ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΣ-ΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

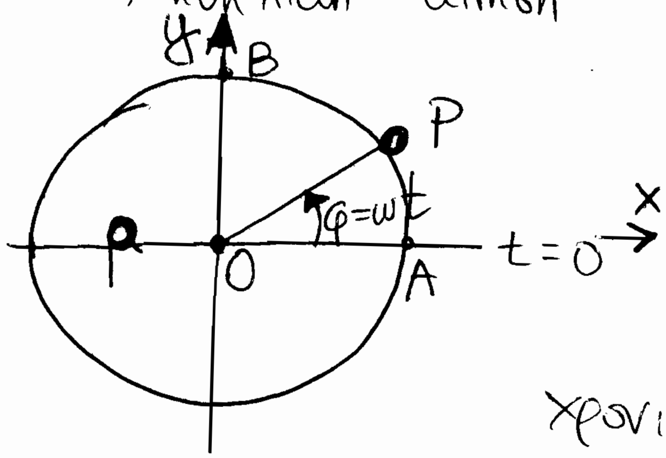
Όπως είδαμε η ταχύτητα σε δύο διαστάσεις είναι ένα διάνυσμα $\vec{V} = U_x \hat{i} + U_y \hat{j}$ όπου τα $\hat{i}$ και $\hat{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, και οι συνιστώσες U_x και U_y ισούνται με την παράγωγο ως προς τον χρόνο των συντεταγμένων x και y του κινητού

$U_x = \dot{x}$ (επίσης με άλλο συμβολισμό $U_x = \frac{dx}{dt}$)

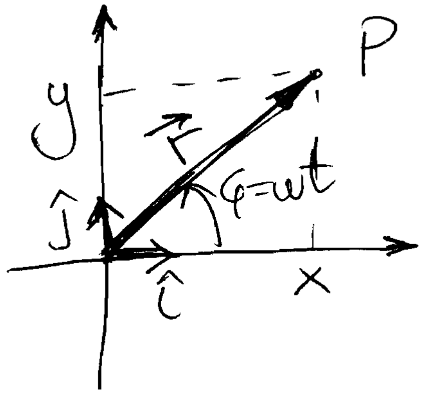
$U_y = \dot{y}$ (-"- -"- -"- $U_y = \frac{dy}{dt}$)

Θα εξετάσουμε δύο παραδείγματα, την ομαλή κυκλική κίνηση και τις βολές:

a) Ομαλή Κυκλική κίνηση



Έστω ένα κινητό που κινείται επάνω σε κύκλο ακτίνας ρ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (ομαλή κυκλική κίνηση). Έστω ότι κατά την χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στο σημείο A και σε τυχαία χρονική στιγμή t βρίσκεται στο σημείο P. Η γωνία που διαγράφει φ αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο ώστε σε ίσους χρόνους να διαγράφει ίσα τόξα. Έτσι $\varphi=\omega t$ όπου η σταθερά αναλογίας ισούται εξ' ορισμού με την γωνιακή ταχύτητα ω (ή κυκλική συχνότητα).



Οι συντεταγμένες του σημείου P είναι

$$\boxed{\begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi=\rho\cos\omega t \\ y&=\rho\sin\varphi=\rho\sin\omega t \end{aligned}} \quad (1)$$

και το διάνυσμα θέσης γράφεται

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$$

Η ταχύτητα u_x κατά τον x άξονα ισούται με

$$u_x=\dot{x}=-\rho\omega\sin\omega t$$

και ομοίως η ταχύτητα u_y ισούται με

$$u_y=\dot{y}=\rho\omega\cos\omega t$$

Θέτουμε $u_0=\rho\omega$ και έχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} u_x&=-u_0\sin\omega t \\ u_y&=u_0\cos\omega t \end{aligned}} \quad (2)$$

Έτσι για παράδειγμα στο $t=0$ έχουμε

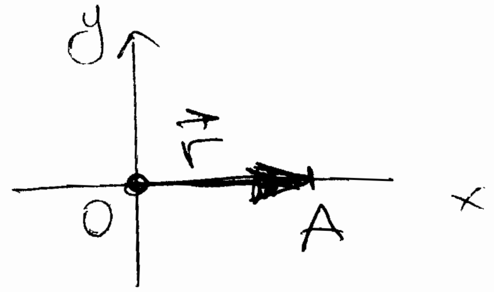
$x=\rho$, $y=0$ και $u_x=0$, $u_y=u_0$

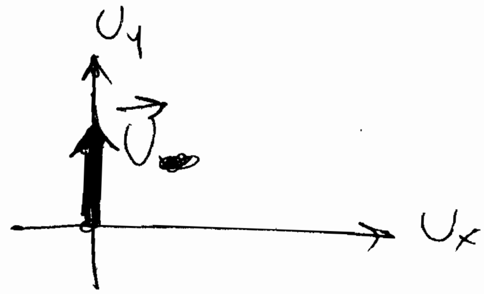
Διανυσματικώς

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}=\rho\hat{i}$ · οριζόντιο

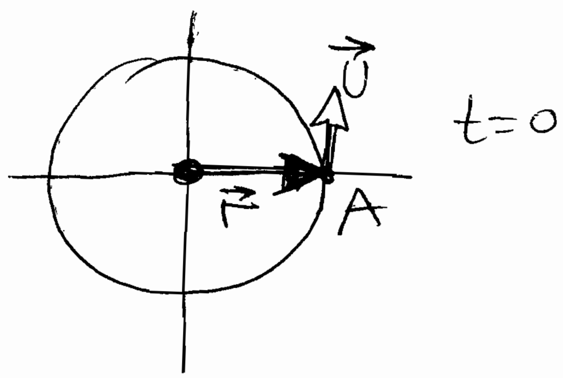
$\vec{u}=u_x\hat{i}+u_y\hat{j}=u_0\hat{j}$: κατακόρυφο

