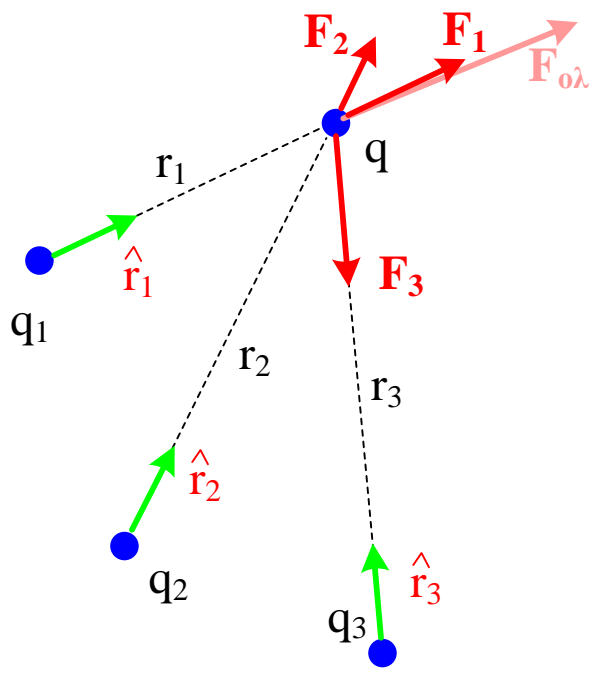


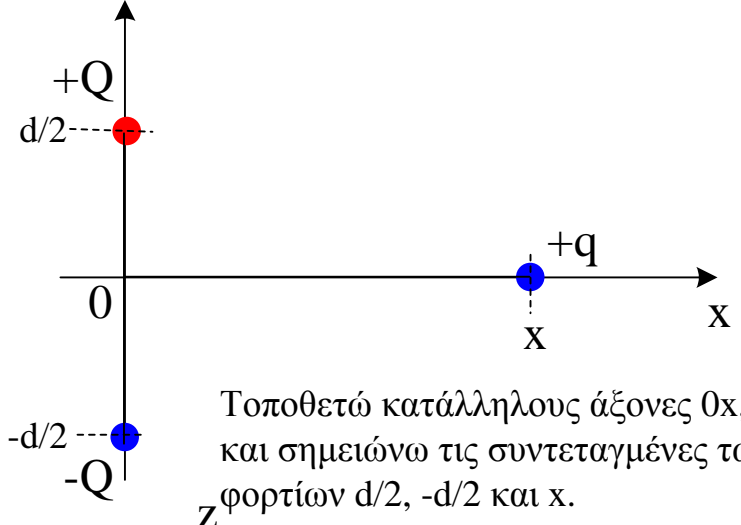
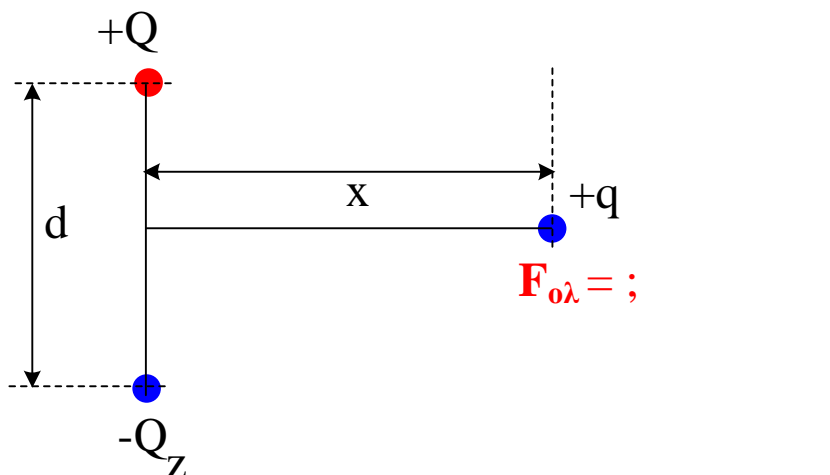
Αρχή της επαλληλίας

Η κάθε δύναμη F_i που ασκείται μεταξύ δύο οποιοδήποτε φορτίων δεν επηρεάζεται καθόλου από τη πιθανή παρουσία στο γύρω χώρο άλλων φορτίων.

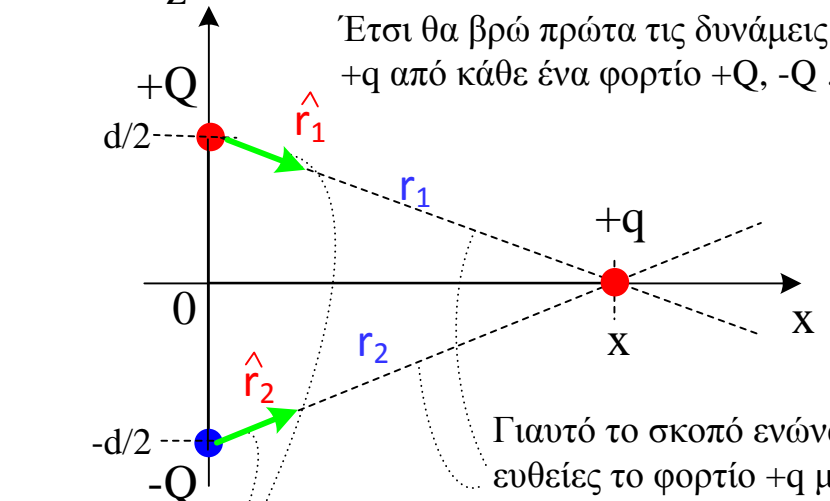
Η αρχή της επαλληλίας αποτελεί μεγάλη ευκολία στην ηλεκτροστατική, γιατί επιτρέπει να υπολογιστεί η συνολική δύναμη $F_{ολ}$ στο φορτίο q σαν το διανυσματικό άθροισμα όλων των ηλεκτρικών δυνάμεων F_1, F_2, F_3 που ασκείται στο q από κάθε ένα φορτίο ξεχωριστά q_1, q_2, q_3 .



Θέλουμε να βρούμε την ηλεκτρική δύναμη από δύο σημειακά φορτία $+Q$ και $-Q$ στο σημειακό φορτίο q που απέχει απόσταση x από το μέσο της απόστασης d μεταξύ άλλων δύο σημειακών φορτίων $+Q$ και $-Q$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



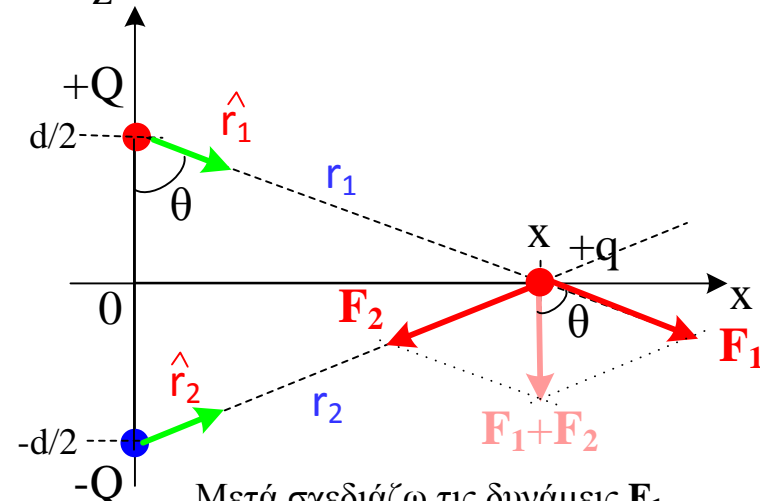
Τοποθετώ κατάλληλους άξονες $0x, 0z$ και σημειώνω τις συντεταγμένες των φορτίων $d/2, -d/2$ και x .



Έτσι θα βρώ πρώτα τις δυνάμεις στο $+q$ από κάθε ένα φορτίο $+Q, -Q$.

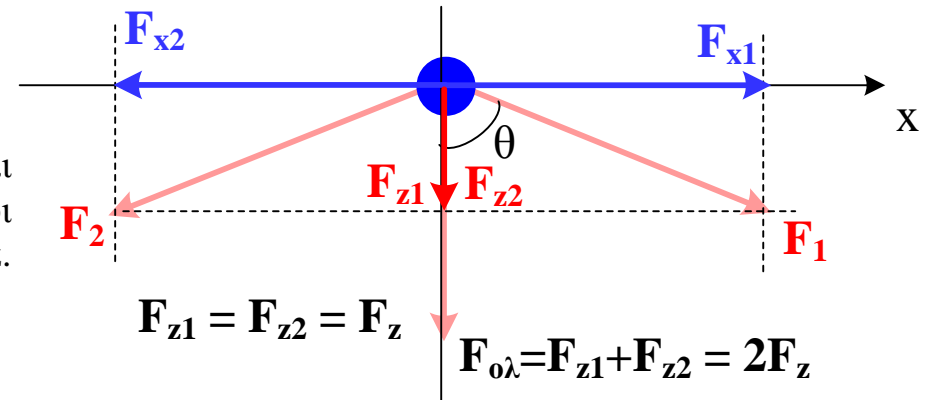
Γιαυτό το σκοπό ενώνω με ευθείες το φορτίο $+q$ με τα φορτία $+Q$ και $-Q$ και σημειώνω τις αποστάσεις r_1 και r_2 (διακεκομμένες γραμμές).

Επάνω στις ευθείες αυτές σχεδιάζω τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα με αρχή το κάθε φορτίο $+Q, -Q$ και φορά προς το q .



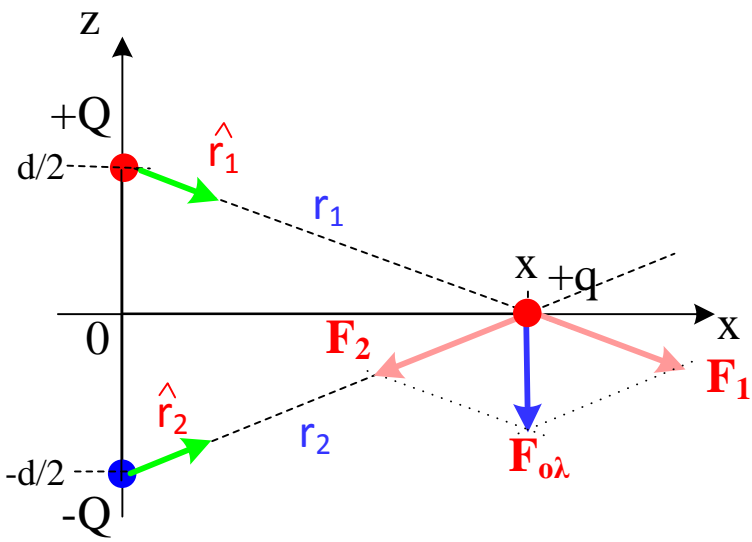
Μετά σχεδιάζω τις δυνάμεις F_1 (ελκτική) και F_2 (απωστική) που ασκούνται στο q . Η συνολική δύναμη μπορεί να βρεθεί με το κανόνα του παραλληλογράμμου.

Οι δύο συνιστώσες στον άξονα x είναι ίσες και αλληλοαναιρούνται και απομένουν μόνο οι συνιστώσες στον άξονα z .



