότε με ένα βολτόμετρο στα άκρα του πυκνωτή θα μετρήσω το ΔV΄ και θα το βρω

$\Delta V' = \kappa\varepsilon$

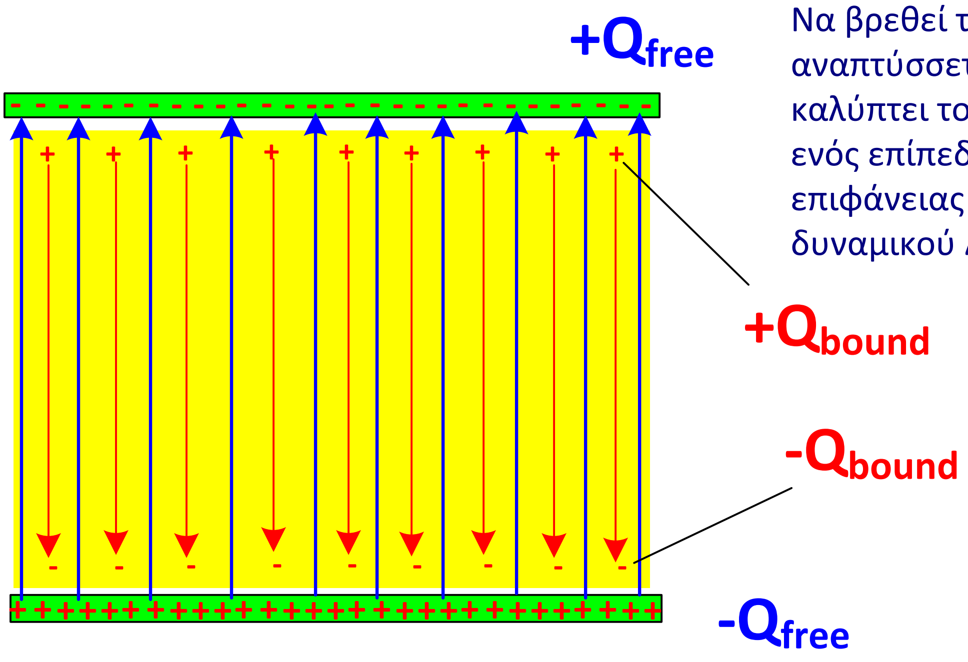
Άρα $C_o = Q'/(\kappa\varepsilon)$

Όμως αρχικά πριν βάλω το διηλεκτρικό είχα $C_o = Q/\varepsilon$ επομένως $Q' = \kappa Q$

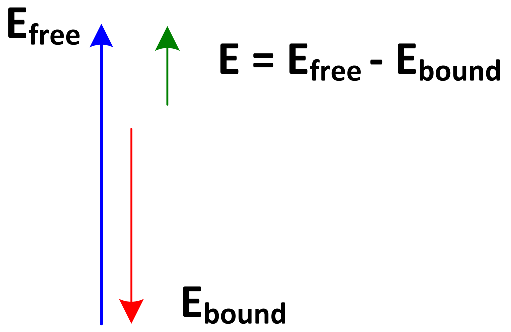
Άρα $C = Q'/\varepsilon = \kappa Q/\varepsilon = \kappa C_o$

Δηλ. επιβεβαιώνεται ότι η χωρητικότητα αυξάνεται κ φορές λόγω του διηλεκτρικού

Όμως διατηρώντας on το διακόπτη καθώς εισάγουμε το διηλεκτρικό, η χωρητικότητα μεγαλώνει λόγω της αύξησης του φορτίου σε Q΄=κQ υπό σταθερή ΔV=ε



Να βρεθεί το δέσμιο φορτίο Q_{bound} που αναπτύσσεται σε διηλεκτρικό σταθεράς κ που καλύπτει το χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή χωρητικότητας C επιφάνειας A όταν έχει φορτιστεί με διαφορά δυναμικού ΔV



$$E = E_{free} - E_{bound}$$

$$\frac{E_{free}}{\kappa} = E = E_{free} - E_{bound}$$

$$\sigma_{free} = Q_{free}/A=CV/A$$

$$\frac{\sigma_{free}}{\varepsilon_o \kappa} = \frac{\sigma_{free}}{\varepsilon_o} - \frac{\sigma_{bound}}{\varepsilon_o}$$

