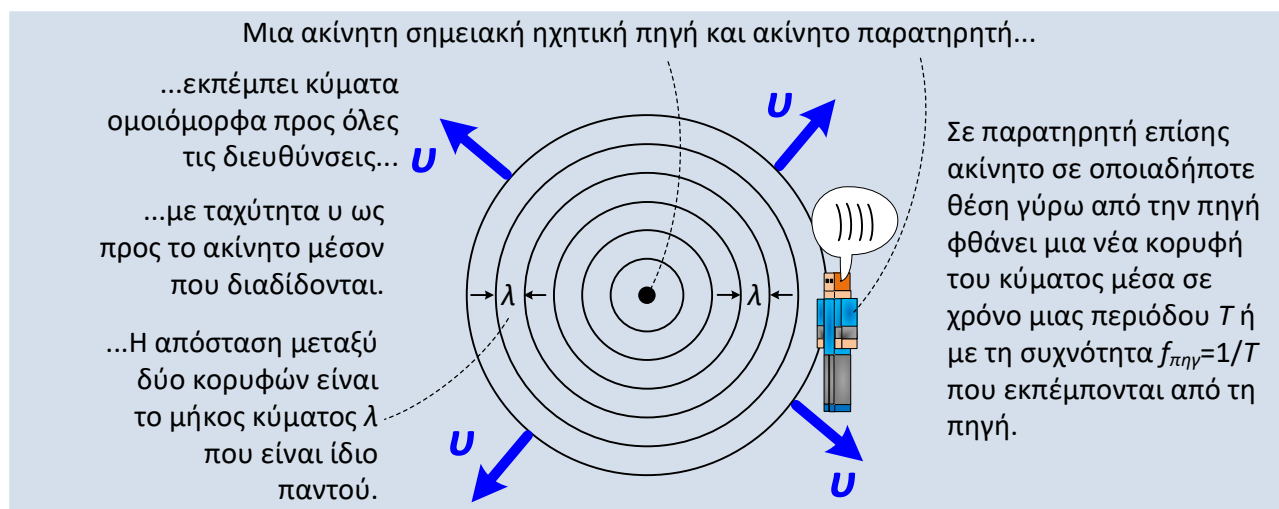


11.12 Φαινόμενο Doppler

Θα εξετάσουμε τα κύματα που παράγονται από κινούμενες πηγές τα οποία καταγράφονται από ακίνητους ή κινούμενους παρατηρητές. Σε αυτές τις περιπτώσεις η συχνότητα ή/και το μήκος κύματος τροποποιούνται με χαρακτηριστικό τρόπο που εξαρτάται από τις ταχύτητες της πηγής και του παρατηρητή. Θα βρούμε τη μετατόπιση στη συχνότητα ή και το μήκος κύματος συναρτήσει των ταχυτήτων.

Ακίνητη πηγή ακίνητος παρατηρητής

Θα εξετάσουμε πρώτα τη περίπτωση που η πηγή και ο παρατηρητής είναι ακίνητοι. Ο ήχος κινείται με ταχύτητα v ως προς το μέσον που διαδίδεται (αέρας).



Θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή σχέση των κυμάτων που συνδέει τη συχνότητα με τη ταχύτητα και το μήκος κύματος: $v = \lambda f$. Λύνοντας ως προς τη συχνότητα f μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συχνότητα άφιξης των κυμάτων στο παρατηρητή που συνδέεται με την ταχύτητα άφιξης $v_{αφ}$ των κυμάτων στον παρατηρητή