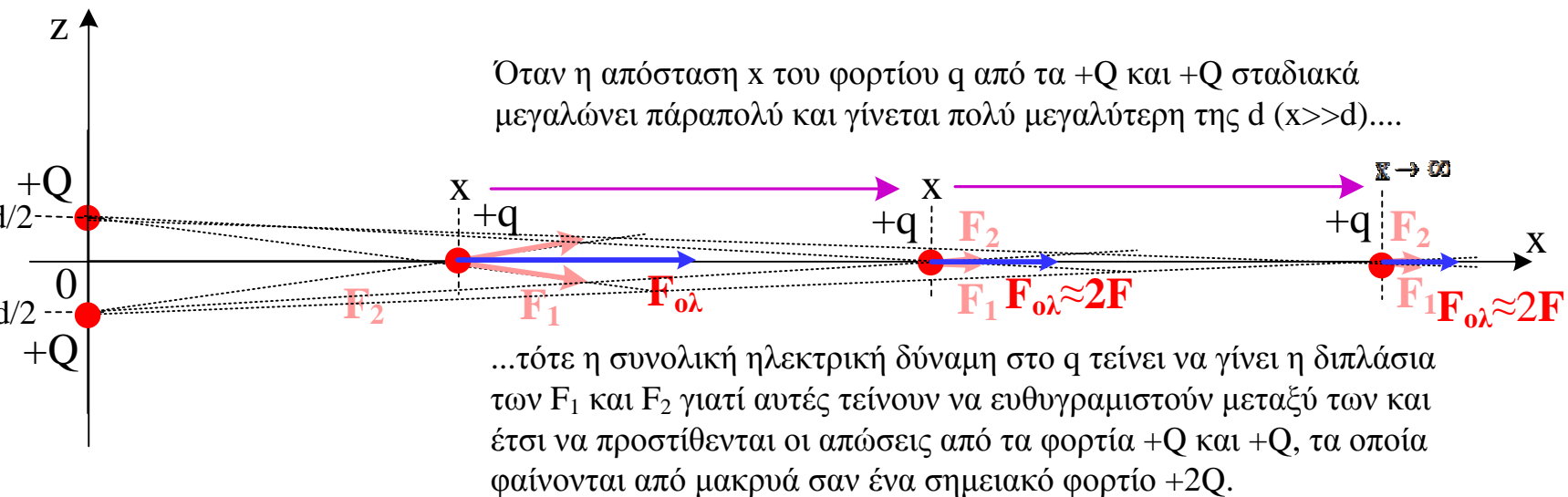
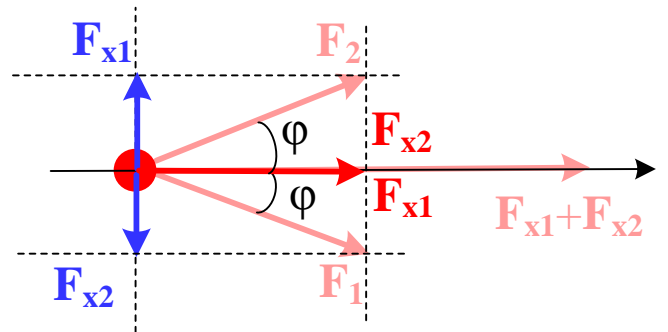
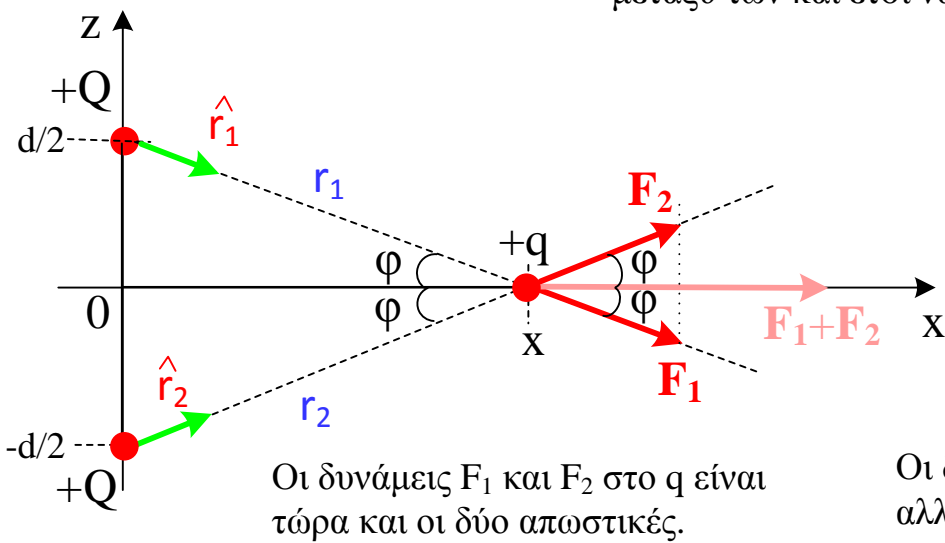
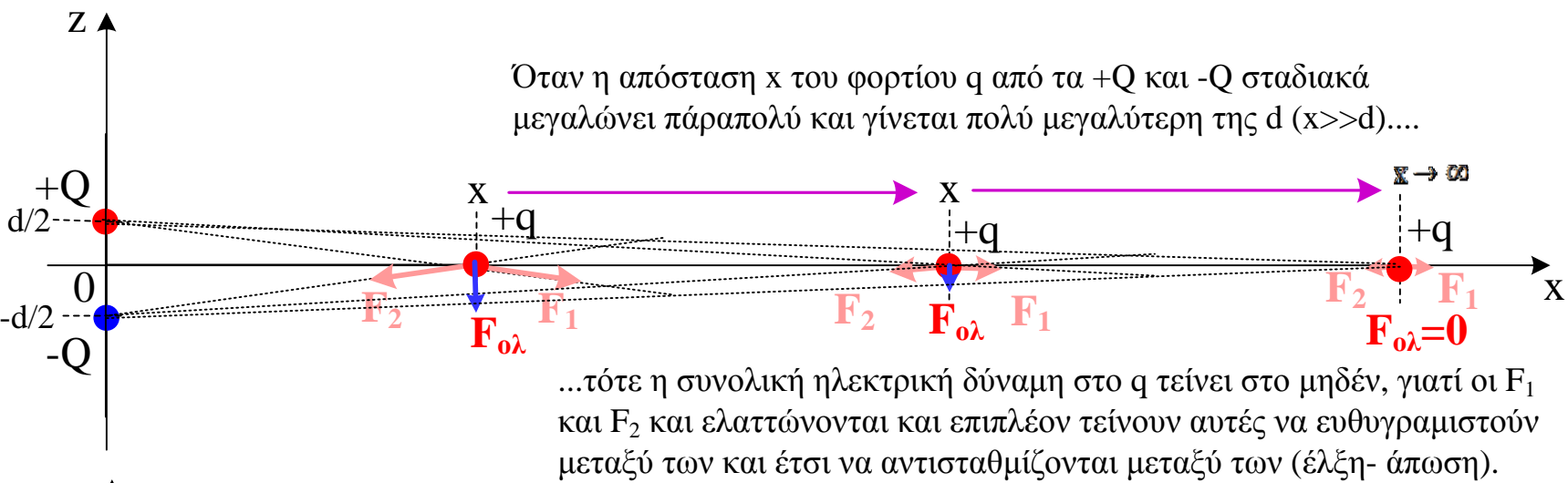
$$F_{z1} = F_{z2} = F_z$$

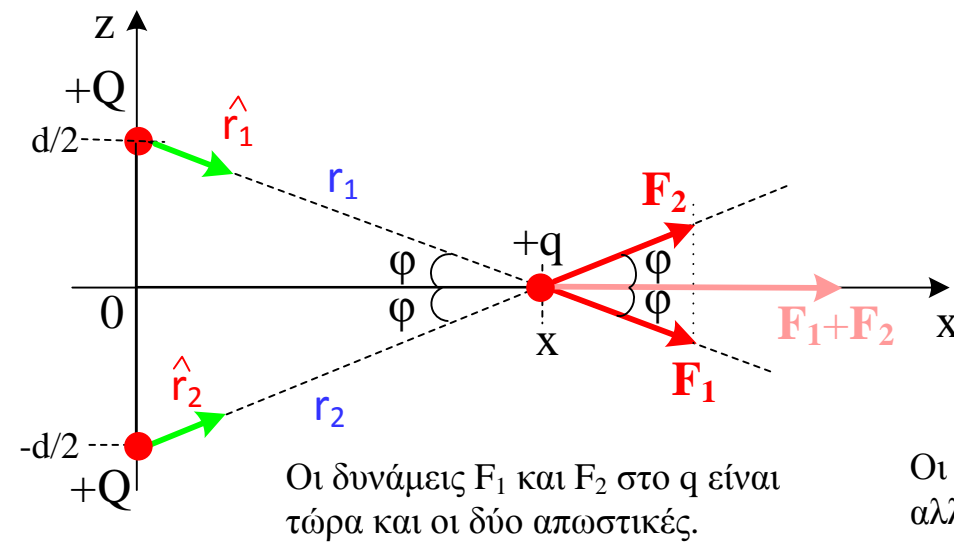
$$F_{ολ} = F_{z1} + F_{z2} = 2F_z$$



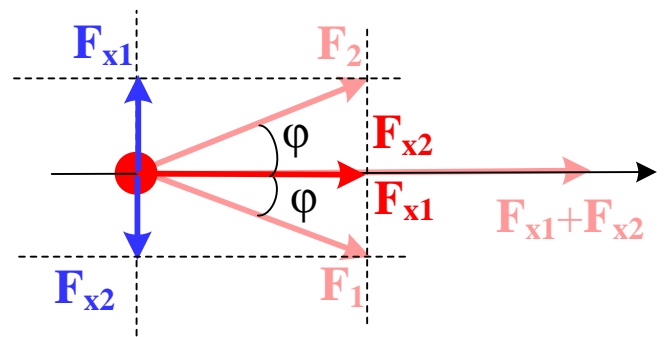
Όταν η απόσταση d μεταξύ των φορτίων $+Q$ και $-Q$ σταδιακά μικραίνει πολύ τείνοντας στο 0 , ώστε αυτά να τείνουν να συμπέσουν το ένα επάνω στο άλλο τότε το συνολικό φορτίο τείνει στο μηδέν.

Τότε η συνολική ηλεκτρική δύναμη στο q τείνει στο μηδέν γιατί οι F_1 και F_2 και τείνουν να ευθυγραμμιστούν μεταξύ των και αντισταθμίζονται μεταξύ των (έλξη-άπωση).

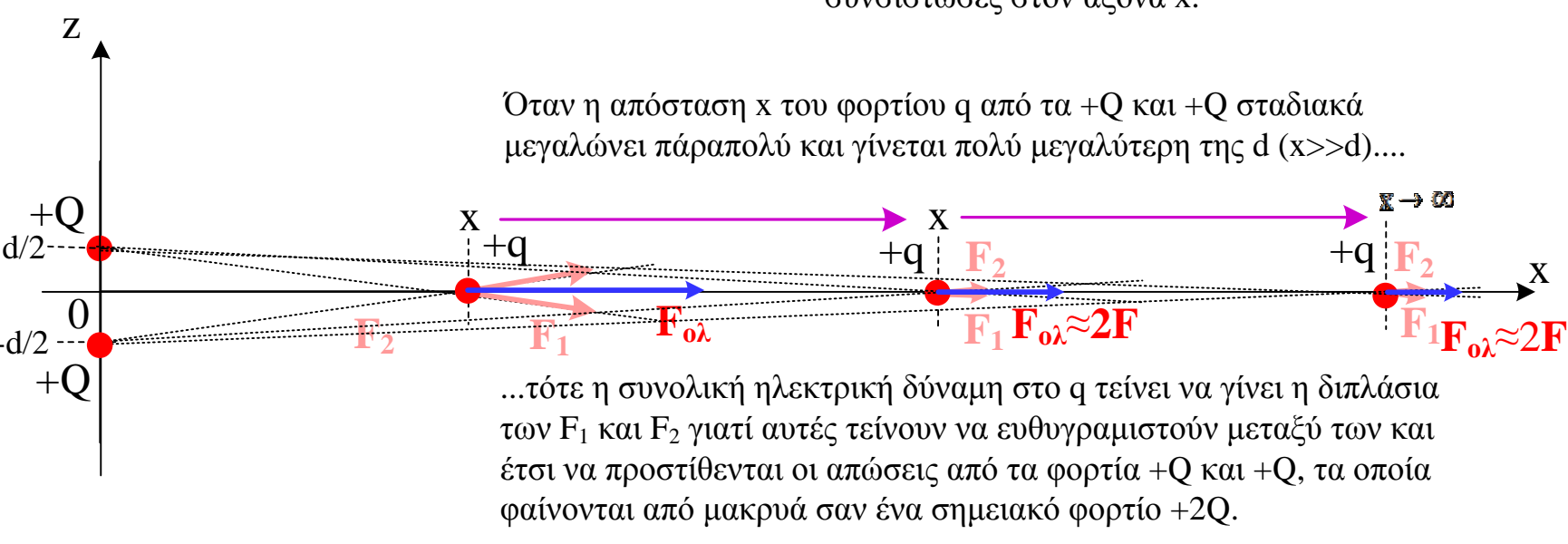




Οι δυνάμεις F_1 και F_2 στο q είναι τώρα και οι δύο απωστικές.



Οι δύο συνιστώσες στον άξονα z είναι ίσες και αλληλοαναιρούνται και απομένουν μόνο οι συνιστώσες στον άξονα x .