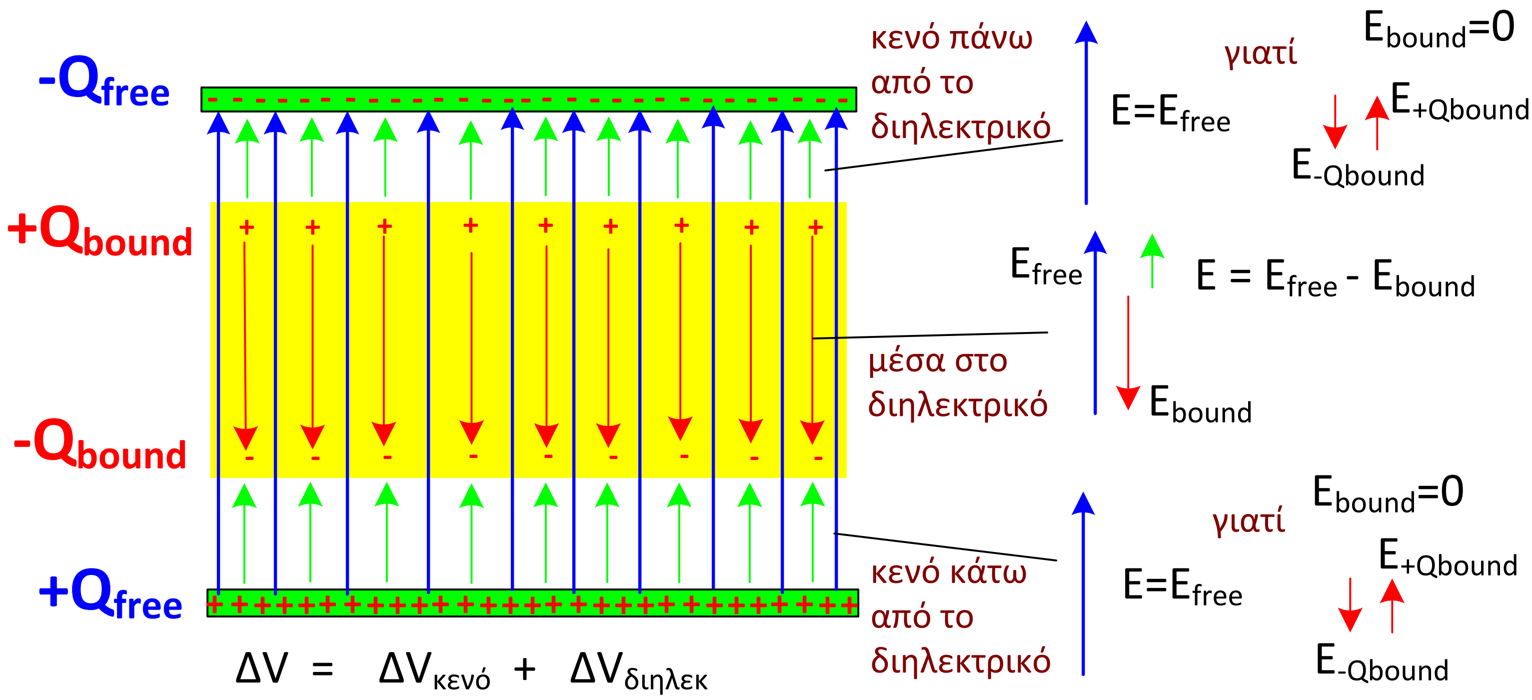
$$\sigma_{bound} = -\frac{\kappa-1}{\kappa}\sigma_{free}$$

$$\sigma_{bound} = Q_{bound}/A$$

$$=(\kappa-1)/\kappa\ (CV/A)$$

Μερική κάλυψη από το διηλεκτρικό

Να βρεθεί η χωρητικότητα C επίπεδου πυκνωτή όταν το διηλεκτρικό σταθεράς κ καλύπτει μερικώς (απόσταση d') το χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς που απέχουν συνολκή απόσταση d .