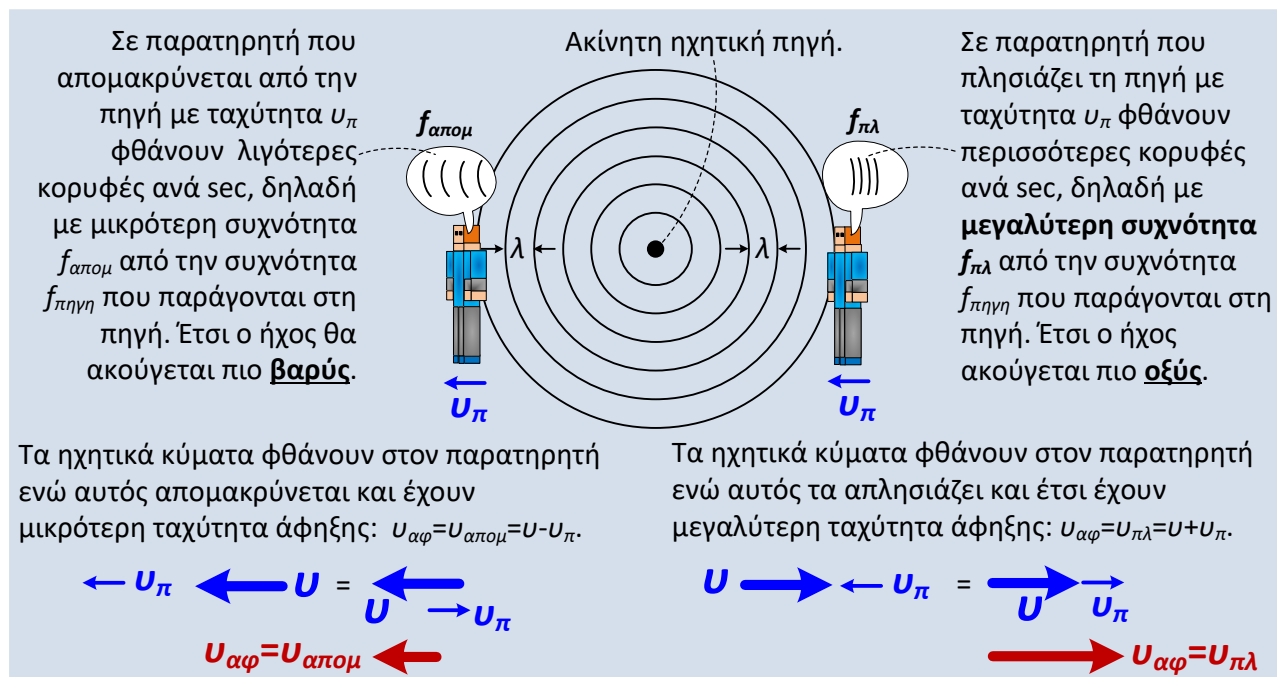
$$f_{αφ} = \frac{v_{αφ}}{\lambda} = \frac{\text{ταχύτητα άφιξης των κυμάτων}}{\text{μήκος κύματος}} \quad (11.63)$$

Για την παραπάνω περίπτωση ακίνητης πηγής και παρατηρητή, τα κύματα φθάνουν στο παρατηρητή με την ταχύτητα διάδοσης του ηχητικού κύματος $v_{αφ} = v$, με το μήκος κύματος να είναι αμετάβλητο λ , ενώ η συχνότητα $f_{αφ}$ του κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι η ίδια συχνότητα $f_{πηγ}$ που παράγει η πηγή τα ηχητικά κύματα

$$f_{αφ} = \frac{v_{αφ}}{\lambda} = \frac{v}{\lambda} = f_{πηγ}$$

Ακίνητη πηγή κινούμενος παρατηρητής

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα v_π , ενώ η πηγή είναι ακίνητη. Ο ήχος κινείται με ταχύτητα v ως προς το μέσον που διαδίδεται (αέρας).



Η συχνότητα $f_{\pi\lambda}$, με την οποία φθάνουν τα κύματα στον παρατηρητή που πλησιάζει την πηγή, βρίσκεται από την Εξ. (11.63) αφού θέσουμε $v_{\alpha\phi} = v + v_\pi$ και $\lambda = v/f_{\pi\eta\gamma\eta}$ παίρνουμε

$$f_{\pi\lambda} = \frac{v_{\alpha\phi}}{\lambda} = \frac{v + v_\pi}{\lambda} = \frac{v + v_\pi}{v/f_{\pi\eta\gamma\eta}} = f_{\pi\eta\gamma\eta} \frac{v + v_\pi}{v} = f_{\pi\eta\gamma\eta} \left(1 + \frac{v_\pi}{v}\right)$$

Συχνότητα πλησιάζοντας την πηγή $f_{\pi\lambda} = f_{\alpha\phi} = f_{\pi\eta\gamma\eta} \left(\frac{v+v_\pi}{v}\right)$ (11.64)

Εδώ η ταχύτητα του παρατηρητή που πλησιάζει τη πηγή προστίθεται στη ταχύτητα του ήχου και αυξάνεται η $v_{\alpha\phi}$. Επομένως ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο, συχνότητας μεγαλύτερης της πηγής κατά τον συντελεστή $\left(\frac{v+v_\pi}{v}\right)$ ο οποίος είναι πιο οξύς.