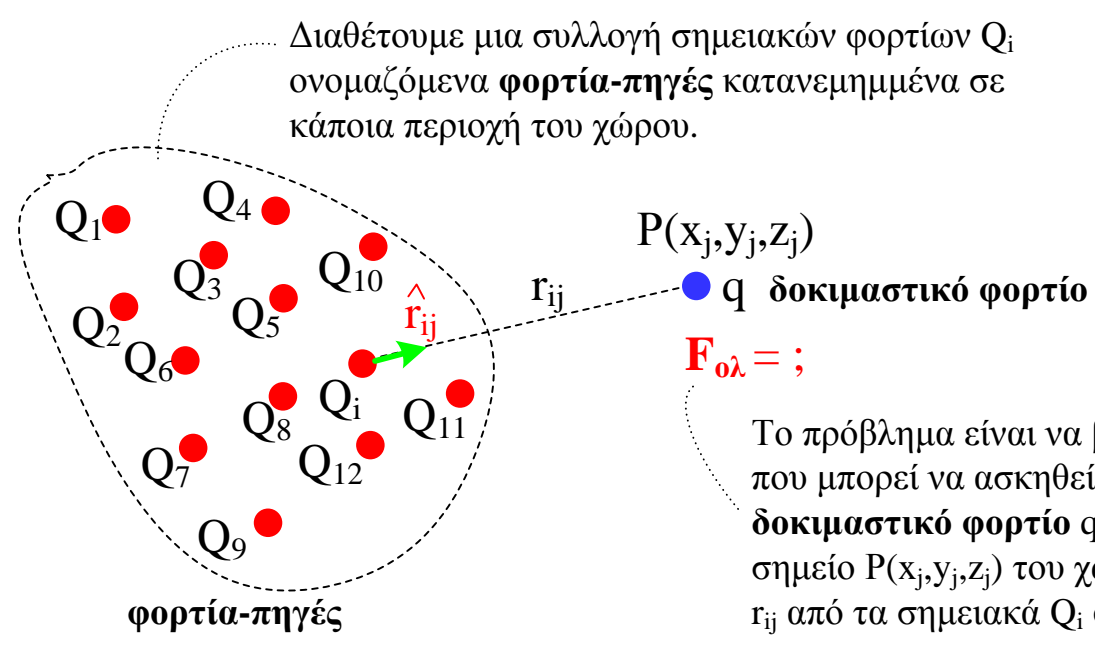


Όταν η απόσταση x του φορτίου q από τα $+Q$ και $+Q$ σταδιακά μεγαλώνει πάραπολύ και γίνεται πολύ μεγαλύτερη της d ($x \gg d$)...

...τότε η συνολική ηλεκτρική δύναμη στο q τείνει να γίνει η διπλάσια των F_1 και F_2 γιατί αυτές τείνουν να ευθυγραμμιστούν μεταξύ των και έτσι να προστίθενται οι απώσεις από τα φορτία $+Q$ και $+Q$, τα οποία φαίνονται από μακριά σαν ένα σημειακό φορτίο $+2Q$.

ΑΣΚΗΣΗ

Θέλουμε να βρούμε την συνολική ηλεκτρική δύναμη στο q αν τα δύο σημειακά φορτία του προηγούμενου παραδείγματος είναι ομόσημα π.χ. $+Q$ και $+Q$. Τότε ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία βρίσκουμε πως η συνολική δύναμη F_1 και F_2 θα είναι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



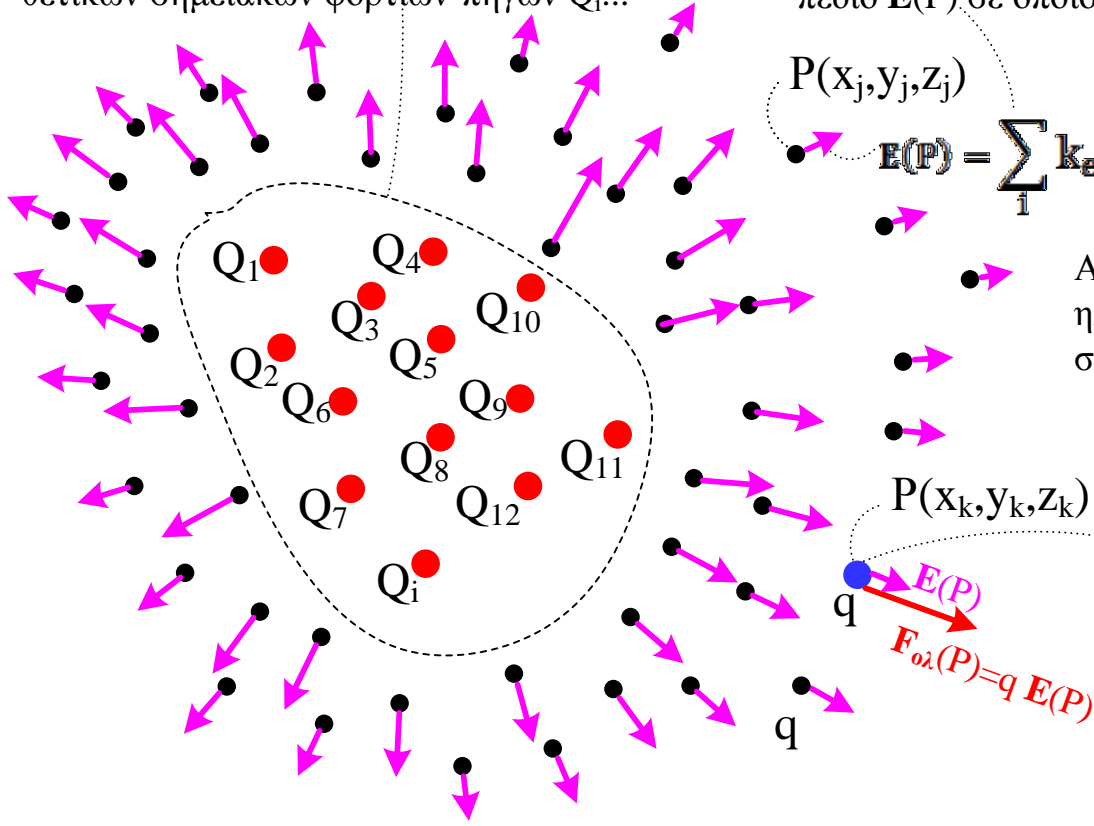
Διαθέτουμε μια συλλογή σημειακών φορτίων Q_i ονομαζόμενα **φορτία-πηγές** κατανεμημένα σε κάποια περιοχή του χώρου.

$P(x_j, y_j, z_j)$
 q δοκιμαστικό φορτίο
 $F_{ολ} = ;$

Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η συνολική δύναμη $F_{ολ}$ που μπορεί να ασκηθεί σε οποιοδήποτε σημειακό **δοκιμαστικό φορτίο** q σε οποιοδήποτε τυχαίο σημείο $P(x_j, y_j, z_j)$ του χώρου που απέχει αποστάσεις r_{ij} από τα σημειακά Q_i φορτία-πηγές της συλλογής.

Για μια οποιαδήποτε συλλογή για παράδειγμα θετικών σημειακών φορτίων-πηγών Q_i ...

...μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο $E(P)$ σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου P



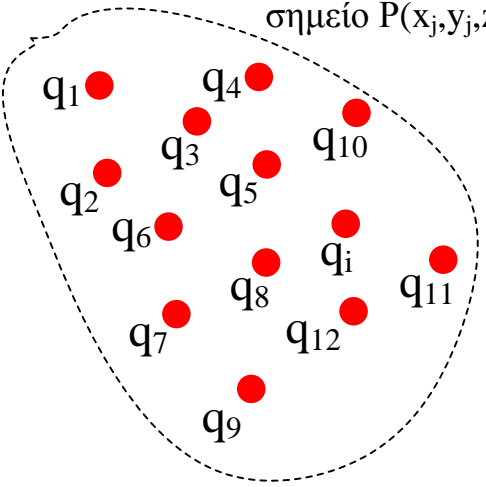
$$E(P) = \sum_i k_e \frac{Q_i}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}$$

Αφού προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο $E(P)$ σε κάθε σημείο του χώρου....

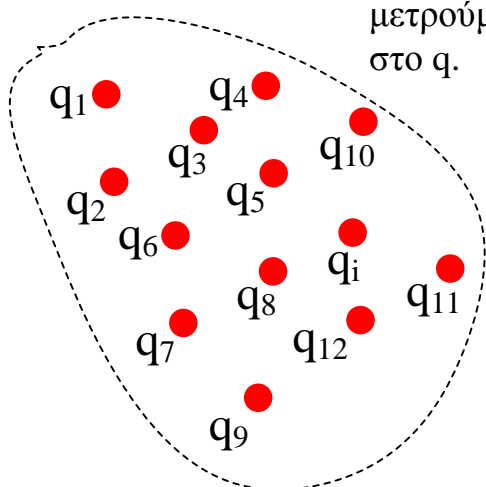
...μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιοδήποτε φορτίο q σε ένα τυχαίο σημείο $P(x_k, y_k, z_k)$ και να βρούμε την ηλεκτρική δύναμη από το γινόμενο $q E(P)$

Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε πειραματικά το ηλεκτρικό πεδίο $E(P)$ σε κάποιο τυχαίο σημείο $P(x_j, y_j, z_j)$ του χώρου....

...τότε τοποθετούμε στο σημείο P ένα δοκιμαστικό φορτίο q και μετρούμε την $F_{ολ}(P)$ που ασκείται στο q .



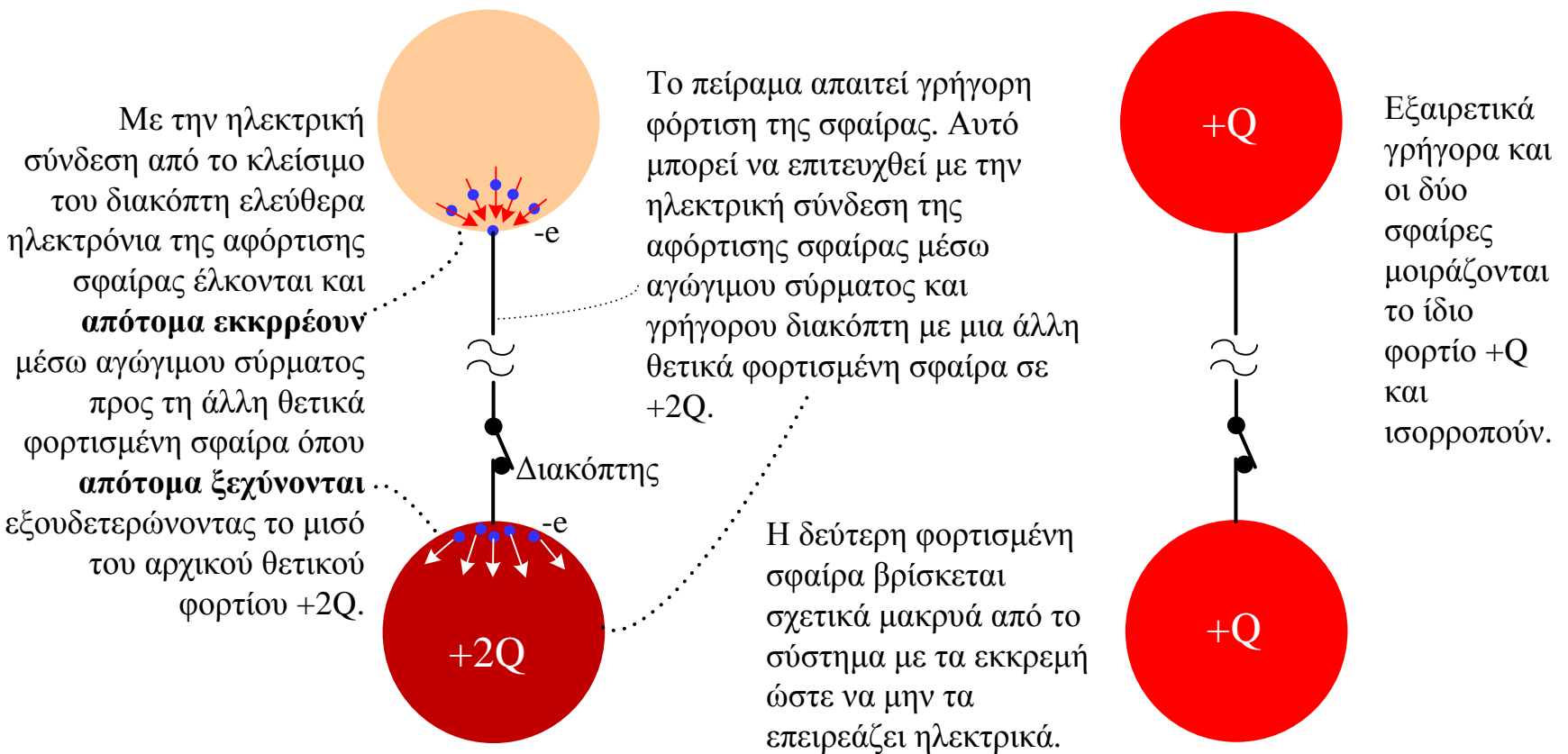
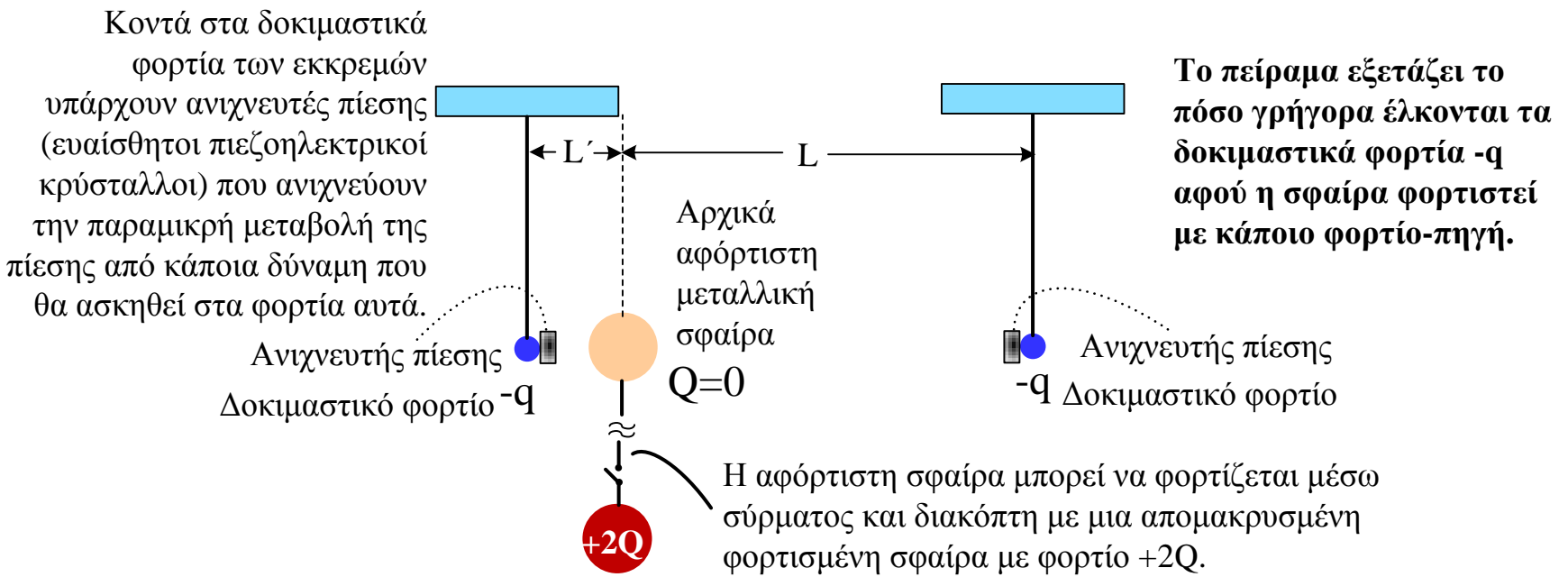
$$E(P) = ;$$

