

Όριο παραγώγου αριθμητικά

Υποθέτουμε ότι ένα σώμα κινείται ομαλά επιταχυνόμενο με $a=10 \text{ m/s}^2$. Χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε το πείραμα, αν μετράγαμε σε κάποια χρονική στιγμή t π.χ. $t=5 \text{ s}$, το διάστημα ΔS που διανύει μέσα σε χρονικό διάστημα Δt , τότε θα μετράγαμε $\Delta S=1/2at^2$. Από αυτό, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την ταχύτητα του σώματος από το λόγο $v=\Delta S/\Delta t$ και να τη συγκρίνουμε με την ταχύτητα που θα μετράγαμε μέσα σε μικρότερο χρονικό διάστημα Δt . Από τη σύγκριση αυτή θα βρούμε πώς το πηλίκο $v=\Delta S/\Delta t$ αλλάζει καθώς μικραίνει το Δt . Έτσι θα κατανοήσουμε αριθμητικά, την έννοια της παραγώγου ως το όριο που τείνει το πηλίκο $v=\Delta S/\Delta t$, καθώς το Δt τείνει στο μηδέν, όπως το γνωρίζουμε από τον μαθηματικό ορισμό.

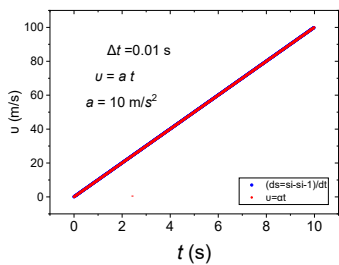
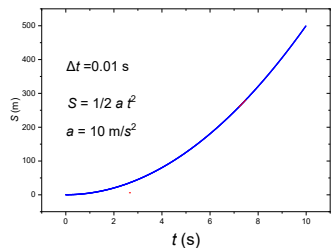
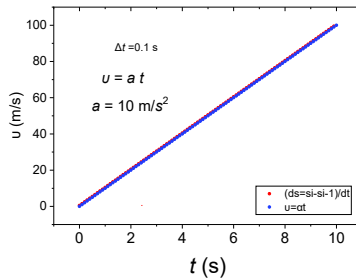
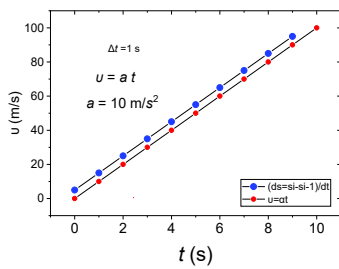
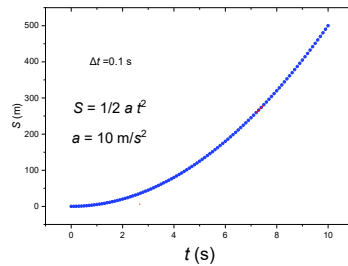
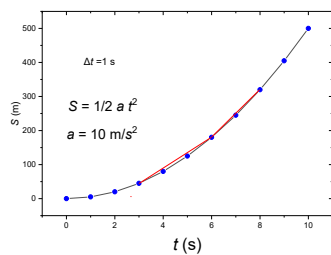
	$u=at \text{ (m/s)}$	$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ (m/s)}$	
$\Delta t=1\text{s}$	50.00000	55	
$\Delta t=0.1\text{s}$	50.00000	50.5	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \Delta t < 0.1 \quad v = \frac{dS}{dt}$
$\Delta t=0.01\text{s}$	50.00000	50.05	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \Delta t < 0.01 \quad v = \frac{dS}{dt}$
$\Delta t=0.001\text{s}$	50.00000	50.005	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \Delta t < 0.001 \quad v = \frac{dS}{dt}$
	$u=at$	$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$	
$\Delta t=1\text{s}$	50.00000	55	
$\Delta t=0.1\text{s}$	50.00000	50.5	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \Delta t < 0.1 \quad v = \frac{dS}{dt}$
$\Delta t=0.01\text{s}$	50.00000	50.05	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \Delta t < 0.01 \quad v = \frac{dS}{dt}$
$\Delta t=0.001\text{s}$	50.00000	50.005	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \Delta t < 0.001 \quad v = \frac{dS}{dt}$

Παρατηρούμε ότι:

Όταν το Δt είναι μικρότερο από το 0.1 s , τότε η ταχύτητα μέχρι το δεύτερο σημαντικό ψηφίο δεν αλλάζει. Άρα αυτό μπορεί να είναι το όριο της παραγώγου, αν τα δύο σημαντικά ψηφία μας αρκούν ή η ακρίβεια των μετρήσεων δεν επιτρέπει να έχουμε επιπλέον σημαντικά ψηφία.

Όταν το Δt είναι μικρότερο από το 0.01 s , τότε η ταχύτητα μέχρι το τρίτο σημαντικό ψηφίο δεν αλλάζει. Άρα αυτό μπορεί να είναι το όριο της παραγώγου, αν τα τρία σημαντικά ψηφία μας αρκούν ή η ακρίβεια των μετρήσεων δεν επιτρέπει να έχουμε επιπλέον σημαντικά ψηφία.

Παρακάτω είναι και η αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις:



Παρατηρούμε ότι από $\Delta t = 0.1$ και πιο κάτω, τρία διαδοχικά σημεία στη γραφική παράσταση της $S(t)$ βρίσκονται πρακτικά σε μια ευθεία. Έτσι, φαίνεται γραφικά ότι φθάσαμε το όριο της παραγώγου, αφού η κλίση $\Delta S / \Delta t$ σε διαδοχικά μικρότερα Δt φαίνεται να μην αλλάζει και γεωμετρικά.