Ανάλογα βρίσκουμε την συχνότητα $f_{\alpha\pi}$ με την οποία φθάνουν τα κύματα στον παρατηρητή που απομακρύνεται από την πηγή αφού θέσουμε $v_{\alpha\phi} = v - v_\pi$ και $\lambda = v/f_{\pi\eta\gamma\eta}$

$$f_{\alpha\pi} = f_{\alpha\phi} = \frac{v_{\alpha\phi}}{\lambda} = \frac{v - v_\pi}{\lambda} = \frac{v - v_\pi}{v/f_{\pi\eta\gamma\eta}} = f_{\pi\eta\gamma\eta} \frac{v - v_\pi}{v} = f_{\pi\eta\gamma\eta} \left(1 - \frac{v_\pi}{v}\right)$$

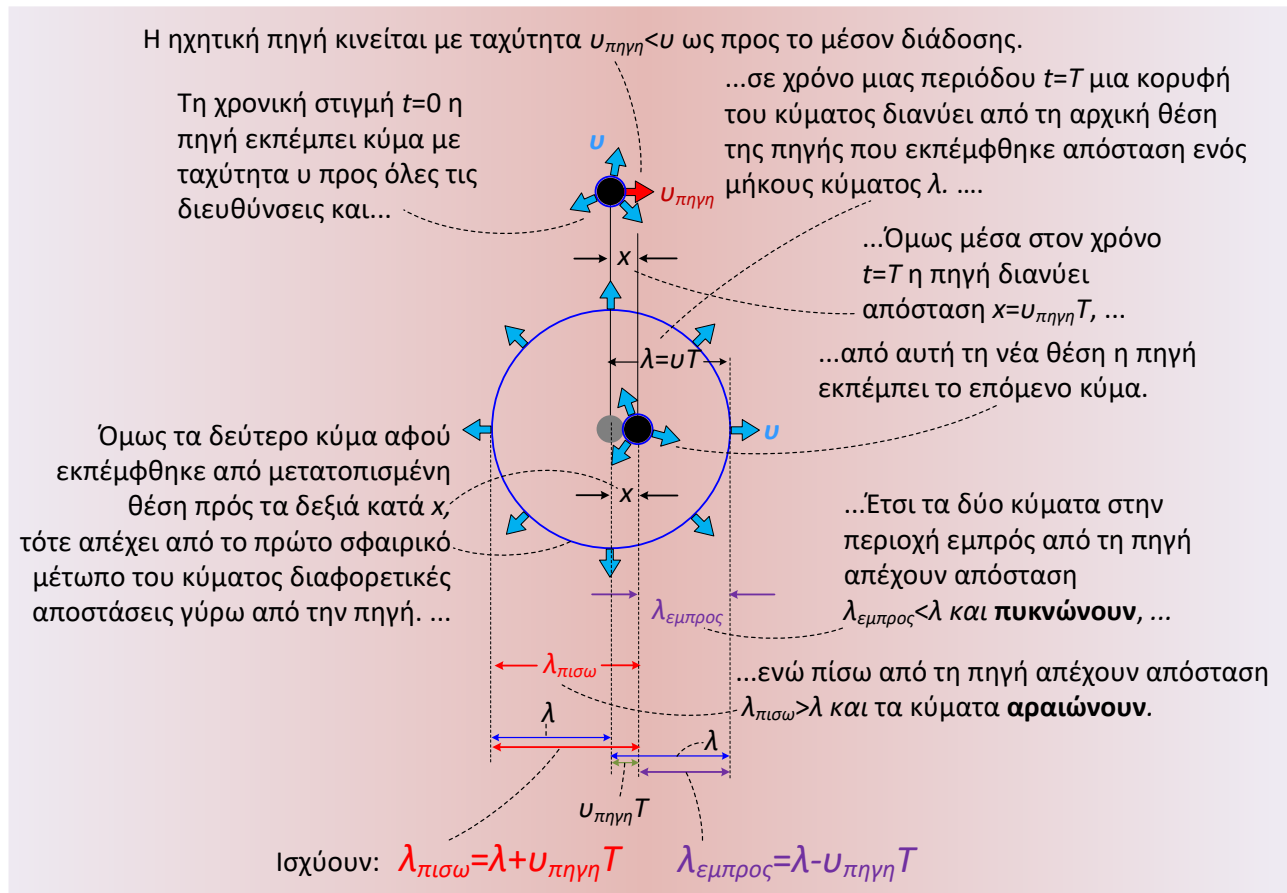
Συχνότητα απομακρυνόμενος από πηγή $f_{\alpha\pi} = f_{\alpha\phi} = f_{\pi\eta\gamma\eta} \left(\frac{v-v_\pi}{v}\right)$ (11.65)

Εδώ η ταχύτητα του παρατηρητή αφαιρείται από τη ταχύτητα του ήχου και μειώνεται η $v_{\alpha\phi}$. Επομένως, ο παρατηρητής που πλησιάζει τη πηγή αντιλαμβάνεται ήχο, συχνότητας μικρότερης της πηγής κατά τον συντελεστή $\left(\frac{v-v_\pi}{v}\right)$ ο οποίος είναι πιο βαρύς – μπάσος.

Κινούμενη πηγή, ακίνητος ή κινούμενος παρατηρητής

Θα εξετάσουμε την περίπτωση που η πηγή κινείται με ταχύτητα $v_{\text{πηγή}}$ ως προς το μέσον διάδοσης, ενώ ο παρατηρητής είναι ακίνητος $v_{\text{π}} = 0$. Ο ήχος που παράγεται από την κινούμενη πηγή κινείται κανονικά με την ταχύτητα διάδοσης του ήχου v στο μέσο.

