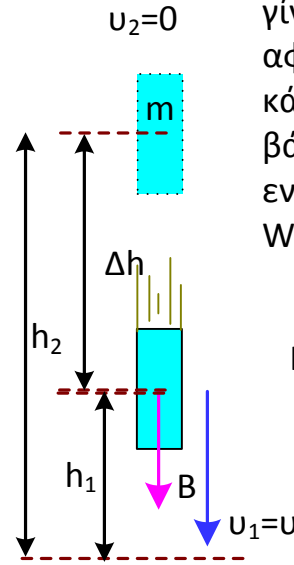


Η δύναμη F αντιτίθεται στο βάρος του σώματος και ανυψώνει με πρακτικά μηδενική ταχύτητα το σώμα σε ύψος Δh παράγοντας ενέργεια-έργο:

$$W_F = F \Delta h = B \Delta h$$

Η ενέργεια αυτή αποθηκεύεται στο σώμα σαν δυναμική ενέργεια: $W_F = E_{\delta uv} = B \Delta h$, γιατί έχει την δυνατότητα το σώμα να αποδώσει την ενέργεια πίσω.



Το ότι το σώμα στο ανώτατο σημείο έχει δυναμική ενέργεια γίνεται αντιληπτό, απλά αφήνοντας το σώμα να πέσει κάτω με την επίδραση του βάρους. Έτσι αποκτά κινητική ενέργεια από το έργο του βάρους W_B :

$$W_B = B \Delta h = 1/2 m u^2$$

Η οποία γράφεται:

$$mg(h_2 - h_1) = 1/2 m (u_1)^2 - 1/2 m (u_2)^2$$

$$mgh_1 + 1/2 m (u_1)^2 = mgh_2 + 1/2 m (u_2)^2$$

Η δυναμική ενέργεια σε ύψος h_1 Η δυναμική ενέργεια σε ύψος h_2

Δηλαδή η ολική ενέργεια ενός σώματος που είναι το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας διατηρείται σταθερό:

$$W_{\sigma uv} = mgh + 1/2 m (u)^2 = \text{σταθερό}$$

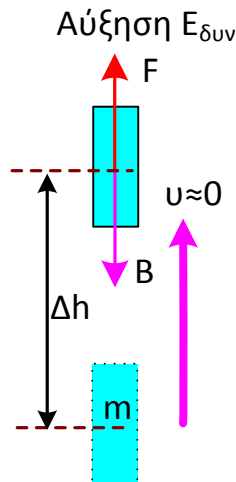
Αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Έργο δύναμης εντός συντηρητικού πεδίου

Για παράδειγμα θεωρούμε το βαρυντικό συντηρητικό πεδίο

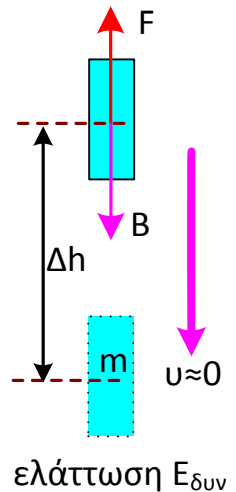
Αν μια δύναμη του F που είναι ίση και αντίθετη του βάρους του σώματος και μετακινεί το σώμα στην φορά της F και ανυψώνει με πρακτικά μηδενική ταχύτητα το σώμα σε ύψος Δh τότε η F παράγει ενέργεια-έργο: $W_F = F \Delta h = B \Delta h$.

Η ενέργεια αυτή **προστίθεται** στο σώμα σαν δυναμική ενέργεια $E_{\delta uv}$, η οποία έτσι αυξάνεται.



Αν η δύναμη του F αντιτίθεται στο βάρος του σώματος και το σώμα μετακινείται προς τα κάτω αντίθετα από την φορά της F με πρακτικά μηδενική ταχύτητα το σώμα σε βάθος Δh τότε η F καταναλώνει ενέργεια-έργο: $W_F = -F \Delta h = B \Delta h$.

Η ενέργεια **αφαιρείται** από την δυναμική ενέργεια $E_{\delta uv}$ του σώματος η οποία έτσι ελαττώνεται.




Η ενέργεια αυτή αποθηκεύεται στο σώμα σαν δυναμική ενέργεια: $W_F = E_{\delta uv} = B \Delta h$, γιατί έχει την δυνατότητα το σώμα να αποδώσει την ενέργεια πίσω.