$$\Delta V = \Delta V_{\kappa\varepsilon\nu\acute{o}} + \Delta V_{\delta\iota\eta\lambda\varepsilon\kappa}$$

$$\Delta V = E_{free}\,(d-d') + \frac{1}{\kappa}E_{free}d'$$

$$\Delta V = [\,\overbrace{1-(1-1/k)\,d'/d}^{\alpha<1}\,]\,\overbrace{E_{free}d}^{\Delta V_0}$$

$$C_0 = \frac{Q_{free}}{\Delta V_0}$$

$$C\,' = \frac{Q_{free}}{\Delta V}$$

$$C = \frac{C_0}{1-(1-1/k)\,d/d'}$$

$$C = \frac{C_0}{\alpha}$$ αφού $\alpha<1$

$$C > C_0$$

Νόμος του Gauss στα διηλεκτρικά.

$$\varepsilon_o \int_1^2 E\, dS = Q_{tot} = Q_{free} + Q_{bound}$$

είναι γνωστό

δεν προσδιορίζεται εύκολα

Νόμος του Gauss χωρίς διηλεκτρικό.

$$\varepsilon_o \int_1^2 E_{free}\, dS = Q_{free}$$

Ο Νόμος του Gauss μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού .

Η εισαγωγή του διηλεκτρικού δεν επειρρεάζει τη κατανομή του Q_{free} αν υπάρχει συμμετρία (π.χ. επίπεδα, σφαιρικά, κυλινδρικά διηλεκτρικά)

Μόνο η ένταση του Ε αλλάζει. $E = E_{free} / \kappa$

Ο νόμος του Gauss $$\varepsilon_o \int_1^2 E_{free}\, dS = Q_{free}$$

γίνεται $$\varepsilon_o \int_1^2 \kappa E\, dS = Q_{free}$$

Πεδίο ηλεκτρικής μετατόπισης $\mathbf{D = \varepsilon_o \kappa E}$

Γενικευμένη μορφή του Νόμου του Gauss $$\int_1^2 D\, dS = Q_{free}$$

ισχύει ακόμα και για μη γραμμικά διηλεκτρικά

Ενέργεια αποθυκευμένη σε πυκνωτή

Επίπεδος πυκνωτής χωρίς διηλεκτρικό.

Ενέργεια δύο επιπέδων πλακών .

$$U = \frac{1}{2} V_1 \ (-Q) + \frac{1}{2} V_2 \ Q$$

$$= \frac{1}{2} Q \,(V_2 - V_1)$$

$$U = \frac{1}{2} Q \,\Delta V \qquad U = \frac{1}{2} C \,(\Delta V)^2 \qquad U = \frac{1}{2} Q^2 / C$$

Επίπεδος πυκνωτής με διηλεκτρικό.

το διηλεκτρικό με τα Q_{bound} συνεισφέρει στην ενέργεια.

Δεν μας ενδιαφέρει η συνολική ενέργεια αλλά η ενέργεια φόρτισης και εκφόρτισης του πυκνωτή.

Η ενέργεια φόρτισης από q=q σε q=q+dq είναι : $dU = \overset{V}{\frac{q}{C}} \, dq$

Η ενέργεια φόρτισης από q=0 σε q=Q είναι :

$$U = \int_0^Q dU = \int_0^Q \frac{q}{C} \, dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \, dq = \frac{1}{2} Q^2 / C$$

Καθώς αυξάνει το φορτίο του πυκνωτή το φορτίο στο διηλεκτρικό πολώνεται ισχυρότερα. Η συνολική ενέργεια υπολογίζεται με την U.

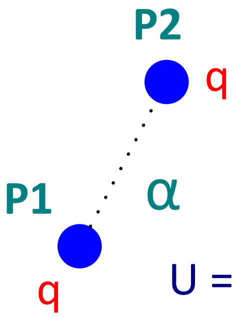
Πυκνότητα ενέργειας στο διηλεκτρικό.