Επομένως καταλήξαμε ότι τα μήκος κύματος δηλαδή τα μήκη που απέχουν δύο διαδοχικές



κορυφές του κύματος $\lambda_{\text{εμπρός}}$ και $\lambda_{\text{πίσω}}$ εμπρός και πίσω, αντίστοιχα, από την κινούμενη πηγή είναι μικρότερο και μεγαλύτερο, αντίστοιχα, κατά το μήκος $u_{\text{πηγή}} T$ που διάνυσε η πηγή μέσα σε μια περίοδο,

$$\lambda_{\text{εμπρος}} = \lambda - v_{\text{πηγη}} T = (v - v_{\text{πηγη}}) T \text{ και } \lambda_{\text{πισω}} = \lambda + T = (v + v_{\text{πηγη}}) T \quad (11.66)$$

$$\text{Μήκος κύματος εμπρός από τη κινούμενη πηγή} \quad \lambda_{\text{εμπρος}} = \frac{v - v_{\text{πηγη}}}{f_{\text{πηγη}}} \quad (11.67)$$

$$\text{Μήκος κύματος πίσω από τη κινούμενη πηγή} \quad \lambda_{\text{πισω}} = \frac{v + v_{\text{πηγη}}}{f_{\text{πηγη}}} \quad (11.68)$$

Με βάση τις Εξ. (11.67) και (11.68) θα βρούμε τις συχνότητες $f_{\text{εμπρος}}$ και $f_{\text{πισω}}$ που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής εμπρός και πίσω τη πηγής, αντίστοιχα, από την πηγή χρησιμοποιώντας την Εξ. (1.63). Σε αυτή την εξίσωση αν θέσουμε $f_{\text{εμπρος}} = f_{\alpha\phi}$, $v_{\alpha\phi} = v$ και $\lambda = \lambda_{\text{εμπρος}}$ από την Εξ. (11.67), τότε παίρνουμε

$$\text{Συχνότητα εμπρός από τη κινούμενη πηγή} \quad f_{\text{εμπρος}} = f_{\alpha\phi} = \frac{v}{v - v_{\text{πηγη}}} f_{\text{πηγη}} \quad (11.69)$$

και αν θέσουμε στη Εξ. (11.63) $f_{\alpha\phi} = f_{\text{πισω}}$, $v_{\alpha\phi} = v$ και $\lambda = \lambda_{\text{πισω}}$ από την Εξ. (11.68), τότε παίρνουμε

$$\text{Συχνότητα πίσω από τη κινούμενη πηγή} \quad f_{\text{πισω}} = f_{\alpha\phi} = \frac{v}{v + v_{\text{πηγη}}} f_{\text{πηγη}} \quad (11.70)$$

Από όπου επιβεβαιώνεται ότι η συχνότητα $f_{\text{εμπρος}}$ που αντιλαμβάνεται ο εμπρός παρατηρητής είναι μεγαλύτερη από αυτή της πηγής και η συχνότητα $f_{\text{πισω}}$ που αντιλαμβάνεται ο πίσω παρατηρητής είναι μικρότερη από αυτή της πηγής.

Στη γενικότερη περίπτωση που κινείται και ο παρατηρητής με ταχύτητα v_{π} , τότε στις Εξ. (11.69) και (11.70) θα πρέπει να θέσουμε στο αριθμητή $v_{\alpha\phi} = v + v_{\pi}$ όταν ο παρατηρητής πλησιάζει τη πηγή και $v_{\alpha\phi} = v - v_{\pi}$ όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται από τη πηγή και θα πάρουμε τους γενικούς τύπους

Συχνότητα εμπρός από πηγή και ο παρατηρητής

$$\text{την πλησιάζει (+} v_{\pi} \text{) ή απομακρύνεται (-} v_{\pi} \text{)} \quad f_{\text{εμπρος}} = f_{\alpha\phi} = \frac{v \pm v_{\pi}}{v - v_{\text{πηγη}}} f_{\text{πηγη}} \quad (11.71)$$

Συχνότητα πίσω από πηγή και ο παρατηρητής

$$\text{την πλησιάζει (+} v_{\pi} \text{) ή απομακρύνεται (-} v_{\pi} \text{)} \quad f_{\text{πισω}} = f_{\alpha\phi} = \frac{v \pm v_{\pi}}{v + v_{\text{πηγη}}} f_{\text{πηγη}} \quad (11.72)$$

Συμπερασματικά έχουμε να κάνουμε τις εξής σημαντικές παρατηρήσεις.