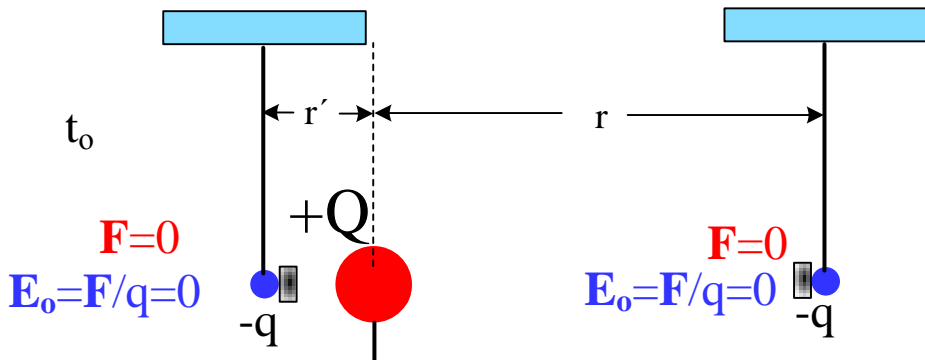


$$E(P) = F_{ολ}(P)/q$$

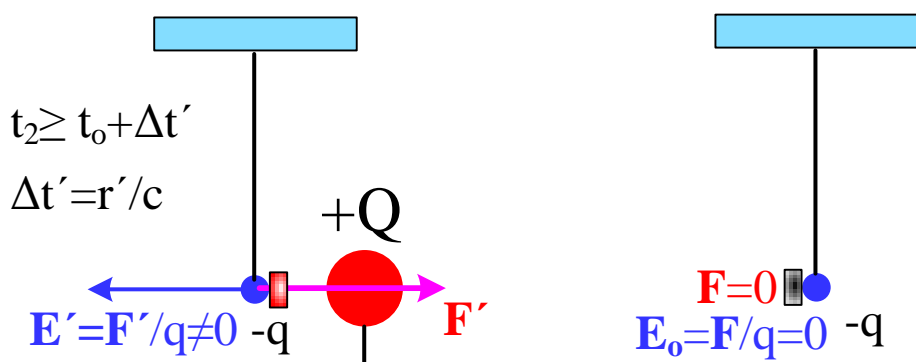
Το ηλεκτρικό πεδίο $E(P)$ στο σημείο P είναι η ηλεκτρική δύναμη ανά μονάδα φορτίου που υπολογίζεται από το πηλίκο $E(P) = F_{ολ}(P)/q$.

Διαθέτουμε δύο αρνητικά φορτισμένα σώματα με φορτίο $-q$ τα οποία παίζουν το ρόλο δοκιμαστικών φορτίων, τα οποία είναι αναρτημένα σε μορφή εκκρεμούς. Το ένα είναι πολύ κοντά και το άλλο σχετικά μακριά από μια ακίνητη αρχικά αφόρτιστη μεταλλική σφαίρα.

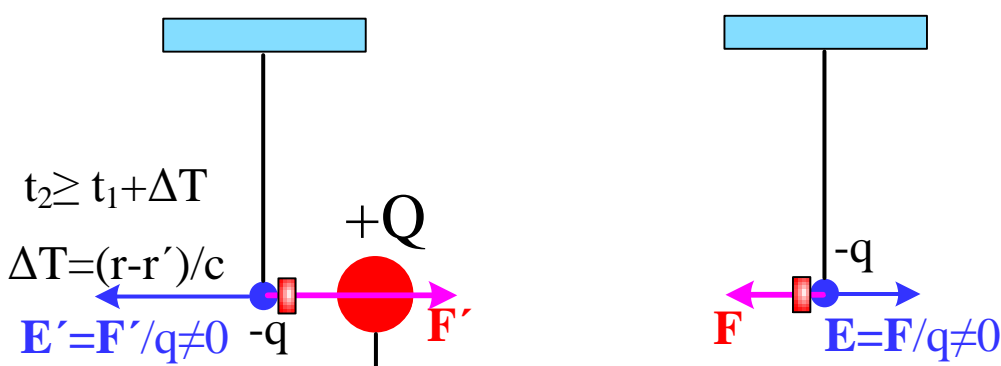




Τη χρονική στιγμή t_0 η αφόρτιστη μεταλλική σφαίρα συνδέεται με την αφόρτιστη και πολύ γρήγορα φορτίζεται με θετικό φορτίο $+Q$, όμως οι πιεζοηλεκτρικοί κρύσταλλοι δεν ανιχνεύουν μεταβολή στη πίεση φανερώνοντας ότι τα δύο δοκιμαστικά φορτία παραμένουν ανηπερέαστα.



Μετά από μια πεπερασμένη χρονική καθυστέρηση $\Delta t' = r'/c$, όπου c η ταχύτητα του φωτός, ο πιεζοηλεκτρικός κρύσταλλος στο κοντινό δοκιμαστικό φορτίο $-q$ ανιχνεύει πίεση από δύναμη έλξης F' από τη φορτισμένη με $+Q$ σφαίρα και επομένως το ηλεκτρικό πεδίο $E' = F'/q$ εμφανίζεται στο κοντινό φορτίο $-q$. Το άλλο δοκιμαστικό φορτίο $-q$ εξακολουθεί να παραμένει ανηπερέαστο και έτσι ακόμα δεν υπάρχει εκεί ηλεκτρικό πεδίο με $E_0=0$.



Κατά τη χρονική στιγμή $t_2 > t_1 + \Delta t$, όπου $\Delta t = (r-r')/c$, ο πιεζοηλεκτρικός κρύσταλλος στο μακρινό δοκιμαστικό φορτίο $-q$ ανιχνεύουν πίεση από δύναμη έλξης F από το τη φορτισμένη σφαίρα $+Q$ και επομένως το ηλεκτρικό πεδίο $E = F/q$ εμφανίζεται και στο μακρινό φορτίο $-q$.

Συμπέρασμα

Όταν εμφανιστεί το φορτίο-πηγή $+Q$ αυτό δεν ασκεί ακαριαία ηλεκτρική δύναμη στα δοκιμαστικά φορτία $-q$.

Αφού το ηλεκτρικό πεδίο είναι: $E = F/q$ και $F=0$, τότε το ηλεκτρικό πεδίο ακόμα παραμένει στην αρχική του τιμή $E_0=0$ και στα δύο δοκιμαστικά φορτία τα οποία συμπεριφέρονται όπως όταν η σφαίρα ήταν αφόρτιστη.

Συμπέρασμα

Μετά τη χρονική καθυστέρηση $\Delta t' = r'/c$ ασκείται ηλεκτρική δύναμη F' πρώτα στο κοντινό δοκιμαστικό φορτίο $-Q$ και έτσι από τη σχέση $F'/-q = E'$ να συμπεράνουμε πως εκεί υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο ($E' \neq 0$).

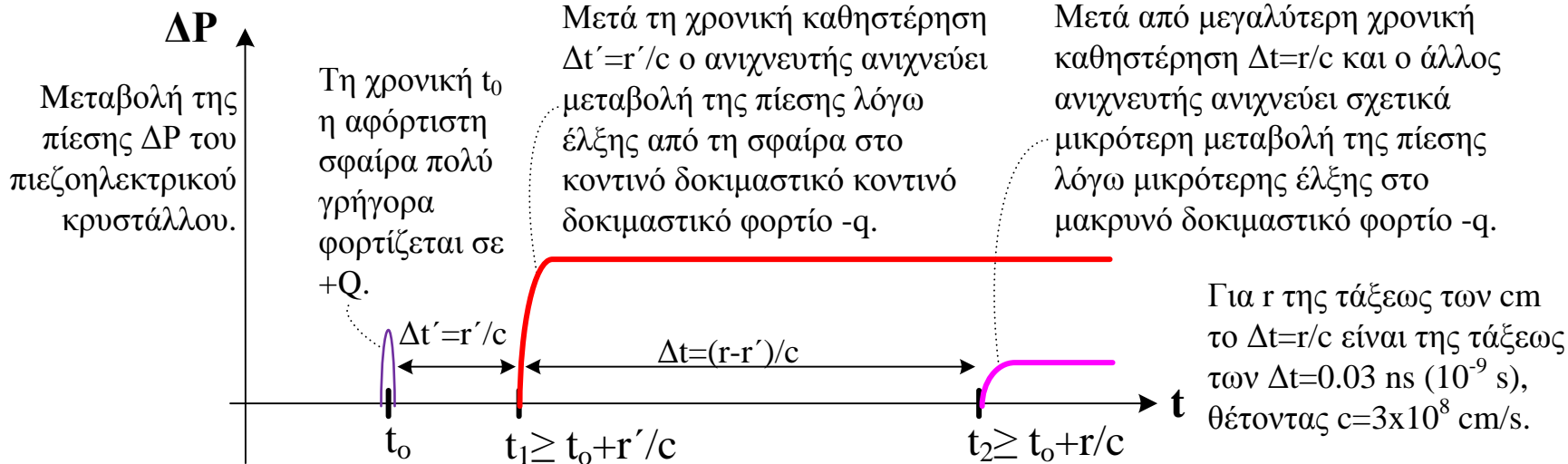
Το $\Delta t' = r'/c$ είναι όσο κάνει να φθάσει με τη ταχύτητα c του φωτός η πληροφορία ότι η αφόρτιστη σφαίρα φορτίστηκε και έτσι να παράγει ηλεκτρικό πεδίο E' στο κοντινό δοκιμαστικό φορτίο $-q$.

Αφού το μακρινό δοκιμαστικό φορτίο $-q$ παραμένει ανηπερέαστο ($F=0$), εκεί δεν έχει ακόμα φθάσει η πληροφορία ότι η σφαίρα φορτίστηκε και έτσι δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, $E_0=0$.

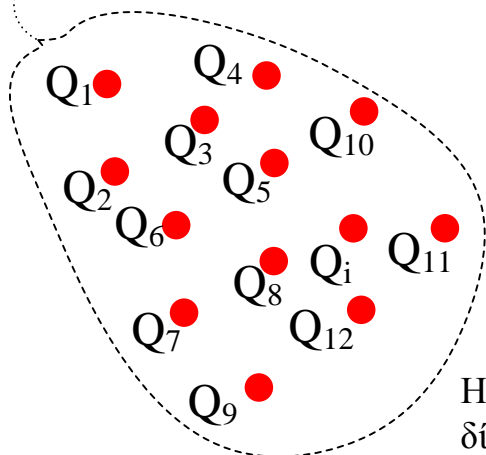
Συμπέρασμα

Με τη επιπλέον χρονική καθυστέρηση $\Delta t = (r-r')/c$, τότε ασκείται και στο μακρινό δοκιμαστικό φορτίο $-q$ ηλεκτρική δύναμη F . Η παραπάνω επιπλέον χρονική καθυστέρηση Δt είναι όση ακριβώς χρειάζεται για να φθάσει και στο άλλο δοκιμαστικό φορτίο $-q$ η πληροφορία ότι η σφαίρα φορτίστηκε με $+Q$ και έτσι δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο E και στο μακρινό δοκιμαστικό φορτίο $-q$.