Επομένως το έργο της δύναμης F που ασκείται σε ένα σώμα και είναι ίση και αντίθετη της δύναμης του συντηρητικού πεδίου κατά την μετακίνηση του σώματος μπορεί:

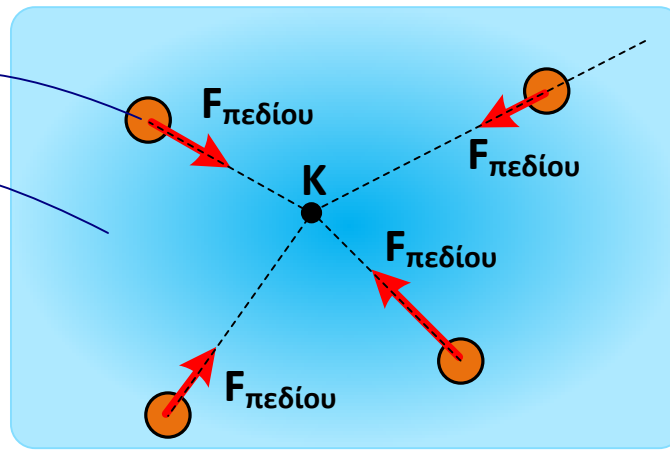
- (i) Να αυξάνει την δυναμική ενέργεια του σώματος όταν η μετατόπιση του σώματος γίνεται στην ίδια φορά με τη δύναμη F .
- (ii) Να ελαττώνει την δυναμική ενέργεια του σώματος όταν η μετατόπιση του σώματος γίνεται στην αντίθετη φορά με τη δύναμη F .

Συνάρτηση Δυναμικής ενέργειας

Διαθέτουμε ένα κατάλληλο υπόθεμα  (πχ μάζα-(βαρυτικό πεδίο) φορτίο (Ηλεκτρικό πεδίο).

Τοποθετούμε το υπόθεμα....

...μέσα στο συντηρητικό πεδίο (π.χ. βαρυτικό, ηλεκτρικό,...)



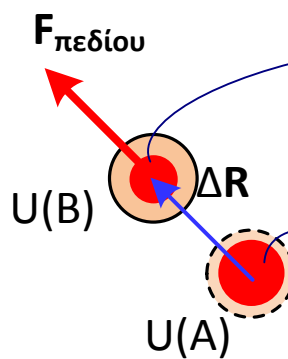
Τοποθετώντας το υπόθεμα σε διάφορα σημεία του πεδίου και σημειώνουμε την δύναμη του πεδίου που ασκείται σε αυτό.

Αν προέκταση της δύναμης του πεδίου που ασκείται στο υπόθεμα στις διάφορες θέσεις διέρχεται από ένα κέντρο K, τότε η δύναμη του πεδίου λέγεται **κεντρική**.

Κεντρική είναι η δύναμη του βαρυτικού και του ηλεκτρικού πεδίου.

Η δύναμη $F_{\text{πεδίου}}$ ενός συντηρητικού πεδίου μπορεί να ωθεί σε απόσταση ΔR **αυθόρμητα** παράγοντας (θετικό) έργο $F\Delta R = W_{\text{πεδίου}} > 0$ το κατάλληλο υπόθεμα (πχ μάζα-(βαρυτικό πεδίο) φορτίο (Ηλεκτρικό πεδίο).

Το έργο $W_{\text{πεδίου}}$ παράγεται προς τη διεύθυνση όπου «καταλανώνεται» (ελαττώνεται) η δυναμική ενέργεια ($\Delta U < 0$) του πεδίου ώστε : $-\Delta U = F\Delta R = \Delta W_{\text{πεδίου}} > 0$.



Το ποσό της δυναμικής ενέργειας που διαθέτει το υπόθεμα στην τελική θέση B είναι μικρότερο κατά το έργο $W_{\text{πεδίου}}$: $U(B) = U(A) - W_{\text{πεδίου}} = U(A) - F\Delta R$.