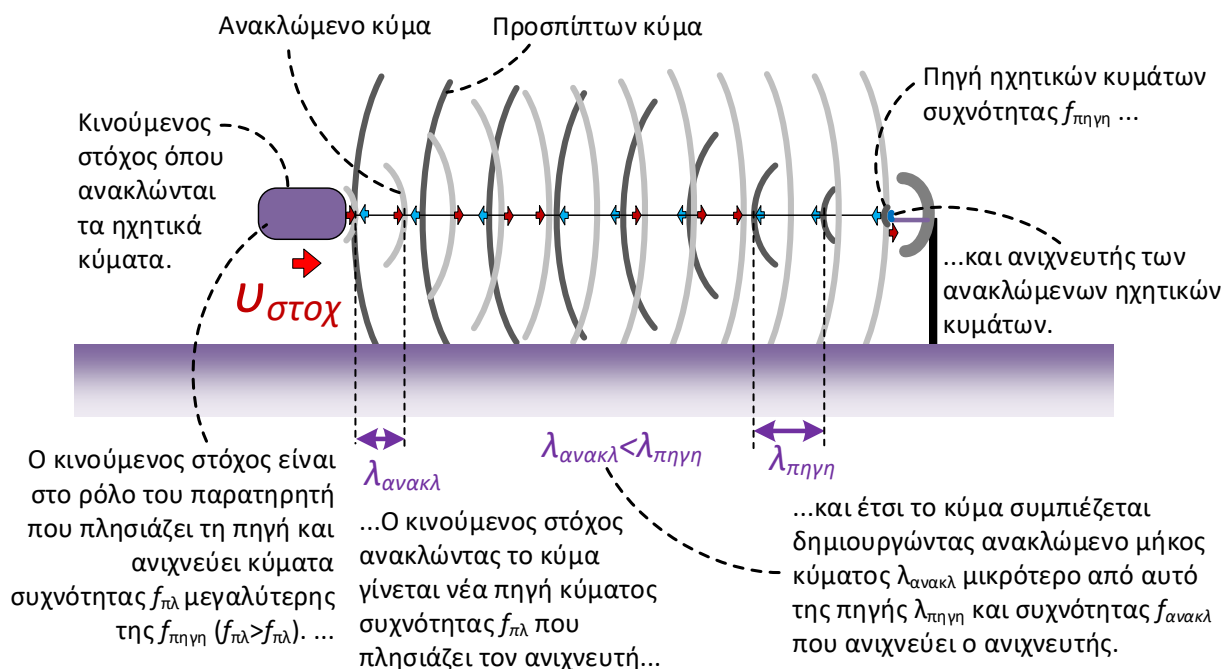
- (i) Οι Εξ. (11.71) και (11.72) είναι γενικές και περιλαμβάνουν όλες τις περιπτώσεις: για ακίνητη πηγή θέτουμε $v_{\text{πηγη}} = 0$ και καταλήγουμε στις Εξ. (11.64) και (11.65). Αν ο παρατηρητής είναι ακίνητος και η πηγή κινείται θέτουμε $v_{\pi} = 0$ και καταλήγουμε στις Εξ. (11.69) και (11.70).

- (ii) Αν κινείται η πηγή, τότε το μήκος κύματος αλλάζει σε $\lambda_{\text{εμπρος}}$ και $\lambda_{\text{πίσω}}$ και φυσικά η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε $f_{\text{εμπρος}}$ και $f_{\text{πίσω}}$. Όταν όμως κινείται μόνο ο παρατηρητής, τότε αλλάζει μόνο η συχνότητα και το μήκος κύματος παραμένει αμετάβλητο.
- (iii) Σε όλες τις περιπτώσεις του φαινομένου Doppler που εξετάσαμε οι συχνότητα άφιξης $f_{\alpha\varphi}$ στον παρατηρητή τις οποίες αυτός αντιλαμβάνεται προσδιορίζονται από την απλή εξίσωση $f_{\alpha\varphi} = \frac{v_{\alpha\varphi}}{\lambda}$. Το μήκος κύματος λ παραμένει αμετάβλητο αν η πηγή είναι ακίνητη, διαφορετικά όταν η πηγή κινείται με ταχύτητα $v_{\text{πηγή}}$ θέτουμε τις τιμές $\lambda_{\text{εμπρος}}$ και $\lambda_{\text{πίσω}}$ από τις Εξ. (11.67) και (11.68). Στην ταχύτητα άφιξης των κυμάτων στον παρατηρητή θέτουμε $v_{\alpha\varphi} = v \pm v_{\pi}$ με $+$ όταν ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή και $-$ όταν απομακρύνεται από την πηγή.

Το φαινόμενο Doppler χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η συσκευές ραντάρ με την οποία ελέγχονται οι ταχύτητες κινούμενων μέσων.

