Συνάρτηση Δυναμικής ενέργειας

Φυσική σημασία συνάρτησης δυναμικής ενέργειας

Έργο που παράγεται από το πεδίο $dW = F_r\, dr$

Μπορώ να εξισώσω το έργο dW της δύναμης του πεδίου με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας dU

Αλλά η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας U θα είναι ελλάτωση (dU<0)

$dU = -\,F_r\, dr$

Το μείον γιατί έχω ελλάτωση της U

Το μείον εξασφαλίζει ότι η αυθόρμητη κίνηση από το πεδίο γίνεται προς τη κατεύθυνση της ελλάτωσης της δυναμ ενέργειας.

Μεταβολή δυναμ. ενεργ. = - έργο της F

$dU = -\,F_r\, dr$

Η δύναμη του πεδίου που ωθεί το κατάλληλο υπόθεμα (πχ μάζα (βαρΠεδ) φορτίο (ΗλεκΠεδ)) προς τη διεύθυνση όπου «καταλανώνεται (ελαττώνεται) η δυναμική ενέργεια του πεδίου

$$F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Δηλ η **<u>αρνητική</u>** παράγωγος της U ως προς τη μετατόπιση r μας παρέχει τη δύναμη F_r του πεδίου

Πως μπορώ να βρώ τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας

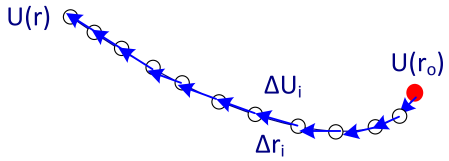
$dU = -\,F_r\, dr$

ή

$\Delta U = -\,F_r\, \Delta r$

$U_o + \Sigma(\Delta U) = U(r)$

Ξεκινώντας από κάποιο σημείο r_o του πεδίου όπου η δυναμική ενέργεια παίρνει μια γνωστή τιμή (πχ $U(r_o)=0$), προσθέτω κατά τις στοιχειώδεις μετατοπίσεις Δr από το r_o μέχρι τη τελική θέση r τις μεταβολές $\Delta U = -F_r \Delta r$ και έτσι υπολογίζω την απόλυτη τιμή της U(r).



$U(r_o) + \Sigma_i(\overbrace{-F_{ri}\Delta r_i}^{\Delta U_i}) = U(r)$ Όταν $\Delta r \rightarrow 0$ $U(r) = U(r_o) + \int_{r_o}^{r} -F_r dr$

Βρίσκω την συνάρτιση της δυναμικής ενέργειας U(r)

Θέτοντας την γνωστή τιμή της $U(r_o)$ και Θέτοντας τη συνάρτηση της F_r

Πχ για το ελατήριο [$F_x = -K\, x$] ποια είναι η U(x).

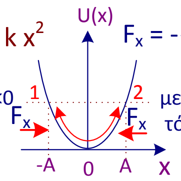
$$U(x) = U(x_o) + \int_{x_o}^{x} (-F_x dx) = U(x_o) + \int_{x_o}^{x} (-(-k\, x)\, dx) = 0 + (½\, k\, x^2 - ½\, k\, 0^2) = ½\, k\, x^2$$

Παρατηρώ πως για Xo=0 έχω $F_x=0$, άρα U(xo=0)=0

$U = (1/2)\, k\, x^2$ $F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx$

με dr>0 dU<0 τότε $F_x>0$

με dr>0 dU>0 τότε $F_x<0$



Πχ για το πεδίο Coulomb [$F_r = K_C(Q\, q)/r^2$] ποια είναι η U(r)

Τα Q και q είναι αλγεβρικά

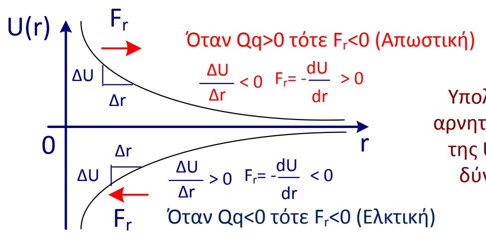
Έτσι η δύναμη είναι ελκτική $F_r<0$ Όταν Qq<0 και απωστική $F_r>0$ όταν Qq>0

$$U(r) = U(r_o) + \int_{r_o}^{r} -(F_r dr) = U(r_o) + \int_{r_o}^{r} -(k_C \frac{Q\,q}{r^2} dr) = 0 - k_C Q\, q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = -\,k_C Q\, q\, [\,-1/r - (-1/\infty)\,)]$$