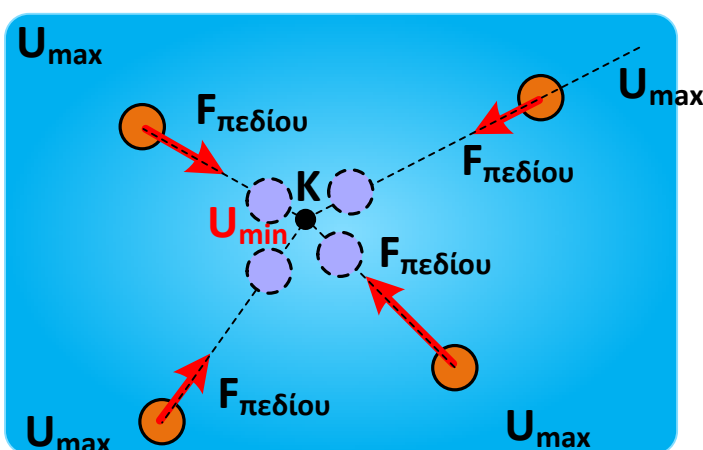
Το ποσό της δυναμικής ενέργειας $U(A)$ που διαθέτετε το υπόθεμα στην αρχική θέση A είναι μεγαλύτερο.

Δυναμική ενέργεια τελική < Δυναμική ενέργεια αρχική
 $U(B) < U(A)$

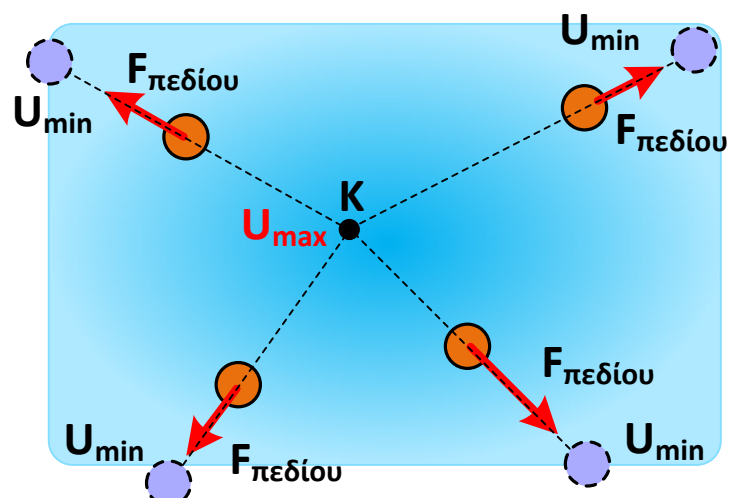
Η δύναμη $F_{\text{πεδίου}}$ του συντηρητικού πεδίου παράγει έργο $W_{\text{πεδίου}}$ όσο είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας :

$$0 < W_{\text{πεδίου}} = F_{\text{πεδίου}} \Delta R = -\Delta U = -(U(B) - U(A))$$

Επομένως το υπόθεμα θα κινηθεί αυθόρμητα με την επίδραση της δύναμης $F_{\text{πεδίου}}$ του συντηρητικού πεδίου προς την κατεύθυνση που ελαττώνεται η δυναμική ενέργεια.



Σε ελκτικό κεντρικό πεδίο το υπόθεμα θα κινηθεί από τα άκρα με μέγιστη δυναμική ενέργεια U_{max} προς το κέντρο του K όπου εκεί θα έχει τη μικρότερη δυναμική ενέργεια U_{min} .



Σε απωστικό κεντρικό πεδίο το υπόθεμα θα κινηθεί από περιοχές πλησιέστερα στο κέντρο K με μέγιστη δυναμική ενέργεια U_{max} προς τα άκρα του πεδίου όπου εκεί έχει τη μικρότερη δυναμική ενέργεια U_{min} .

Ξεκινώντας από τη σχέση : $F_{\text{πεδίου}} \Delta R = -\Delta U$ αυτή γράφεται: $F_{\text{πεδίου}} = -\frac{\Delta U}{\Delta R}$

και σαν παράγωγος γράφεται: $F_{\text{πεδίου}} = -\frac{dU}{dR}$ Το μείον φανερώνει ότι η δύναμη έχει την κατεύθυνση ΔR όπου γίνεται η αυθόρμητη κίνηση και ελαττώνεται η δυναμική ενέργεια.