Διπλή μετατόπιση Doppler

Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου μια ακίνητη πηγή στέλνει ηχητικό κύμα με τη ταχύτητα του ήχου v . Το κύμα προσπίπτει σε ένα κινούμενο στόχο και ανακλώμενο επιστρέφει στη πηγή, η οποία διαθέτει ανιχνευτή και ανιχνεύει τη συχνότητα $f_{\text{επ}}$ του ανακλώμενου κύματος από την οποία μπορεί να προσδιορίσει την άγνωστη ταχύτητα $v_{\text{στόχ}}$ του στόχου.



Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε διπλό φαινόμενο Doppler. Από τη μία ο στόχος αφού πλησιάζει τη πηγή ανιχνεύει κύμα με μεγαλύτερη συχνότητα $f_{\pi\lambda} > f_{\text{πηγή}}$, η οποία δίδεται από την Εξ.

(11.64), θέτοντας ως ταχύτητα παρατηρητή αυτή του στόχου $v_{\pi} = v_{\sigma\tau\omicron\chi}$, από όπου βρίσκουμε $f_{\pi\lambda} = f_{\pi\eta\gamma\eta} \left(\frac{v+v_{\sigma\tau\omicron\chi}}{v} \right)$ ήχος. Στη συνέχεια ο στόχος αφού γίνεται πηγή του ανακλώμενου κύματος, αυτό συμπιέζεται σε μικρότερο μήκος κύματος από αυτό της πηγής $\lambda_{\text{ανακλ}} < \lambda_{\pi\eta\gamma\eta}$, το οποίο βρίσκεται από την Εξ. (11.67) θέτοντας $v_{\pi\eta\gamma\eta} = v_{\sigma\tau\omicron\chi}$. Το ανακλώμενο κύμα έχει συχνότητα $f_{\text{ανακλ}}$ την οποία ανιχνεύει ο ανιχνευτής και δίδεται από την Εξ. (11.71), στην οποία θέτοντας $f_{\pi\eta\gamma\eta} = f_{\pi\lambda} = f_{\pi\eta\gamma\eta} \left(\frac{v+v_{\sigma\tau\omicron\chi}}{v} \right)$, $f_{\text{εμπρος}} = f_{\text{ανακλ}}$ και $v_{\pi\eta\gamma\eta} = v_{\sigma\tau\omicron\chi}$ παίρνουμε

$$\text{Ανακλώμενη συχνότητα κινούμενου στόχου} \quad f_{\text{ανακλ}} = \frac{v+v_{\sigma\tau\omicron\chi}}{v-v_{\sigma\tau\omicron\chi}} f_{\pi\eta\gamma\eta} \quad (11.73)$$

Με βάση τη τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι μετρώντας τη συχνότητα $f_{\text{ανακλ}}$ της ανακλώμενης ακτινοβολίας, τότε είναι δυνατόν να προσδιοριστεί η άγνωστη ταχύτητα του στόχου αφού λύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς $v_{\sigma\tau\omicron\chi}$

$$\text{Ταχύτητα στόχου} \quad v_{\sigma\tau\omicron\chi} = \frac{f_{\text{ανακλ}} - f_{\pi\eta\gamma\eta}}{f_{\text{ανακλ}} + f_{\pi\eta\gamma\eta}} v \quad (11.74)$$

Φαινόμενο Doppler σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Το φαινόμενο Doppler παρατηρείται και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως το φως, με μια όμως πολύ ουσιαστική διαφορά. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν απαιτούν μέσο διάδοσης, όπως συμβαίνει με όλα τα άλλα κύματα. Διαδίδονται και στο κενό όπου η ταχύτητά τους είναι ίση με $c = 2.997 \times 10^8 \text{ m/s}$ η οποία **δεν αναφέρεται ως προς κάποιο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς**, σε αντίθεση με τα μηχανικά κύματα όπως ο ήχος όπου η ταχύτητά του αναφέρεται ως προς το μέσο διάδοσής των π.χ. τον αέρα. **Η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι ίδια για οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς**, είτε ακίνητο είτε κινούμενο. Η ταχύτητά τους βρίσκεται πειραματικά να είναι **σταθερή ανεξάρτητη από τη ταχύτητα του παρατηρητή ή της πηγής** και δεν υπάρχει τρόπος να ξεχωρίσουμε τη κίνηση της πηγής από τη κίνηση του παρατηρητή. **Εδώ παίζει ρόλο μόνο η σχετική κίνηση** της πηγής του ηλεκτρομαγνητικού κύματος ως προς του παρατηρητή. Έτσι αν η πηγή και ο παρατηρητής πλησιάζουν ή απομακρύνονται με σχετική ταχύτητα v , τότε συνδυάζοντας την ειδική σχετικότητα θέτοντας στις Εξ. (11.66) τη διαστολή του χρόνου $T = T_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, όπου T_0 η λεγόμενη ιδιοπερίοδος όταν πηγή και παρατηρητής είναι ακίνητοι, βρίσκουμε

$$\text{Συχνότητα πλησιάζοντας πηγή με παρατηρητή} \quad f_{\pi\lambda} = \frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}} f_{\pi\eta\gamma\eta} \quad (11.75)$$

$$\text{Συχνότητα απομακρυνόμενοι πηγή με παρατηρητή} \quad f_{\alpha\pi} = \frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}} f_{\pi\eta\gamma\eta} \quad (11.76)$$