Παρατηρώ πως για $r_o=\infty$ έχω $F_r=0$, άρα $U(r_o=\infty)=0$

$$U(r) = k_C \frac{Q\,q}{r}$$

Συνάρτηση Δυναμικής ενέργειας Πεδίου Coulomb



Υπολογίζοντας την αρνητική παράγωγο της U(r) Εξάγω την δύναμη Coulomb

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -(-k_C \frac{Q\,q}{r^2}) = k_C \frac{Q\,q}{r^2}$$

Τα M και m είναι θετικές ποσότητες

Έτσι για να είναι η βαρ δύναμη ελκτική $F_r<0$, όπως στη περίπτωση της δύναμης Coulomb για $Qq<0$, βάζω − εμπρός από τη βαρ δύναμη

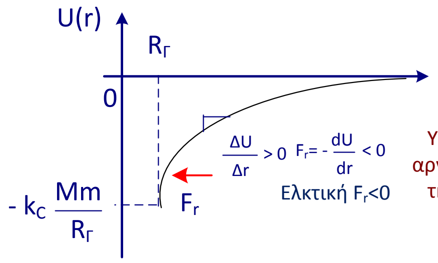
Πχ για το βαρυτικό πεδίο [$F_r = K_N(M\,m)/r^2$] ποια είναι η U(r)

$$U(r) = U(r_o) + \int_{r_o}^{r} (-F_r dr) \;=\; U(r_o) + \int_{r_o}^{r} -(-k_C \frac{M\,m}{r^2}\, dr) \;=\; 0 + k_C Mm \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} \;=\; -\,k_C Mm[\,1/r - (1/\infty)\,)]$$

Παρατηρώ πως για $r_o=\infty$ έχω $F_r=0$, άρα $U(r_o=\infty)=0$

$$U(r) = -\,k_N \frac{Mm}{r}$$

Συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας Βαρυτικού Πεδίου Newton



Υπολογίζοντας την αρνητική παράγωγο της U(r) Εξάγω την δύναμη Newton

$$F_r = -\frac{dU}{dr} \;=\; -(k_N \frac{Mm}{r^2}) \;=\; k_N \frac{Mm}{r^2}$$

Η U(r) αυξάνεται καθώς αυξάνεται το r από το κέντρο της Γης (δηλ το ύψος).

Δr

Δύναμη και Δυναμική Ενέργεια

αν τα P και P_o διαφέρουν κατά d**r**

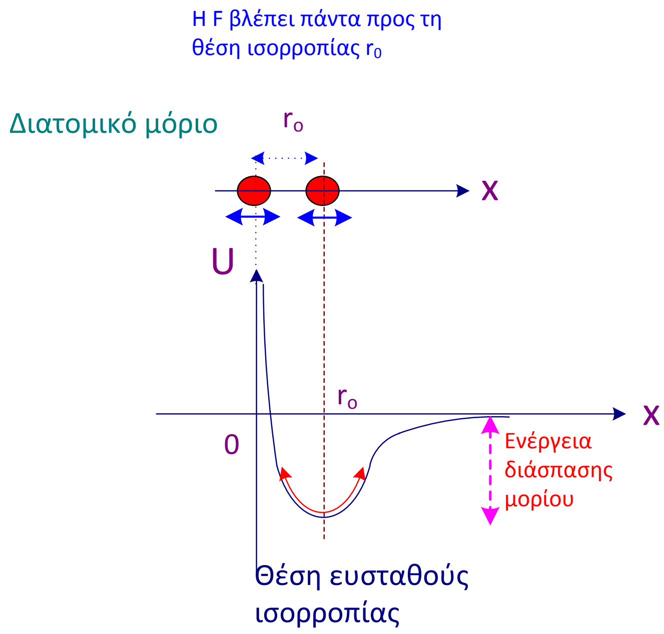
$$dU = U(P) - U(P_O) = -\mathbf{F}\, d\mathbf{r} \qquad dU = -\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

αν $dy = 0$, $dz = 0$ $\qquad dU = -F_x\, dx \qquad F_x = -\frac{dU_x}{dx}$

Γενικά

$$F_x = -\frac{\partial U_x}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U_y}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U_z}{\partial z}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης Δυναμικής ενέργειας δίνει τη Δύναμη