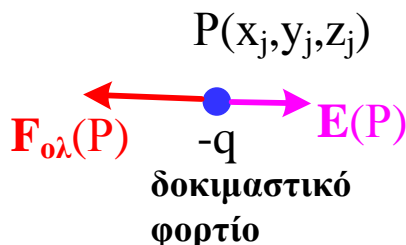
Χρονική εξέλιξη των γεγονότων του πειράματος.



Αν υπάρχει μια συλλογή σημειακών φορτίων-πηγών Q_i .



...τότε σε κάποιο σημείο του χώρου P που έχουμε τοποθετήσει ένα δοκιμαστικό φορτίο $-q$, θα ασκηθεί σε αυτό ηλεκτρική δύναμη $F_{ολ}(P)$ τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει μη μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο $E(P) \neq 0$.

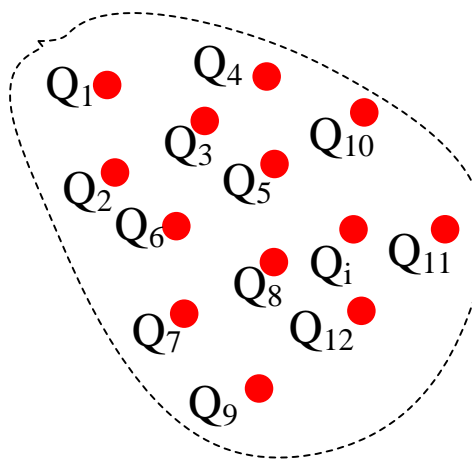


Η ηλεκτρική δύναμη δίδεται από τη σχέση: $F_{ολ}(P) = q E(P)$

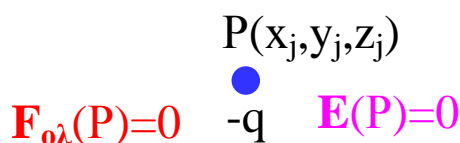
... που υπονοεί ότι υπάρχει ηλεκτρική δύναμη αν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $E(P) \neq 0$.

Στην περίπτωση όπου ενώ υπάρχει συλλογή φορτίων-πηγών αλλά δεν υπάρχει σε κάποιο σημείο P ηλεκτρικό πεδίο $E(P) = 0$, τότε:

$$F_{ολ}(P) = q E(P) = 0$$



Επομένως η ηλεκτρική δύναμη είναι $F_{ολ}(P) = 0$ ανεξάρτητα από το γεγονός πως φορτία-πηγές μπορεί να υπάρχουν στο γύρω χώρο.



Αντίθετα η ηλεκτρική δύναμη από το νόμο του Coulomb:

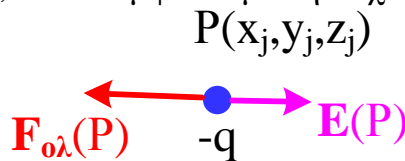
$$F_{ολ}(P) = \sum_i k_e \frac{Q_i q}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \neq 0$$

...δείχνει εσφαλμένα ότι αφού υπάρχουν τα φορτία-πηγές $Q_i \neq 0$, θα υπάρχει και μη μηδενική ηλεκτρική δύναμη $F_{ολ}(P) \neq 0$.

Τέλος αν δεν υπάρχει στο γύρω χώρο καμμία συλλογή σημειακών φορτίων-πηγών Q_i ...

$$Q_i = 0$$

...τότε σε κάποιο σημείο του χώρου P που έχουμε τοποθετήσει ένα δοκιμαστικό φορτίο $-q$, μπορεί να υπάρχει μη μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο $E(P) \neq 0$, τότε σύμφωνα με την σχέση: $F_{ολ}(P) = q E(P) \neq 0$



...τότε μπορεί να ασκείται στο q μη μηδενική ηλεκτρική δύναμη $F_{ολ}(P) \neq 0$.

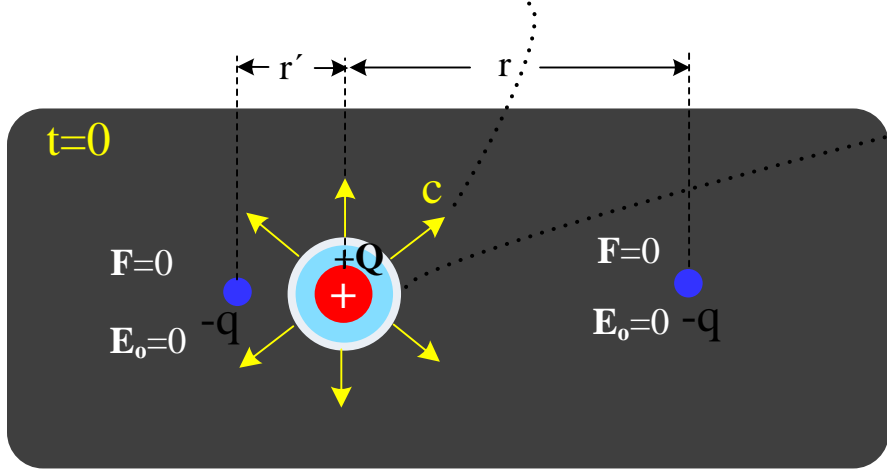
Αντίθετα η ηλεκτρική δύναμη από το νόμο του Coulomb:

$$F_{ολ}(P) = \sum_i k_e \frac{Q_i q}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} = 0$$

δείχνει εσφαλμένα ότι αφού δεν υπάρχουν τα φορτία-πηγές $Q_i = 0$, δεν θα υπάρχει και η ηλεκτρική δύναμη ($F_{ολ}(P) = 0$).

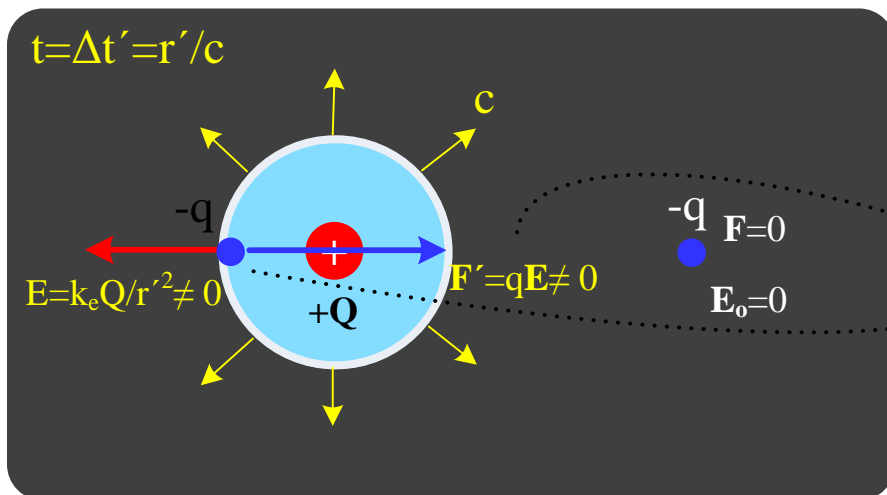
Επομένως ο νόμος του Coulomb θα εφαρμόζεται όχι μόνον όταν υπάρχουν στο χώρο φορτία-πηγές Q_i αλλά και όταν έχει περάσει αρκετός χρόνος και έχει δημιουργηθεί σταθερή κατάσταση στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο έχει παγιωθεί σε όλα τα γύρω σημεία του χώρου (αρχή ηλεκτροστατικής).

Μόλις εμφανιστεί το φορτίο-πηγή $+Q$, το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στο φορτίο αυτό εξαπλώνεται προς όλες τις διευθύνσεις με μορφή σφαιρικού κύματος, το λεγόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το οποίο διαδίδεται με τη ταχύτητα του φωτός c κατακλύζοντας γρήγορα σαν ένα ρευστό το χώρο γύρω από το φορτίο-πηγή $+Q$.

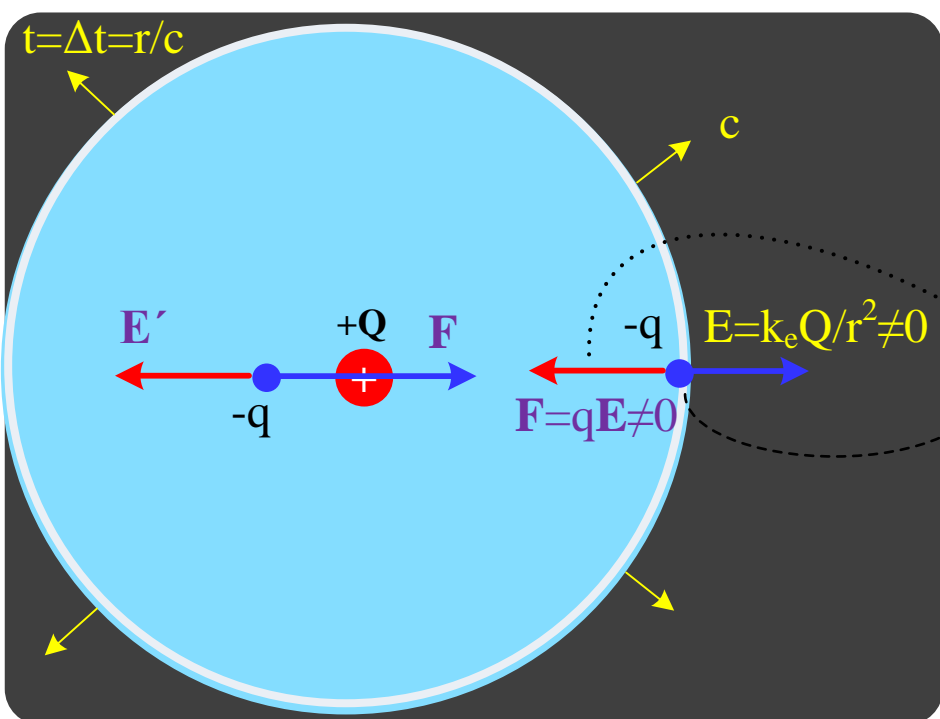


Στο μέτωπο του κύματος αυτού γίνεται η αλλαγή του ηλεκτρικού πεδίου από την αρχική τιμή $E_0=0$ στο νέο πεδίο E που οφείλεται στο εμφανισθέν φορτίο-πηγή $+Q$.

Το ότι το ηλεκτρικό πεδίο **δεν εξαπλώνεται ακαριαία** γίνεται αντιληπτό από το γεγονός πως στα δοκιμαστικά φορτία $-q$ σε απόστασεις r και r' μακριά από το φορτίο-πηγή $+Q$ δεν ασκείται για κάποιο χρονικό διάστημα ηλεκτρική δύναμη ($F=0$), φανερώνοντας πως το ηλεκτρικό πεδίο δεν έχει φθάσει ακόμα μέχρι εκεί και διατηρεί την αρχική τιμή $E_0=0$ που είχε όταν ακόμα η σφαίρα ήταν αφόρτιστη.



Μόλις στο κοντινό δοκιμαστικό φορτίο $-q$ μετά από χρονική καθυστέρηση $\Delta t' = r'/c$ αφότου φορτίστηκε η σφαίρα σε $+Q$ εμφανιστεί ηλεκτρική δύναμη F' , τότε συμπεραίνουμε ότι το μέτωπο του κύματος όπου συμβαίνει η αλλαγή του ηλεκτρικού πεδίου από την αρχική τιμή $E_0=0$ στο νέο πεδίο $E' = F'/-q$ που οφείλεται στο φορτίο-πηγή $+Q$ έφθασε στη θέση του κοντινού δοκιμαστικού φορτίου $-q$.



Μόλις στο μακρινό δοκιμαστικό φορτίο $-q$ μετά από χρονική καθυστέρηση $\Delta t = r/c$ αφότου φορτίστηκε η σφαίρα σε $+Q$ εμφανιστεί ηλεκτρική δύναμη F , τότε συμπεραίνουμε ότι το μέτωπο του κύματος όπου συμβαίνει η αλλαγή του ηλεκτρικού πεδίου από την αρχική τιμή $E_0=0$ στο νέο πεδίο $E = F/-q$ που οφείλεται στο φορτίο-πηγή $+Q$ έφθασε και στη θέση του μακρινού δοκιμαστικού φορτίου $-q$.