$u = (1/2)\, \kappa\, \varepsilon_o\, E^2$

(χωρίς διηλεκτρικό) $u = (1/2)\, \varepsilon_o\, E^2$

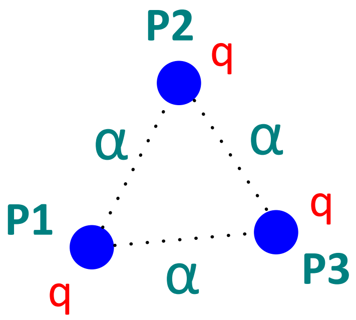
Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια :
(i) 2 φορτίων (q, q) σε απόσταση α.
(ii) 3 φορτίων (q, q, q) που ισαπέχουν μήκος α.
(iii) 4 φορτίων (q, q, q, q) που είναι στις κορυφές τετραγώνου πλευράς α.

$$U = \frac{1}{2}\, V_{other}(1)\; q_1 \;+\; \frac{1}{2}\, V_{other}(2)\; q_2 \;+\; \frac{1}{2}\, V_{other}(3)\; q_3 \;+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$



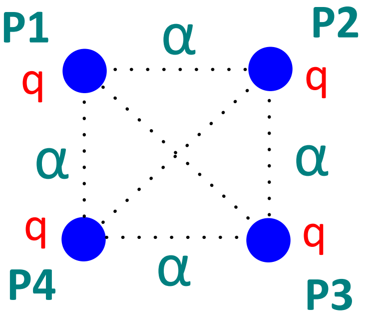
$U = V_1 q$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q\,q}{\alpha}$$



$$U = 3\,\frac{1}{2}\,V_{other}\,q$$

$$V_{other} = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q}{\alpha}$$



$$U = 4\,\frac{1}{2}\,V_{other}\,q$$

$$V_{other} = 2\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q}{\alpha} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q}{(2\alpha^2)^{1/2}}$$

Να βρεθεί η χωρητικότητα 2 ομόκεντρων σφαιρών (r_1, r_2) από μεταλλικό έλασμα όταν ο μεταξύ των χώρος είναι πληρωμένος με αέριο διηλεκτρικής σταθεράς κ.

Ο Νόμος του Gauss για τη σφαίρα ακτίνας r για τη περίπτωση που δεν υπάρχει διηλεκτρικό.

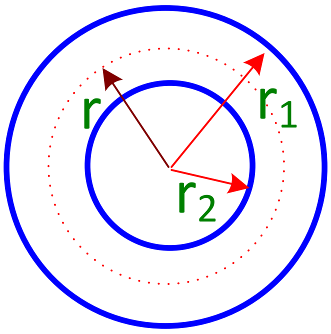
Θεωρώ σφαίρα (r) που περικλείει την r_1

η ηλεκτρική ροή Φ από την επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r

$\Phi = Q_{Free}/\varepsilon_o$

Q_{Free} : το φορτίο κάθε σφαίρας

$\Phi = E_{free}\, 4\pi r^2 = Q_{free}/\varepsilon_o$



Το ηλεκτρικό πεδίο E ανάμεσα στις 2 σφαίρες με το διηλεκτρικό.

$E_{free}\,/\kappa = E$

$$\kappa\, E\, 4\pi r^2 = Q_{free}/\varepsilon_o$$

$$\Delta V = \int_{r1}^{r2} \underbrace{\frac{1}{4\pi\kappa\varepsilon_o}\,\frac{Q_{free}}{r^2}}_{E}\, dr = \frac{Q_{free}}{4\pi\kappa\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

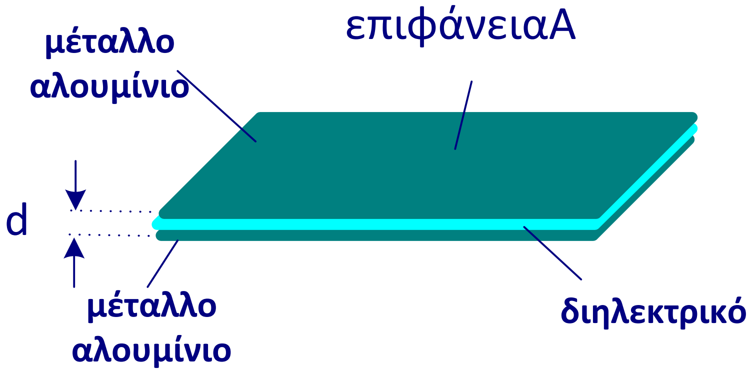
$$C = \frac{Q_{free}}{\Delta V} = \frac{4\pi\kappa\varepsilon_o}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

με κ=1 αντιστοιχεί στη περίπτωση με απουσία διηλεκτρικού.