Στα διατομικά μόρια το δυναμική ενέργεια για την κίνηση του κάθε ατόμου είναι

$$U(x) = U_o(e^{-2(x-xo)/b} - 2e^{-(x-xo)/b})$$

Πόση είναι η δύναμη που ασκείται σε κάθε άτομο ;
Για ποιά τιμή του x είναι F = 0, >0, <0

x_o , b , U_o : σταθερές

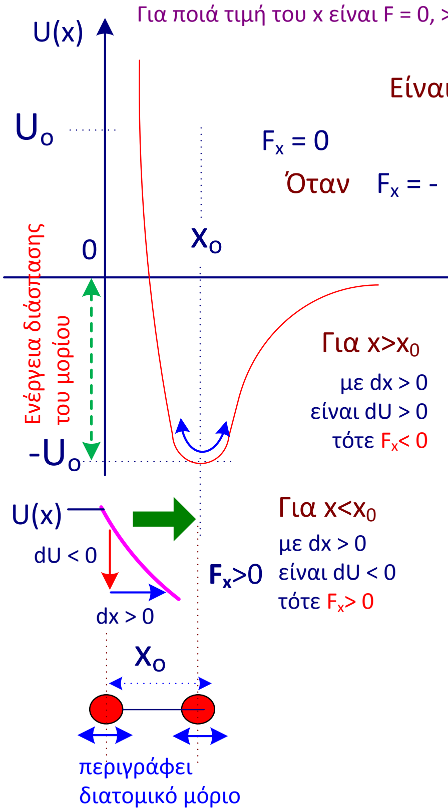
Είναι $F_x = -\dfrac{dU}{dx}$

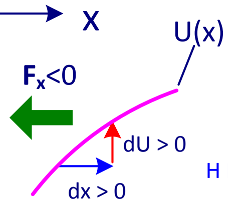
$F_x = 0$

Όταν $F_x = -\dfrac{dU}{dx} = U_o\{(2/b)\, e^{-2(x-xo)/b} - (2/b)\, e^{-(x-xo)/b}\} = 0$

$x - x_o = 0$

$x = x_o \quad F_x = 0$





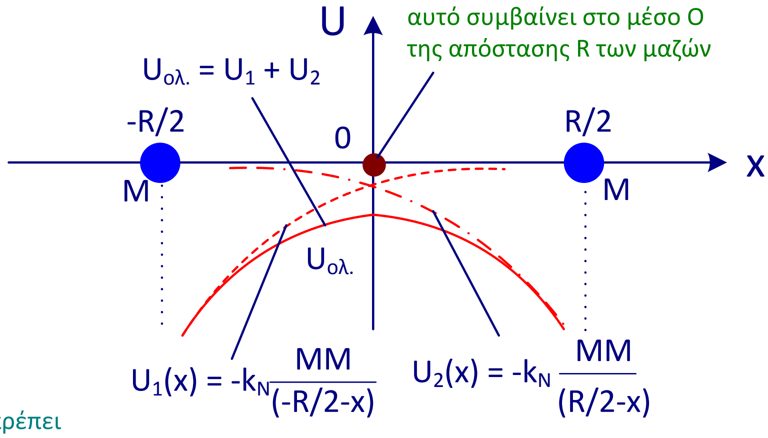
Η F_x βλέπει πάντα προς το x_0 ευσταθής ισορροπία

Αυτό επιβεβαιώνεται από τη 2η παραγωγο της U

$$\frac{d^2U}{dx^2} = U_o\{(4/b^2)\, e^{-2(x-xo)/b} - (2/b^2)\, e^{-(x-xo)/b}\} = 0$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_o} = U_o 2/b^2 > 0 \text{ άρα } U(x=x_0) = \min$$

Ένα σώμα μάζας m ευρίσκεται υπό τη επίδραση του βαρυτικού πεδίου 2 ακίνητων μαζών M, M που ευρίσκονται σε απόσταση R. Πότε το σώμα m μπορεί να ισορροπεί ; Τι είδους ισορροπία μπορεί να είναι αυτή;

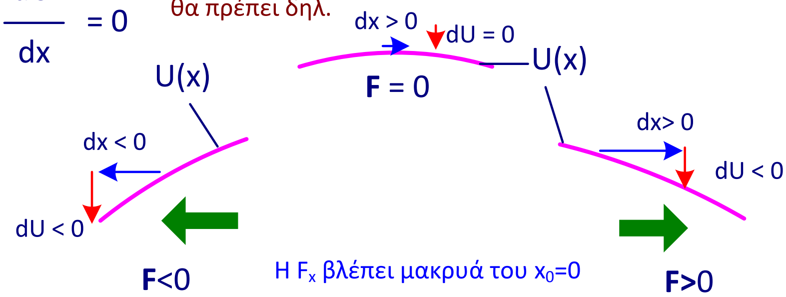


Για να ισορροπεί πρέπει
F=0 ή

$$F = - \frac{dU}{dx} = 0$$

θα πρέπει δηλ.

Η ισορροπία
είναι ασταθής
γιατί



Η F_x βλέπει μακρυά του $x_0=0$

ασταθής ισορροπία

$U_{ολ}(x) = U_1 + U_2$ $\qquad$ $U_{ολ}(x=x_{max}) = max$

δηλ $\quad F_x = - \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{max}} = 0$

και $\quad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{max}} < 0$