Η ύπαρξη των βαρυτικών πεδίων-βαρυτικών κυμάτων

Η παραγωγή των βαρυτικών κυμάτων προβλέφθηκε από τη Γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein. Τα κύματα αυτά πληροφορούν το χώρο ότι το βαρυτικό πεδίο και η καμπύλωση του χωροχρόνου αλλάζει όταν προκαλείται με κάποιο τρόπο απότομη μεταβολή στη κατανομή της μάζας στο χώρο. Αυτό μπορεί να συμβεί στις εξής περιπτώσεις δημιουργώντας βαρυτικά κύματα:

- i) Όταν γίνει μια έκρηξη ενός αστεριού που ονομάζεται σουπερνόβα και έτσι εκτιναχθεί στο διάστημα με ασύμμετρο τρόπο μεγάλη ποσότητα ύλης προκαλώντας αλλαγή του βαρυτικού πεδίου στο χώρο.
- ii) Όταν δύο αστέρια περιστρέφονται το ένα γύρω από το άλλο μεταβάλλοντας περιοδικά το βαρυτικό πεδίο στο χώρο εκπέμποντας περιοδικές ριτιδώσεις στο χώρο-βαρυτικά κύματα.
- iii) Όταν δύο μαύρες τρύπες πλησιάζουν μεταξύ των και συγχωνεύονται, αυτές περιστρέφονται η μια γύρω από την άλλη προκαλώντας έτσι πολύ ισχυρές αλλαγές στο βαρυτικό πεδίο οι οποίες εμφανίζονται σαν ριτιδώσεις στο χώρο.

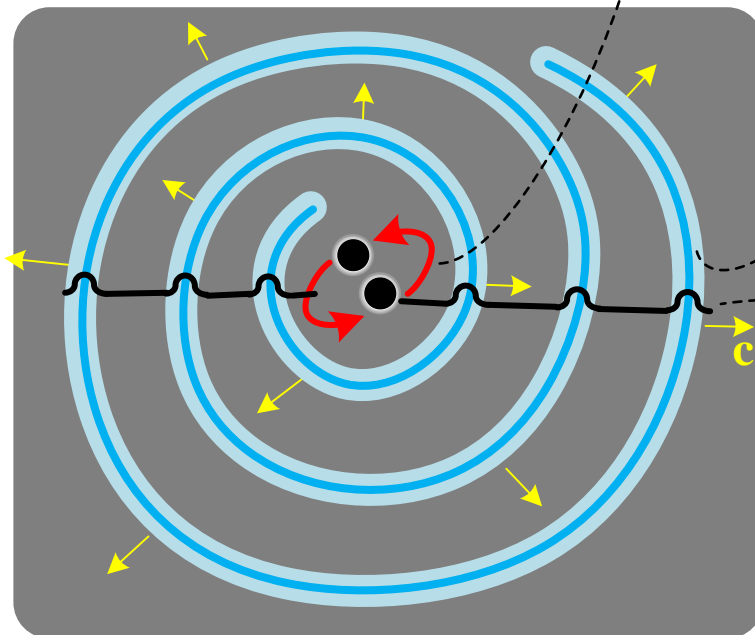
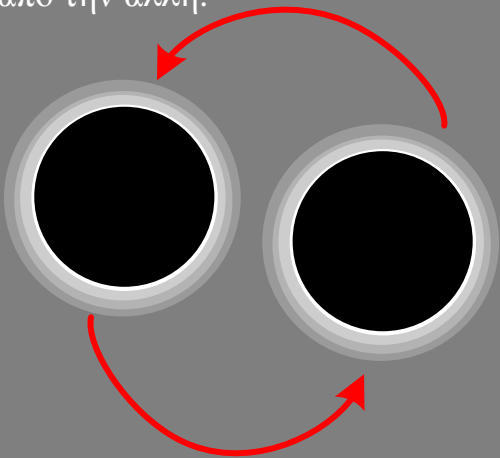
Επειδή τα βαρυτικά κύματα είναι συγκριτικά πολύ πιο ασθενικά από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, ο Einstein πίστευε πως είναι εξαιρετικά πολύ δύσκολο και απίθανο να ανιχνευτούν. Παρόλα αυτά είχαν σχεδιαστεί δύο μεγάλοι ευαίσθητοι ανιχνευτές LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) ο ένας στη Λουιζιάνη και ο άλλος στην Ουάσινγκτον οι οποίοι ερευνούσαν για πολλά χρόνια χωρίς θετικό αποτέλεσμα την έλευση κάποιου βαρυτικού κύματος από το διάστημα. Μετά και από την βελτίωση και την σημαντική αύξηση της ευαισθησίας του ανιχνευτή, ανιχνεύτηκε επιτέλους το 2015 και επιβεβαιώθηκε η ύπαρξη των βαρυτικών κυμάτων. Τα κύματα αυτά προήλθαν από μια μακρινή βίαιη αλλαγή του βαρυτικού πεδίου η οποία πρέκυψε από την συγχώνευση δύο μαύρων τρυπών (black holes) που συνέβηκε πριν από 1.3 δισεκατομύρια έτη. Μια τέτοια συγχώνευση δύο μαύρων τρυπών έφθασε και ανιχνεύτηκε από τους ανιχνευτές του LIGO.

Δύο μαύρες τρύπες πλησιάζουν περιστρεφόμενες η μια γύρω από την άλλη πριν αυτές ενωθούν...

Από την περιστροφή μεταβάλλεται το βαρυτικό πεδίο γύρω των και παράγονται βαρυτικά κύματα...

...που είναι ριτιδώσεις του χώρου που διαδίδονται με την ταχύτητα c του φωτός.

Δύο μαύρες τρύπες που πλησιάζουν πριν αυτές ενωθούν περιστρέφονται η μια γύρω από την άλλη.



Ανιχνευτής LIGO και η αρχή λειτουργίας του

Στο άκρο του βραχίονα κάτοπτρο ανάκλασης της δέσμης laser που ανακλάται από το ημιπερατό κάτοπτρο.

Στο άκρο του βραχίονα κάτοπτρο ανάκλασης της δέσμης laser που διαπερνά το ημιπερατό κάτοπτρο

Χώρος με το Laser, το ημιπερατό κάτοπτρο και τον ευαίσθητο ανιχνευτή που συμβάλλουν οι δύο δέσμες του Laser.

Laser

Ημιπερατό κάτοπτρο που διαχωρίζει τη δέσμη του laser σε μία κάθετα ανακλώμενη και σε μια που διαπερνά το κάτοπτρο.

Πολύ ευαίσθητος ανιχνευτής

Ανακλώμενη δέσμη από τον άλλο κάθετο βραχίονα

Μήκος βραχίονα 4 km

Αποτελείται από δύο βραχύονες μήκους 4 km που διατρέχονται από δύο δέσμες Laser που ανακλώνται στο ένα άκρο του κάθε βραχίονα. Οι ανακλώμενες δέσμες συμβάλλουν επάνω σε πολύ ευαίσθητο ανιχνευτή.

Μήκος βραχίονα 4 km

Δέσμες Laser ανακλώμενες από τα άκρα του κάθε βραχίονα

Στο άκρο του βραχίονα κάτοπτρο ανάκλασης της δέσμης laser που διαπερνά το ημιπερατό κάτοπτρο

Ανακλώμενη δέσμη από τον ένα βραχίονα της μιας δέσμης του Laser.

Η ανακλώμενες δέσμες έχουν ρυθμιστεί ώστε να φθάνουν στον ανιχνευτή με αντίθετη φάση και να συμβάλλουν αναιρετικά. Έτσι ο ανιχνευτής έχει σήμα 0.

Ο ανιχνευτής LIGO ανιχνεύει ένα βαρυτικό κύμα

Το Βαρυτικό κύμα θα προκαλέσει ένα πολύ μικρό **τέντωμα** του χώρου και του μήκους του βραχίονα.

Το παραπάνω τέντωμα προκαλεί μικρή μετατόπιση της ανακλώμενης αντίστοιχης ανακλώμενης δέσμης.

Laser

Το Βαρυτικό κύμα θα προκαλέσει μια πολύ μικρή **συμπίεση** στο μήκος του ένα βραχίονα.



Βαρυτικό κύμα που φθάνει από τις περιστρεφόμενες μαύρες τρύπες

Η παραπάνω συμπίεση προκαλεί μικρή μετατόπιση της αντίστοιχης ανακλώμενης δέσμης.

Επειδή οι ανακλώμενες δέσμες έχουν μετατοπιστεί φθάνουν στον ανιχνευτή με όχι ακριβώς αντίθετη φάση και πλέον δεν συμβάλλουν αναιρετικά.

Πολύ ευαίσθητος ανιχνευτής

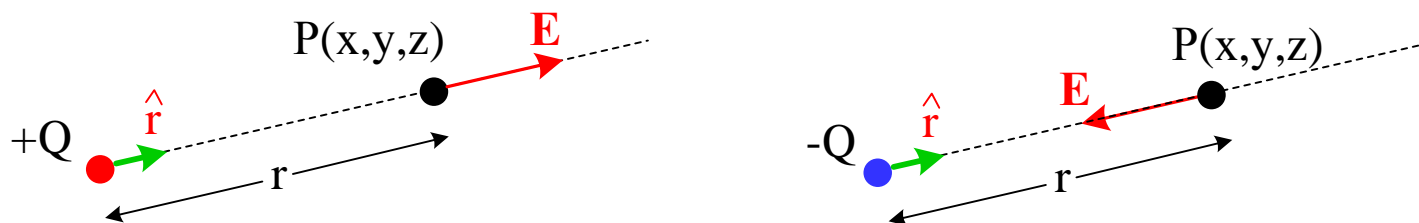
Έτσι ο ανιχνευτής ανιχνεύει κάποιο σήμα πιστοποιώντας την άφιξη βαρυτικού κύματος.

Ένταση ηλεκτρικού και βαρυτικού πεδίου

Το ηλεκτρικό πεδίο E σημειακού φορτίου Q σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου P είναι η ηλεκτρική δύναμη ανά μονάδα δοκιμαστικού φορτίου q μπορεί να υπολογιστεί από το νόμο του Coulomb Εξ. (9.13) η οποία γίνεται

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\mathbf{F}(P)}{q} = k_e \frac{Qq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}/q \qquad \mathbf{E}(P) = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

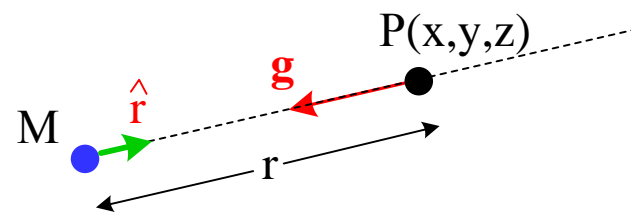
Η τελευταία εξίσωση φανερώνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται στην ακτινική διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος και σε σχέση με αυτό της ίδια φοράς για θετικό $+Q$ και αντίθετης φοράς για αρνητικό $-Q$ φορτίο.



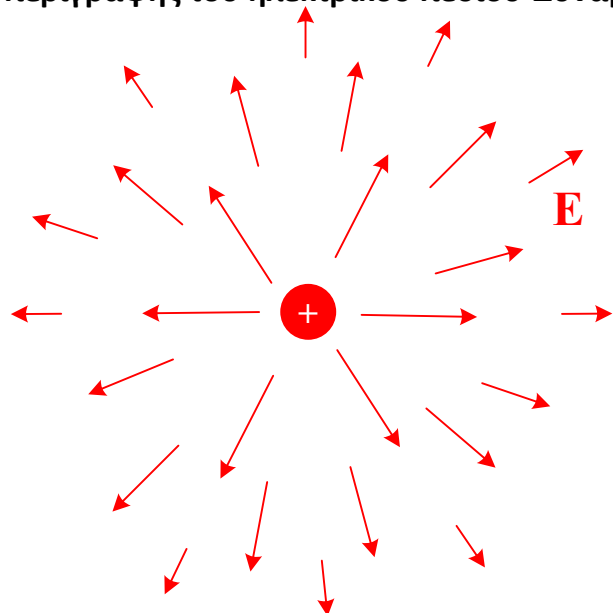
Κατά αναλογία με το ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει και το βαρυτικό πεδίο. Έτσι το βαρυτικό πεδίο g σημειακής μάζας M σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου P είναι η βαρυτική δύναμη ανά μονάδα δοκιμαστικής μάζας m και μπορεί να υπολογιστεί από με το νόμο της παγκόσμιας έλξης Εξ. (9.13) η οποία γίνεται

$$\mathbf{g}(P) = \frac{\mathbf{F}(P)}{m} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}/m \qquad \mathbf{g}(P) = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Η τελευταία εξίσωση φανερώνει ότι το βαρυτικό πεδίο βρίσκεται στην ακτινική διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος και αντίθετης φοράς με αυτό λόγω του ότι η βαρύτητα είναι πάντα ελκτική δύναμη που εξασφαλίζεται από το αρνητικό πρόσημο στη παραπάνω εξίσωση αφού η μάζα είναι θετική ποσότητα.