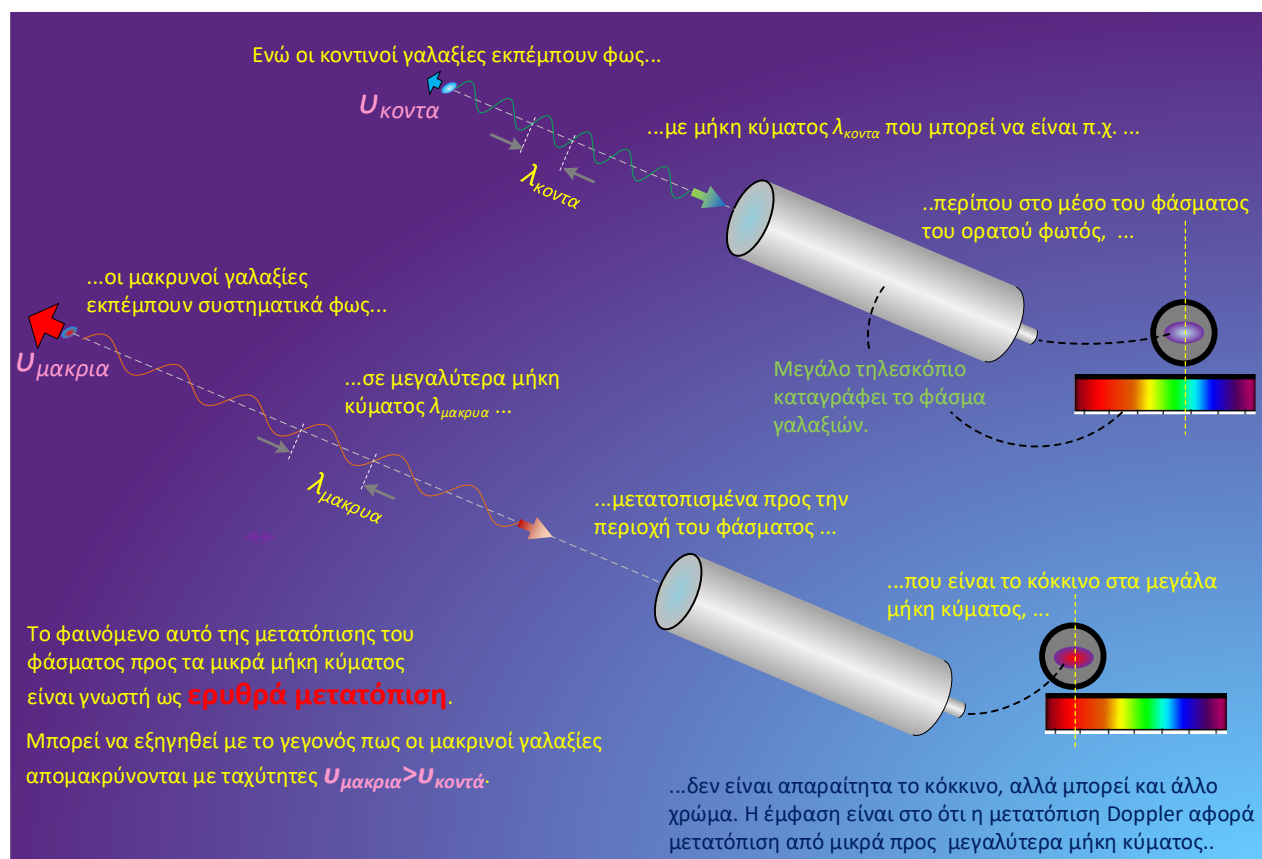
Το μήκος κύματος της ακτινοβολίας το οποίο είναι αυτό που τελικά καταγράφεται από τη γενική σχέση $\lambda = c/f$ γίνεται

$$\text{Μήκος κύματος πηγής πλησιάζοντας παρατηρητή} \quad \lambda_{\pi\lambda} = \frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}} \lambda_{\pi\eta\gamma\eta} \quad (11.77)$$

Μήκος κύματος πηγής απομακρυνόμενης από παρατηρητή $\lambda_{\alpha\pi} = \frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}} \lambda_{\pi\eta\gamma\eta}$ (11.78)