άρα η παρουσία διηλεκτρικού αυξάνει τη C

Δύο επίπεδοι πυκνωτές αποτελούμενοι από δύο φύλλα αλουμινίου επιφάνειας $A=0.75m^2$ τα οποία διαχωρίζονται από ένα φύλλο διηλεκτρικού πολυαιθυλένιο (κ=2,3) ή βακελίτη (κ=5) πάχους 2×10^{-5} m αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε σε κάθε πυκνωτή διαφορά δυναμικού 30V.

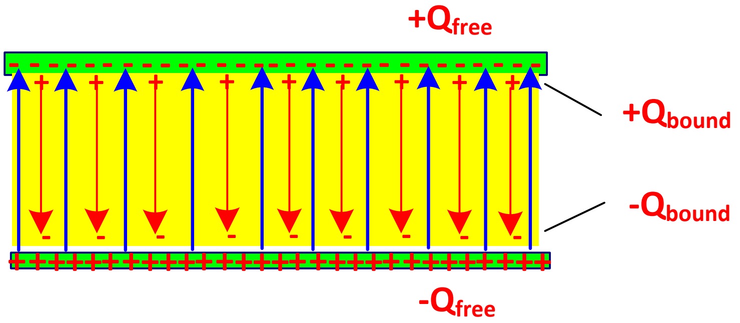
(α) Ποιός πυκνωτής θα έχει τη μεγαλύτερη χωρητικότητα και πόση είναι ;
(β) Σε ποιόν πυκνωτή θα εφαρμοστεί το μεγαλύτερο φορτίο στο κάθε ένα φύλλο του αλουμινίου και πόσο θα είναι;
(γ) Σε ποιόν πυκνωτή θα εφαρμοστεί το μεγαλύτερο ηλεκτρικό πεδίο αναμέσα στα φύλλα του αλουμινίου ;
(δ) Πόσο θα είναι το δέσμιο φορτίο στο διηλεκτρικό του κάθε πυκνωτή;



(α) Η χωρητικότητα αυξάνεται με το κ

Άρα ο πυκνωτής με το βακελίτη
θα έχει τη μεγαλύτερη C

$$C = \frac{\kappa\, \varepsilon_o A}{d}$$



$$C_{\pi o\lambda\upsilon\alpha\iota\theta} = 7.6 \times 10^{-7} \text{ F}$$

$$C_{\beta\alpha\kappa\varepsilon\lambda} = 1.7 \times 10^{-6} \text{ F}$$

(β) Το Q_{free} εξαρτάται από το C

$$Q_{free} = C\, \Delta V$$

Πολυαιθυλένιο $Q_{free} = 2.3 \times 10^{-5}$ Coulomb

Βακελίτης $Q_{free} = 5.1 \times 10^{-4}$ Coulomb

(δ) Το Q_{bound} στο διηλεκτρικό είναι :

$$\frac{\sigma_{free}}{\varepsilon_o \kappa} = \frac{\sigma_{free}}{\varepsilon_o} - \frac{\sigma_{bound}}{\varepsilon_o}$$

$$\sigma_{free} \frac{1}{\kappa} - 1 = - \sigma_{bound}$$

αντίθετο του σ_{bound}

$$\sigma_{bound} = - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_{free}$$

$\sigma_{free} = Q_{free}/A$

Πολυαιθυλένιο $\sigma_{bound} = 1.3 \times 10^{-5}\ C/m^2$

Βακελίτης $\sigma_{bound} = 4.1 \times 10^{-4}\ C/m^2$

(γ) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι
αντιστρόφως ανάλογο του κ : και ανάλογο του Q_{free}

$$E = \frac{E_{free}}{\kappa} = \frac{\Delta V}{d} = \frac{30V}{2 \times 10^{-5} \text{ m}}$$

Πολυαιθυλένιο

Βακελίτης

$E = 1.5 \times 10^{6}$ V/m ανεξάρτητο του κ