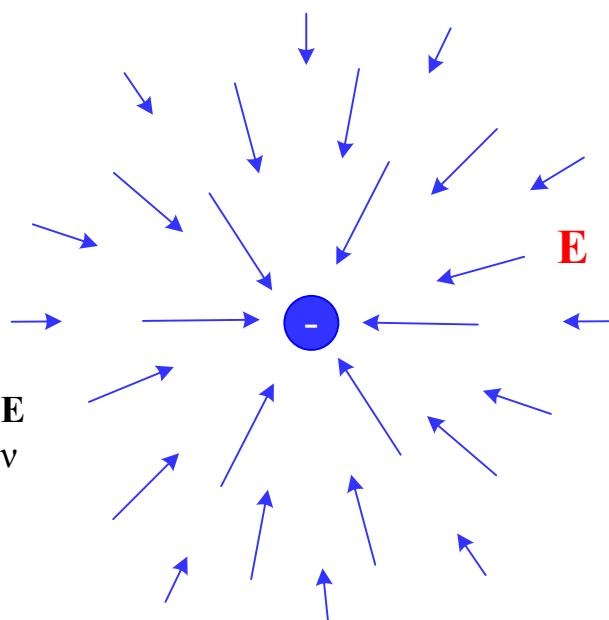


Τρόποι περιγραφής του ηλεκτρικού πεδίου-Δυναμικές γραμμές

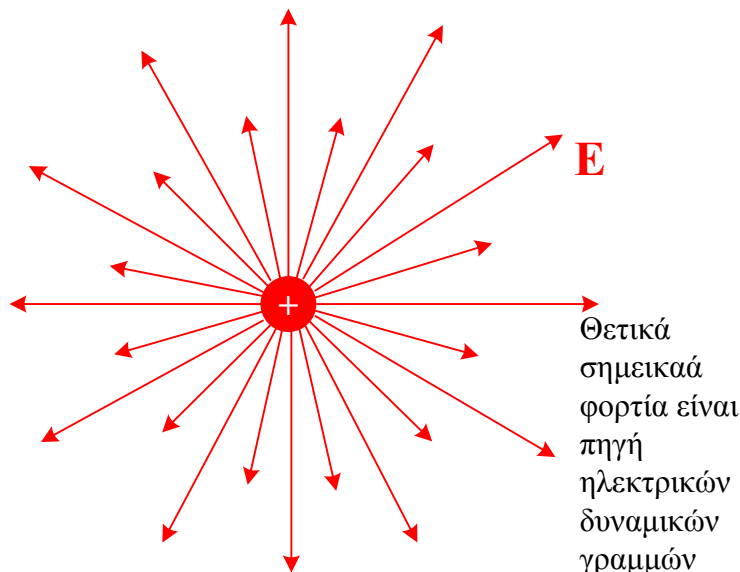


Το μήκος των διανυσμάτων E παριστάνει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

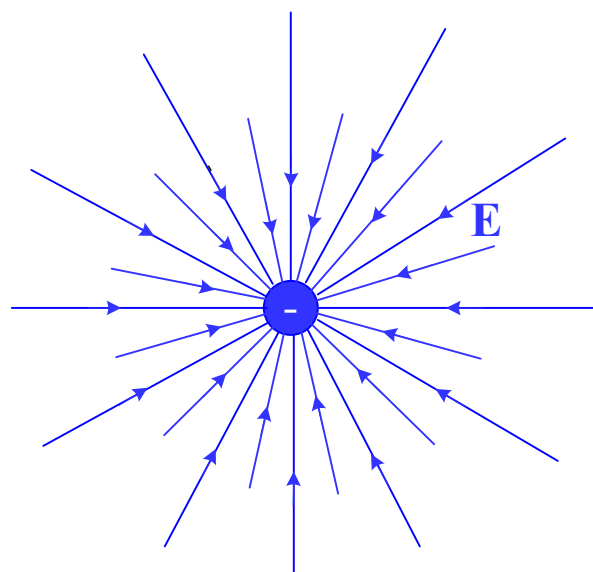
Το ηλεκτρικό πεδίο θετικού σημειακού φορτίου παριστάνεται με διανύσματα E που έχουν διεύθυνση ακτινική προς όλες τις διευθύνσεις και φορά προς τα έξω από το θετικό φορτίο.



Το ηλεκτρικό πεδίο αρνητικού σημειακού φορτίου παριστάνεται με διανύσματα E που έχουν διεύθυνση ακτινική προς όλες τις διευθύνσεις και φορά προς το αρνητικό φορτίο.



Από θετικό σημειακό φορτίο εκβάλλουν ακτινικά προς όλες τις διευθύνσεις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές.



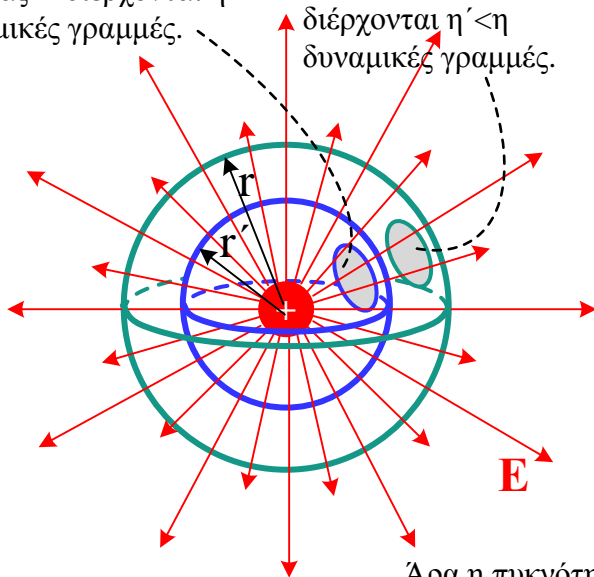
Σε αρνητικό σημειακό φορτίο εισρρέουν ακτινικά από όλες τις διευθύνσεις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές.

Στη περίπτωση αυτή το μέτρο του E περιγράφεται πλέον όχι από μήκος διανυσμάτων, αλλά από την πυκνότητα (η) των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών, δηλαδή τον αριθμό των γραμμών, n_s , που διαπερνούν μια δεδομένη z επιφάνεια, S , δια το εμβαδόν της επιφάνειας: $\eta = n_s/S$. Πράγματι η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών αυξάνεται καθώς πλησιάζουμε στο σημειακό φορτίο και ελαττώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το σημειακό φορτίο. Ενώ αν η γραφική αναπαράσταση γίνει σε προοπτικό σχέδιο 3 διαστάσεων, τότε η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών που έχουμε σχεδιάσει ελαττώνεται με την απόσταση r ακριβώς όπως το $1/r^2$.

Απόδειξη

Δεδομένη επιφάνεια S που ανήκει σε σφαίρα ακτίνας r' διέρχονται η δυναμικές γραμμές.

Δεδομένη επιφάνεια S που ανήκει σε σφαίρα ακτίνας r διέρχονται $\eta' < \eta$ δυναμικές γραμμές.



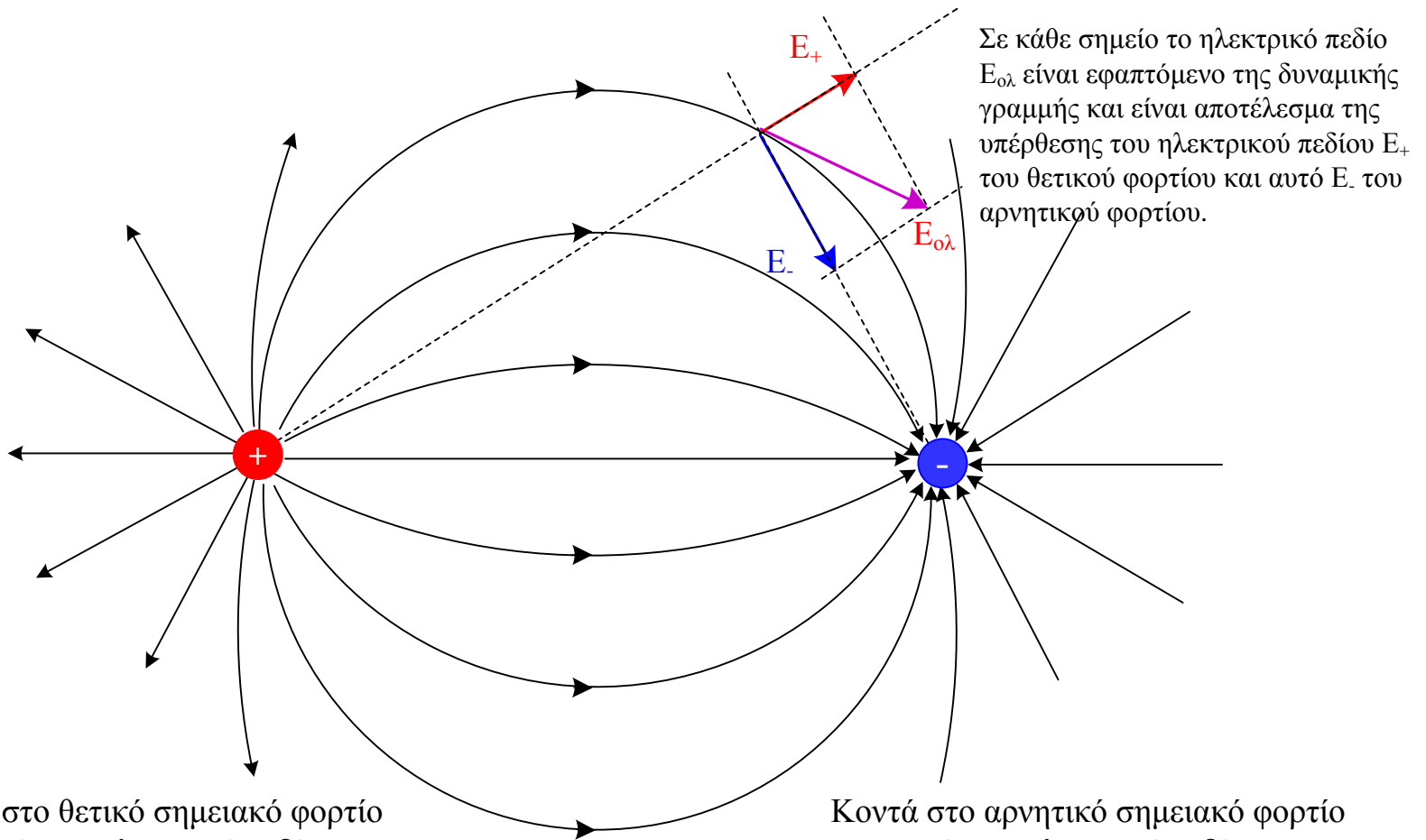
Σχεδιάζουμε N ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές να ξεκινούν και να επεκτείνονται ομοιόμορφα και προς τις τρεις διαστάσεις από ένα σημειακό θετικό φορτίο προς όλες τις διευθύνσεις.

Τότε ο αριθμός δυναμικών γραμμών διά την δεδομένη επιφάνεια S σε απόσταση r από το φορτίο δίνει την πυκνότητα (η) των δυναμικών γραμμών η οποία ισούται με το συνολικό αριθμό των γραμμών που διέρχεται από ολόκληρη τη σφαίρα ακτίνας r και είναι: $\eta = n/S = N/(4\pi r^2)$.

Ανάλογα ο αριθμός δυναμικών γραμμών διά την δεδομένη επιφάνεια S σε μεγαλύτερη απόσταση r' από το φορτίο δίνει μικρότερη πυκνότητα η' των δυναμικών γραμμών η οποία ισούται με το συνολικό αριθμό των γραμμών που διέρχεται από ολόκληρη τη σφαίρα ακτίνας r' και είναι: $\eta' = n'/S = N/(4\pi r'^2)$.

Άρα η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών ελαττώνεται από $\eta = n/S$ σε $\eta' = n'/S$, όπως ελαττώνεται το $1/[\text{απόσταση}]^2$ αφού $\eta/\eta' = (1/r^2)/(1/r'^2)$.