Επομένως όταν η πηγή φωτός πλησιάζει, η συχνότητα $f_{\pi\lambda}$ του φωτός σε σχέση με αυτή $f_{\pi\eta\gamma}$ που εκπέμπει η πηγή ακίνητη αναμένεται να μεγαλώνει $f_{\pi\lambda} > f_{\pi\eta\gamma}$, αφού στην Εξ. (11.75) το κλάσμα είναι $\frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}} > 1$, ενώ το μήκος κύματος από την Εξ. (11.77) μικραίνει $\lambda_{\pi\lambda} < \lambda_{\pi\eta\gamma}$. Αντίθετα, όταν η πηγή φωτός απομακρύνεται, η συχνότητα $f_{\alpha\pi}$ του φωτός σε σχέση με αυτή $f_{\pi\eta\gamma}$ που εκπέμπει η πηγή ακίνητη αναμένεται να μικραίνει $f_{\alpha\pi} < f_{\pi\eta\gamma}$, αφού στην Εξ. (11.76) το κλάσμα είναι $\frac{\sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c}} < 1$, και έτσι το μήκος κύματος από την Εξ. (11.78) προβλέπεται να αυξάνεται $\lambda_{\alpha\pi} > \lambda_{\pi\eta\gamma}$.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα του φαινομένου Doppler στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι η συστηματική μετατόπιση προς τα μεγαλύτερα μήκη κύματος του φάσματος των μακρινών γαλαξιών.



Πράγματι, η ερυθρά μετατόπιση του μήκους κύματος των μακρινών γαλαξιών προς μεγαλύτερα μήκη κύματος προβλέπεται από την Εξ. (11.78) από το γεγονός θέτοντας $v = v_{\text{μακρια}}$ και $v = v_{\text{κοντα}}$, τότε προκύπτουν τα $\lambda_{\alpha\pi} = \lambda_{\text{μακρια}}$ και $\lambda_{\alpha\pi} = \lambda_{\text{κοντα}}$, αντίστοιχα, και ότι

$\lambda_{μακρια} > \lambda_{κοντα}$. Επομένως, οι μακρινοί γαλαξίες απομακρύνονται με μεγαλύτερη ταχύτητα από ότι οι κοντινοί φανερώνοντας ότι το σύμπαν βρίσκεται σε διαστολή.

Το 1929 ο Edwin Hubble μέτρησε την ταχύτητα με την οποία απομακρύνονται οι γαλαξίες μετρώντας την μετατόπιση προς το ερυθρό των φασμάτων που εκπέμπουν οι μακρινοί γαλαξίες. Συγκεκριμένα, όταν η ταχύτητα απομάκρυνσης v είναι μικρή χρησιμοποιώντας ανάπτυξη σε σειρά για το κλάσμα στη Εξ. (11.76) τότε παίρνουμε

$$f_{απ} = f_{πηγ} \frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}} = f_{πηγ} \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right) \quad (11.79)$$

Θεωρώντας ότι η ταχύτητα απομάκρυνσης είναι $v \ll c$, τότε από το τρίτο όρο και μετά οι όροι της σειράς είναι αμελητέοι και έτσι παίρνουμε

$$f_{απ} = f_{πηγ} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \quad (11.80)$$

Θέτοντας $f_{απ} = c/\lambda_{απ}$ και $f_{πηγ} = c/\lambda_{πηγ}$, παίρνουμε την έκφραση για το μήκος κύματος το οποίο είναι αυτό που μετρείται αστρονομικά: $c/\lambda_{απ} = c/\lambda_{πηγ} \left(1 - \frac{v}{c} \right)$, $\lambda_{απ} = \lambda_{πηγ} / \left(1 - \frac{v}{c} \right)$, από όπου προκύπτει $\frac{v}{c} = \frac{\lambda_{απ} - \lambda_{πηγ}}{\lambda_{πηγ}}$. Αν στη τελευταία σχέση θέσουμε τη μετατόπιση Doppler του μήκους κύματος $\lambda_{απ} - \lambda_{πηγ}$ σε απόλυτη τιμή $|\Delta\lambda|$ η οποία ονομάζεται **μετατόπιση Doppler**, έχουμε

$$\text{Ταχύτητα φωτεινής πηγής ή γαλαξία} \quad v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_{πηγ}} c \quad (11.81)$$

και έχει ισχύ μόνο όταν $v \ll c$. Με βάση τη μετατόπιση Doppler μετρείται η ταχύτητα απομάκρυνσης των γαλαξιών. Από αυτό προέκυψε το πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι εκτός του ότι το σύμπαν βρίσκεται σε διαστολή, η ταχύτητα της απομάκρυνσης αυξάνεται με την απόστασή των από τη Γη. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως **Νόμος του Hubble**.