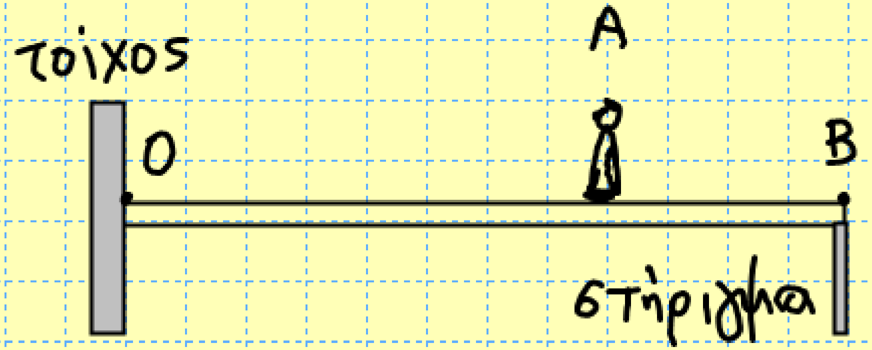
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

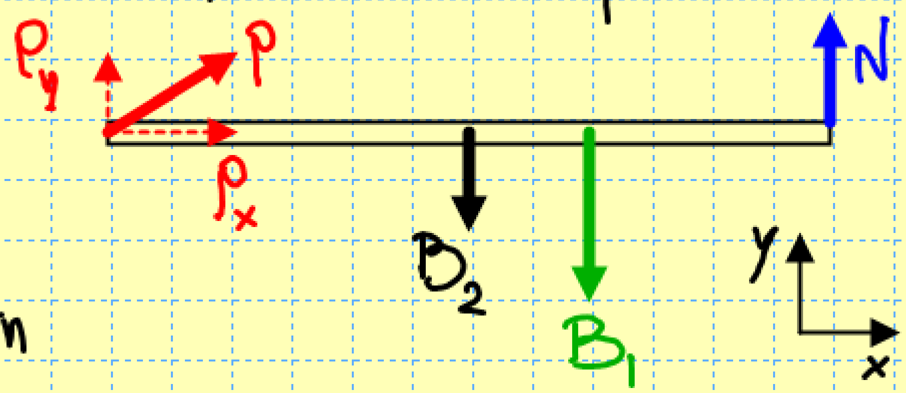
Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση είναι $\Sigma\vec{F}=m\vec{a}$ και $\Sigma\tau=I\alpha$. Επομένως εαν ισχύει ότι το άθροισμα των δυνάμεων $\Sigma\vec{F}$ και ροπών $\Sigma\tau$ που δρα σε ένα σώμα είναι και τα δυο μηδέν, τότε το σώμα δεν επιταχύνεται ούτε μεταφορικά ούτε περιστροφικά αφού $\vec{a}=0$ και $\alpha=0$. Ολοκληρώνοντας αυτές τις σχέσεις παίρνουμε ότι $\vec{\upsilon}=$ σταθερό και $\omega=$ σταθερό. Στην ειδική περίπτωση που $\vec{\upsilon}=0$ και $\omega=0$ τότε λέμε ότι το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία. Εαν η συνθήκη $\Sigma\vec{F}=0$ και $\Sigma\tau=0$ παραμείνει (δηλαδή δεν ισχύει μόνο στιγμιαία) τότε θα παραμένει το $\vec{u}=0$ και $\omega=0$ αφού οι επιταχύνσεις (που είναι ο ρυθμός μεταβολής των ταχυτήτων) παραμένουν μηδέν από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα.