Ηλεκτρικό πεδίο δύο σημειακών φορτίων

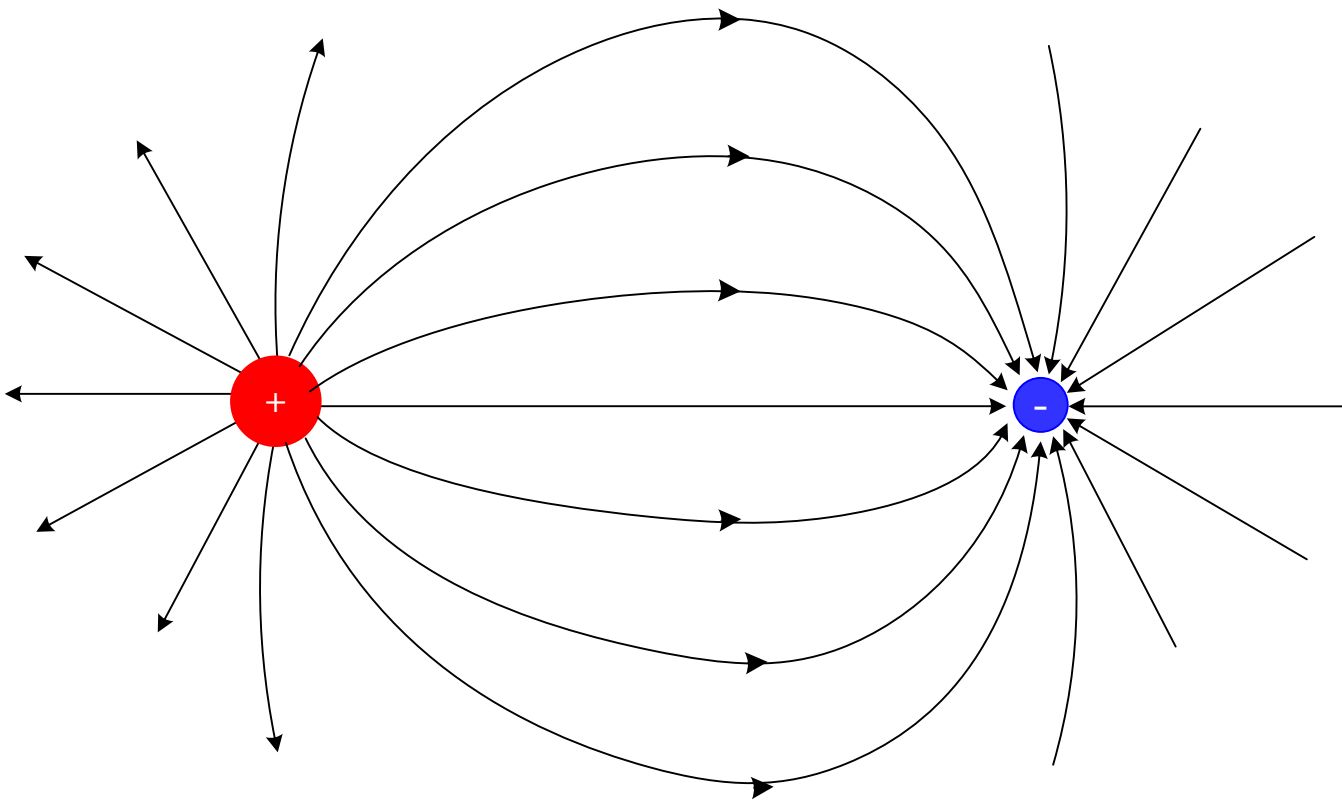


Σε κάθε σημείο το ηλεκτρικό πεδίο $E_{ολ}$ είναι εφαπτόμενο της δυναμικής γραμμής και είναι αποτέλεσμα της υπέρθεσης του ηλεκτρικού πεδίου E_+ του θετικού φορτίου και αυτό E_- του αρνητικού φορτίου.

Κοντά στο θετικό σημειακό φορτίο υπερισχύει το ηλεκτρικό πεδίο του θετικού φορτίου E_+ έτσι οι δυναμικές γραμμές εκβάλουν ακτινικά προς όλες τις διευθύνσεις.

Ανάμεσα στα δύο φορτία οι ηλεκτρικές δυναμικές καμπυλώνουν προς το αρνητικό φορτίο και γίνονται οριζόντιες.

Κοντά στο αρνητικό σημειακό φορτίο υπερισχύει το ηλεκτρικό πεδίο του αρνητικού φορτίου E_- στο οποίο οι δυναμικές γραμμές εισρρέουν ακτινικά από όλες τις διευθύνσεις.



Όταν το θετικό σημειακό φορτίο είναι μεγαλύτερο του αρνητικού, τότε το ηλεκτρικό πεδίο καμπυλώνουν προς το αρνητικό φορτίο σε πιο κοντινές αποστάσεις προς το αρνητικό φορτίο.

ΑΣΚΗΣΗ

Με τον ίδιο τρόπο να σχεδιάσετε ποιοτικά το ηλεκτρικό πεδίο δύο ομόσημων ίσων φορτίων και το ηλεκτρικό πεδίο ομόσημων διαφορετικών φορτίων.

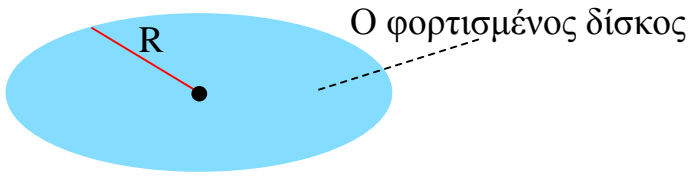
ΑΣΚΗΣΗ

Με τον ίδιο τρόπο να σχεδιάσετε ποιοτικά το ηλεκτρικό πεδίο τεσσάρων ομόσημων φορτίων που είναι στις κορυφές ενός τετραγώνου.

Παραδείγματα υπολογισμού ηλεκτρικών πεδίων συνεχών κατανομών

Φορτισμένος δίσκος και επίπεδο φύλλο μεγάλων διαστάσεων

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z από το κέντρο λεπτού κυκλικού δίσκου ακτίνας R που είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα θετικού φορτίου σ .

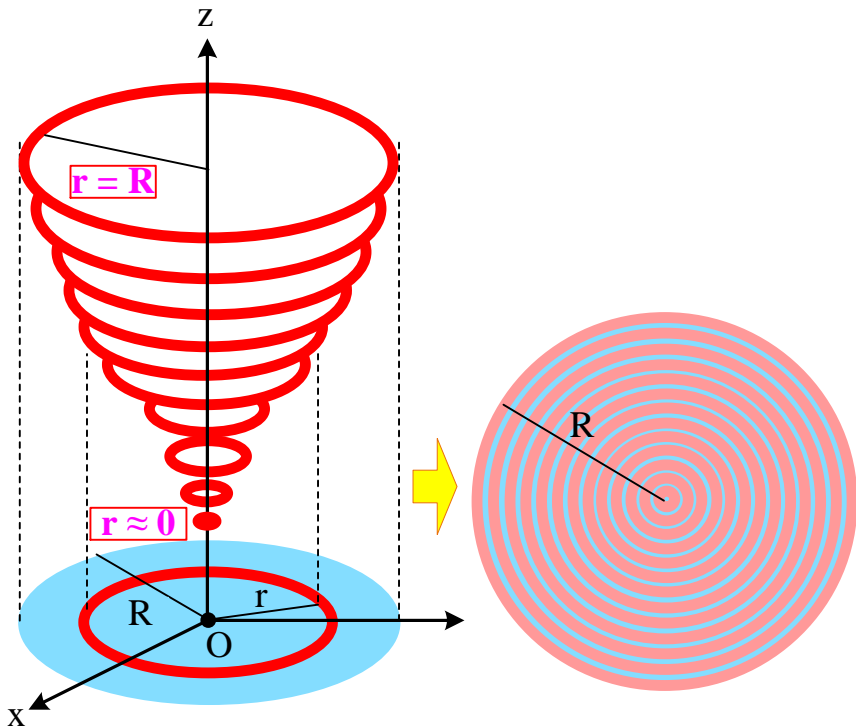
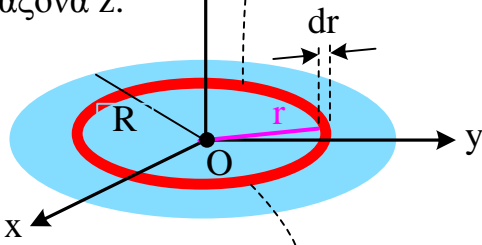


Σχεδιάζω τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων x, y, z

Τοποθετώ τον φορτισμένο δίσκο στο επίπεδο xOy με το κέντρο του στο O .

Το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο $d\mathbf{E}$ από το dq του κάθε dS βρίσκεται επί του άξονα z .

Χωρίζω το δίσκο σε μικρούς στοιχειώδεις κυκλικούς βρόχους εμβαδού dS , οι οποίοι έχουν στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο dq .



Για στοιχειώδες εμβαδόν dS θεωρούμε κυκλικό βρόχο ακτίνας $r \leq R$ και πάχους dr . Αυτή η επιλογή του dS διευκολύνει πάρα πολύ τους υπολογισμούς.

Συναθροίζοντας όλους τους στοιχειώδεις κυκλικούς βρόχους με ακτίνες r από $r \approx 0$ έως $r=R$ μπορεί να γεμίσει ο φορτισμένος δίσκος.

Οι παραπάνω στοιχειώδεις βρόχοι μπορούν να έχουν στοιχειώδες εμβαδόν dS , δηλαδή απειροστό εμβαδόν dS .

Πράγματι αν κόψουμε ένα στοιχειώδη βρόχο και τον απλώσω... ..σε μορφή ευθύγραμμου τμήματος,



..τότε σαν παραλληλόγραμμο αυτό έχει εμβαδόν:
 $dS = \text{Βάση } (2\pi r) \times \text{ύψος } (dr)$.

Το (στοιχειώδες) ηλεκτρικό πεδίο $d\mathbf{E}$ του κάθε βρόχου έχει υπολογιστεί σε προηγούμενο παράδειγμα όπου είδαμε πως βρίσκεται επί του άξονα z (κάθετο στο επίπεδο του βρόχου) και το μέτρο του βρίσκεται από:

$$E = E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Για τη περίπτωση του στοιχειώδη βρόχου αντικαθιστώντας το φορτίο Q από το dq (στοιχειώδες) και έτσι ηλεκτρικό πεδίο E γίνεται dE (στοιχειώδες) και έχουμε:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \sigma 2\pi r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \sigma 2\pi r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνοντας το dE από όλους τους βρόχους με $r=0$ έως $r=R$

$$E = \frac{2\pi \sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Πατηρούμε ότι

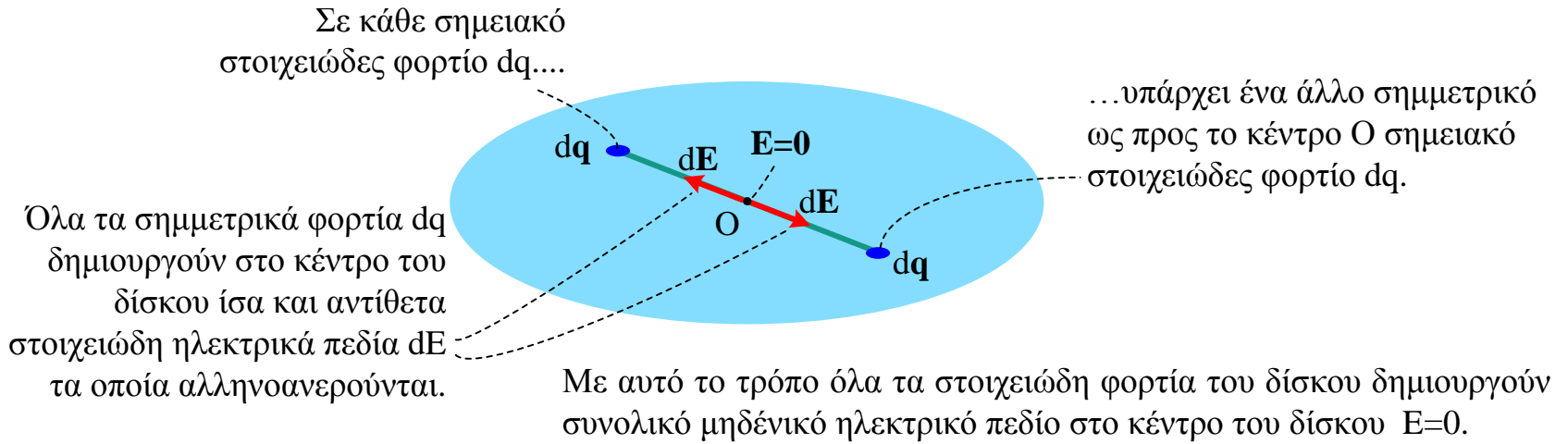
$$r dr = \frac{1}{2} d(r^2) \quad E = \frac{2\pi \sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\frac{1}{2} d(r^2)}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{d(z^2 + r^2)}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^R = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \right]$$

Τελικά
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$$

Διερεύνηση της παραπάνω εξίσωσης του E:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 \sqrt{(z^2 + R^2)}}$$

(i) Αν θέσω $z=0$, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του φορτισμένου δίσκου, τότε ο δεύτερος όρος γίνεται $\sigma/2\epsilon_0$ και αντισταθμίζει τον πρώτο όρο και έτσι το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται $E=0$. Αυτό είναι αναμενόμενο και εξηγείται ως εξής:



(ii) Αν θέσω $R=\infty$, τότε το ηλεκτρικό πεδίο από αυτήν την εξίσωση αναφέρεται στην περίπτωση που ο δίσκος επεκτείνεται παντού στο επίπεδο δημιουργώντας ένα επίπεδο μεγάλων διαστάσεων (άπειρο) ομοιόμορφα επίπεδο φορτισμένο λεπτό φύλλο. Σε αυτή τη περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Σε αυτή τη περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο μεγάλων διαστάσεων φύλλο.