Δηλαδή η **αρνητική παράγωγος** ως προς την θέση R Μέσα στο συντηρητικό πεδίο μιας συνάρτησης $U(R)$ η οποία εκφράζει την τιμή της δυναμικής ενέργειας σαν συνάρτηση της απόστασης R μας δίνει την δύναμη του πεδίου.

Έτσι γνωρίζοντας την συνάρτησης της **δυναμικής ενέργειας $U(R)$** σε κάθε σημείο του χώρου μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα την δύναμη του πεδίου $F_{\text{πεδίου}}$ παραγωγίζοντας.

Είναι επομένως είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε τη συνάρτησης της **δυναμικής ενέργειας $U(R)$** σε κάθε σημείο του χώρου ενός συντηρητικού πεδίου.

Για να προσδιορίσουμε τη συνάρτησης της **δυναμικής ενέργειας $U(R)$** θα πρέπει να την υπολογίσουμε. Αυτό γίνεται με το να ασκούμε μια δύναμη ακριβώς αντίθετη από το πεδίο ώστε να μην επιταχυνθεί και αποκτήσει κινητική ενέργεια. Υπολογίζοντας το έργο W_F της δύναμης που θα ασκήσουμε στο σώμα από μια δεδομένη θέση R του πεδίου με $U(R)$ μέχρι μια άλλη θέση R_0 όπου η δυναμική ενέργεια $U_0(R_0)$ είναι γνωστή σταθερά. Η $U_0(R_0)$ για το βαρυτικό και ηλεκτρικό πεδίο είναι πολύ μακριά από το κέντρο K (στο άπειρο) όπου η δύναμη του πεδίου είναι $F_{\text{πεδίου}}=0$ και επομένως $U_0(R_0=\infty)=0$.

$$W_F = [U_0(R_0) - U(R)] \rightarrow U(R) = U_0(R_0) - W_F \rightarrow U(R) = U_0(R_0) - \int_R^{R_0} (-F_{\text{πεδίου}}) dR$$

12-7 Δυναμικά πεδία ασταθούς ισορροπίας

Στις προηγούμενες περιπτώσεις που εξετάσαμε η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας παρουσίαζε μονότονη μεταβολή αύξηση ή μείωση και επομένως αρκείται δύναμη από το πεδίο προς την φορά της ελάττωσης τη δυναμικής ενέργειας. Εδώ θα εξετάσουμε περιπτώσεις όπου η δυναμική ενέργεια παρουσιάζει μέγιστο. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο χώρος ανάμεσα σε δύο ελκτικά κέντρα όπως στη περίπτωση των πεδίων βαρύτητας ανάμεσα στη γη και στη σελήνη. Στο χώρο αυτό υπάρχει ένα σημείο όπου η βαρύτητα από τη γη εξουδετερώνεται από αυτή της σελήνης. Το ερώτημα είναι αν ένα σώμα που θα βρεθεί πως θα ισορροπίσει;

Το πώς θα συμπεριφερθεί ένα σώμα μάζας m που θα βρεθεί ανάμεσα στη γη και στη σελήνη το καθορίζει η συνολική συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U_{\text{ολ}}$ που είναι το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας της γης U_γ και της σελήνης U_σ . Έτσι θεωρώντας πως η γη είναι στην αρχή $r=0$ του άξονα της απόστασης r και η σελήνη στην απόσταση $r=r_\sigma$ από τη γη τότε

$$U_\gamma(r) = -G \frac{M_\gamma m}{r} \quad U_\sigma(r) = -G \frac{M_\sigma m}{r_\sigma - r} \quad U_{\text{ολ}}(r) = -G \frac{M_\gamma m}{r} - G \frac{M_\sigma m}{r_\sigma - r}$$

Παρατηρώ στο παρακάτω σχήμα πως η συνολική συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U_{\text{ολ}}(r)$ έχει ένα μέγιστο στη θέση $r=r_{\text{max}}$. Η συνολική βαρυτική δύναμη στο σώμα μάζας m βρίσκεται από την αρνητική παράγωγο της $U_{\text{ολ}}$

$$F(r) = -\frac{dU_{\text{ολ}}}{dr} = -\frac{dU_\gamma}{dr} + \frac{dU_\sigma}{dr} = -G \frac{M_\gamma m}{r^2} + G \frac{M_\sigma m}{(r_\sigma - r)^2}$$