$\Sigma\vec{F}=0$ έχουμε σε ένα σώμα στην τετριμμένη περίπτωση όπου δεν ασκείται καμία δύναμη στο σώμα (ομοίως και με $\Sigma\tau=0$). Στην πράξη όμως εφαρμόζονται αρκετές δυνάμεις σε ένα σώμα όπως το βάρος, η τριβή, η αντίδραση από επιφάνειες, η τάση νήματος κ.λ.π. και αρκετές φορές τείνουν να αλληλοαναιρούνται οπότε έχουμε και ισορροπία. Για να βρούμε τις συνθήκες ισορροπίας εφαρμόζουμε τις συνθήκες $\Sigma\vec{F}=0$ και $\Sigma\tau=0$

α) Παράδειγμα: Στο διπλανό σχήμα ο άνθρωπος μάζας 100 kg βρίσκεται στα 3/4 της σανίδας μήκους 12 m. Εαν η σανίδα ζυγίζει 10 kg, να βρεθούν οι δυνάμεις $\vec{P}$ και $\vec{N}$ στα σημεία Β και Ο αντίστοιχα, εάν το στήριγμα δεν είναι προσκολλημένο στην σανίδα.



<u>Λύση</u>: Οι δυνάμεις που ασκούνται στην σανίδα φαίνονται παρακάτω. Αφού το στήριγμα δεν είναι προσκολλημένο στην σανίδα, θα ασκεί μόνο κάθετη



δύναμη $\vec{N}$ στην σανίδα. Αντιθέτως επειδή η σανίδα είναι στερεωμένη στον τοίχο, ο τοίχος εν γένει θα ασκεί δύναμη $\vec{\beta}$ τυχαίου προσανατολισμού. Από την πρώτη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma\vec{F}=0$ έχουμε $\Sigma F_x=0$ και $\Sigma F_y=0$. Επειδή μόνο η $\vec{P}$ έχει οριζόντια συνιστώσα P_x, από την συνθήκη ισορροπίας ως προς x έχουμε $P_x=0$ άρα και η $\vec{P}$ είναι κατακόρυφη και $P_y=P$. Ως προς y έχουμε:

$P+N-B_1-B_2$ όπου B_1 και B_2 είναι τα βάρη του ανθρώπου και της σανίδας αντίστοιχα. Παίρνοντας $g=10\ m/s^2$ για ευκολία έχουμε $P+N=1100\ N$ (1)

Η άλλη συνθήκη ισορροπίας είναι η $\Sigma\tau=0$. Όπως είδαμε στο εδάφιο "Ροπή", η ροπή δύναμης εξαρτάται από την απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Εδώ βέβαια δεν έχουμε καμία περιστροφή οπότε έχουμε την ελευθερία να διαλέξουμε όποιον άξονα θέλουμε. Εαν για παράδειγμα σπάσει το στήριγμα στο Β, γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία ότι η σανίδα θα τείνει να περιστραφεί περί το Ο. Αντιθέτως εαν ο σύνδεσμος στο Ο σπάσει, η σανίδα θα τείνει να περιστραφεί περί το Β. Μπορούμε να διαλέξουμε ένα μόνο άξονα (εάν διαλέξουμε και 2ο, οι νέες εξισώσεις προκύπτουν ως συνδυαομοίως των προηγουμένων οπότε δεν δίνουν νέα πληροφορία). Επιλέγουμε λοιπόν έναν άξονα που είναι κάθετος στην σελίδα και περνάει από το O. Τότε οι δυνάμεις F και οι αντίστοιχες ροπές τους $\tau = Fr\sin\theta$ είναι:

Δύναμη P : Ροπή $\tau_P = 0$ επειδή $r=0$

-||- B_2 -||- $\tau_2 = B_2 \frac{L}{2}$ όπου L το μήκος της σανίδας

-||- B_1 -||- $\tau_1 = B_1 \frac{3L}{4}$ -||- -||- -||-

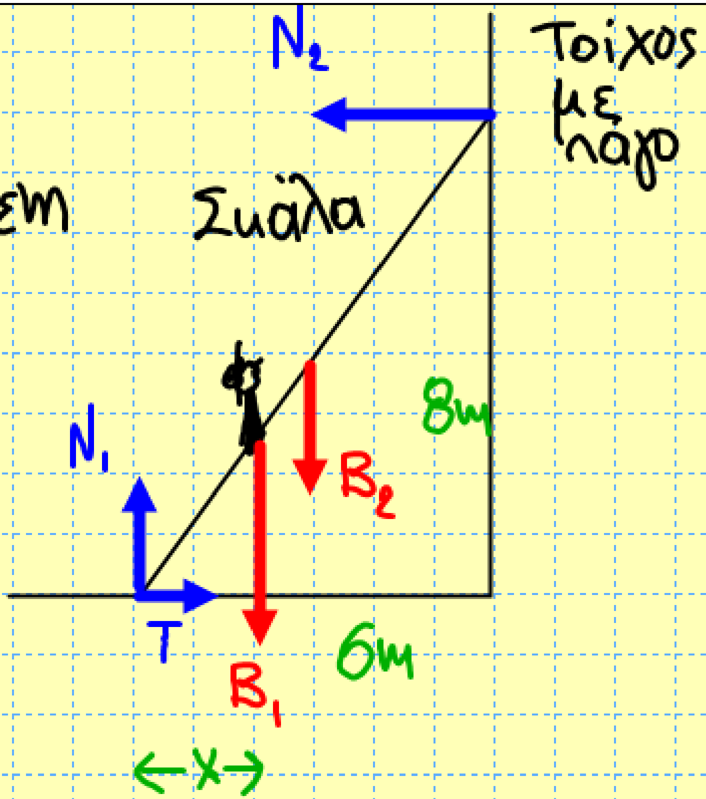
-||- N -||- $\tau_N = -NL$ -||- -||- -||-

Όπου πήραμε ως θετική φορά περιστροφής τη (+)

Το $\Sigma\tau = 0$ δίνει $\frac{3}{4}B_1 \cancel{L} + \frac{1}{2}B_2 \cancel{L} - N\cancel{L} = 0 \Rightarrow N = \frac{3}{4}B_1 + \frac{1}{2}B_2$

Αριθμητικώς $N = \frac{3}{4}1000 + \frac{1}{2}100 = 800$ N και από την (1) $\underset{\sim}{P = 300}$

ο) Παράδειγμα. Πυροσβέστης βάρους $B_1 = 860$ N ανεβαίνει επάνω σε κεκλιμένη σκάλα βάρους $B_2 = 400$ N. Η σκάλα στηρίζεται σε κατακόρυφο τοίχο με πάγο οπότε κ δεν υπάρχει τριβή. Αντιθέτως στο έδαφος ο συντελεστής στατικής τριβής ισούται με $\mu_s = 0{,}4$.



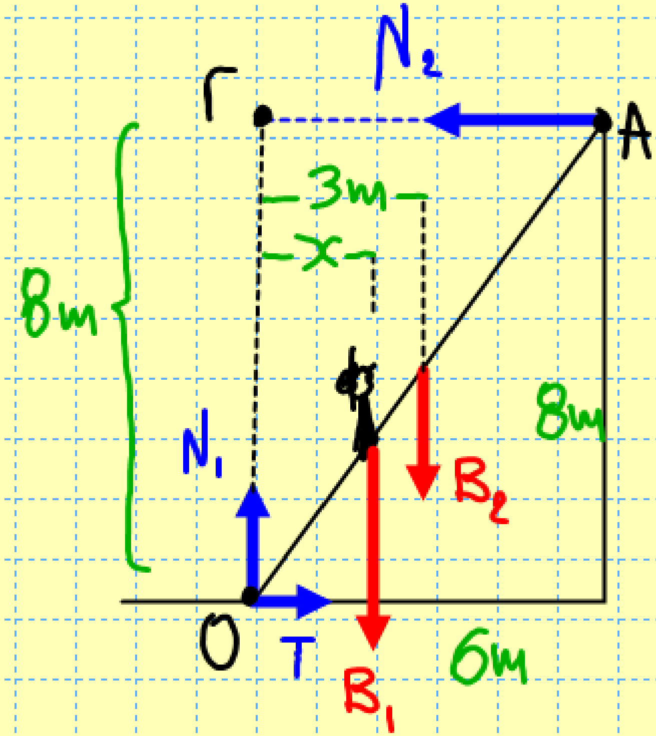
α) Ποια είναι η μέγιστη στατική τριβή του εδάφους; β) Εάν ο πυροσβέστης έχει διανύσει οριζόντια απόσταση $x = 2$ m πόση είναι η τριβή; γ) Πόσο είναι το μέγιστο x που μπορεί να διανύσει ο πυροσβέστης πριν η σκάλα αρχίσει να ολισθαίνει;

Λύση: α) Στο πάνω άκρο της σκάλας υπάρχει μόνο η κάθετη αντίδραση του τοίχου N_2. Αντιθέτως στο κάτω άκρο υπάρχει τόσο η κάθετη αντίδραση N_1 όσο και η τριβή T. Από τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = N_2$ (1) και $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = B_1 + B_2$ (2)

Για την στατική τριβή γνωρίζουμε ότι $T \le T_{max}$ όπου η μέγιστη τιμή ισούται με $T_{max} = \mu_s N_1$. Από την 2 έχουμε $T_{max} = \mu_s (B_1 + B_2) = 0,4 \times (860 + 400) = 504$ N

β) Στην 1 και οι δυο δυνάμεις είναι άγνωστες οπότε χρειαζόμαστε ακόμη μια εξίσωση. Καταφεύγουμε στην συνθήκη ισορροπίας ως προς περιστροφή $\Sigma\tau = 0$. Για να υπολογίσουμε τις ροπές, ανακαλούμε τον 2ο γεωμετρικό ορισμό της ροπής $\tau = r_\perp F$ από το εδάφιο "Ροπή" όπου $r_\perp$ είναι η κάθετη απόσταση του άξονα περιστροφής από την δύναμη. Επιλέγουμε το χαμηλότερο σημείο Ο της σκάλας ως το σημείο περιστροφής. Έτσι στο παρακάτω σχήμα έχουμε: Ροπές των N_1 και T είναι 0 γιατί $r_\perp = 0$. Ροπή του B_1: $\tau_1 = B_1 x$, ροπή του B_2: $\tau_2 = 3B_2$, ενώ η ροπή του N_2 είναι $\tau_A = 8N_2$ αφού η κάθετη απόσταση του Ο από τον φορέα της N_2 είναι η $r_\perp = O\Gamma = 8\,m$.



Η συνθήκη $\Sigma\tau=0$ με φορά (+) δίνει:

$xB_1 + 3B_2 - 8N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = \dfrac{xB_1+3B_2}{8}$ (3). Αντικαθιστώντας την 3 στην 1 έχουμε:

$T = \dfrac{xB_1+3B_2}{8}$ (4). Με $x=2m$, $B_1=860N$ και $B_2=400N$ έχουμε $T=365N$. Αυτή η τριβή είναι μικρότερη από τη μέγιστη $T_{max}=504N$ που βρήκαμε παραπάνω και άρα η σκάλα παραμένει σε ισορροπία.

γ) Από την 4 βλέπουμε ότι η T αυξάνει με το x (όπως αναμένουμε και από την καθημερινή μας εμπειρία). Γνωρίζουμε ότι η στατική τριβή αυτοπροσαρμόζεται και έτσι επιτυγχάνεται ισορροπία. Αυτό δεν μπορεί να γίνει επ άπειρο αλλά όσο ισχύει η συνθήκη $T < T_{max}$. Όταν $T = T_{max}$, η στατική τριβή καταρρέει, το σώμα ολισθαίνει, και η τριβή γίνεται τριβή ολίσθησης με μικρότερες τιμές από T_{max} (επειδή $\mu_k < \mu_s$ γενικά). Η τριβή ολίσθησης δεν έχει την ικανότητα προσαρμογής και έτσι η ισορροπία παύει να ισχύει. Οριακά λοιπόν έχουμε ισορροπία μέχρι και $T = T_{max}$ σε κάποιο $x = x_{max}$. Από την 4 έχουμε $x_{max} B_1 + 3 B_2 = 8 T_{max} \Rightarrow 860 x_{max} + 1200 = 4032$

Λύνοντας έχουμε $x_{max} \simeq 3{,}3 \text{ m}$