Σχηματικώς





Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στο σημείο A η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά της άρα κατακόρυφη:



Αντιθέτως στο σημείο B όπου $\varphi = \pi/2$ έχουμε από τις εξισώσεις 1 και 2:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\pi/2 = 0 \\ y &= a\sin\pi/2 = a \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} u_x &= -u_0\sin\pi/2 = -u_0 \\ u_y &= u_0\cos\pi/2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

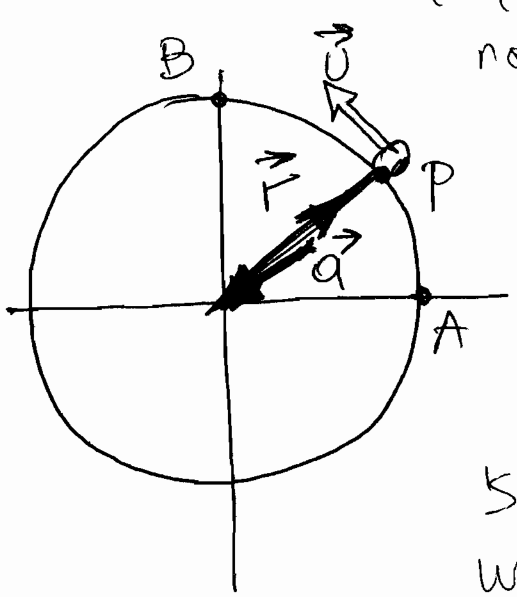
Δηλαδή τώρα το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ είναι κατακόρυφο $\vec{r} = a\hat{\imath}$ ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας είναι οριζόντιο $\vec{u} = -u_0\hat{\imath}$ και προς τα αριστερά:

Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες της ⑤
επιτάχυνσης (εξίσ. 3) είναι ανάλογες με τις συνιστώσες της επιβατικής ακτίνας (διάνυσμα θέσης) στις εξισώσεις 1, με αντίθετο πρόσημο. Έτσι εάν πολλαπλασιάσουμε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ με $-\omega^2$, παίρνουμε το διάνυσμα της επιτάχυνσης:

$$-\omega^2\vec{r} = -\omega^2(x\hat{i}+y\hat{j}) = -\omega^2\rho\left(\cos\omega t\,\hat{i}+\sin\omega t\,\hat{j}\right)$$

$$= -a_0\left(\cos\omega t\,\hat{i}+\sin\omega t\,\hat{j}\right) = a_x\hat{i}+a_y\hat{j} = \vec{a}$$

Αφού $\vec{a}=-\omega^2\vec{r}$ τότε τα διανύσματα $\vec{r}$ και $\vec{a}$ είναι αντίθετα. Η $\vec{a}$ δηλαδή είναι η γνωστή μας κεντρομόλος επιτάχυνση που δείχνει πάντοτε προς το κέντρο O. Αντίθετα η ταχύτητα $\vec{v}$ είναι πάντοτε εφαπτομενική στον κύκλο, δηλαδή κάθετη στην ακτίνα ς επομένως κάθετη στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$. Αυτό το είδαμε στα σημεία A και B



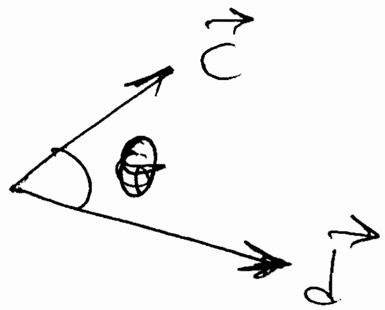
αλλά πώς το γνωρίζουμε για το τυχαίο σημείο P;

Δ. Κουζούδης

Ένας εύκολος τρόπος να το αποδείξουμε (6)

είναι με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{c}$ και $\vec{d}$

το οποίο ισούται με



$$\vec{c}\cdot\vec{d} = |\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta$$

όπου $|\vec{c}|$ το μέτρο του $\vec{c}$

$|\vec{d}|$ -"- -"- -"- $\vec{d}$

και θ η γωνία μεταξύ των $\vec{c}$ και $\vec{d}$.

Τέλος

Ένας άλλος τύπος για το εσωτερικό γινόμενο είναι:

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = c_x d_x + c_y d_y \quad \text{όπου}$$

c_x, c_y οι συνιστώσες του $\vec{c}$ &

d_x, d_y -"- -"- -"- $\vec{d}$.

Συνδυάζοντας τα δύο έχουμε

$$\boxed{|\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta = c_x d_x + c_y d_y} \quad (4)$$

Εαν ~~...~~ για κάποιο λόγο το δεύτερο μέλος της 4 ισούται με 0 τότε εαν $|\vec{c}|\neq 0$ και $|\vec{d}|\neq 0$ συμπεραίνεται ότι

$\cos\theta = 0$ που σημαίνει $\theta = \pm\pi/2$

Στην περίπτωση των $\vec{r}$ και $\vec{v}$ έχουμε

	x συνιστώσα	y συνιστώσα	μέτρο
$\vec{r}$	$\rho\cos\omega t$	$\rho\sin\omega t$	ρ
$\vec{v}$	$-v_0\sin\omega t$	$v_0\cos\omega t$	v_0

Έτσι το δεύτερο μέλος της εξ. 4 δίνει

$$x v_x + y v_y = \rho v_0(-\cos\omega t \sin\omega t + \sin\omega t \cos\omega t) = 0$$

Δ: Γεωμετρικώς

Άρα και το πρώτο μέλος πρέπει να είναι 0

Αφού τα μέτρα $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$ και

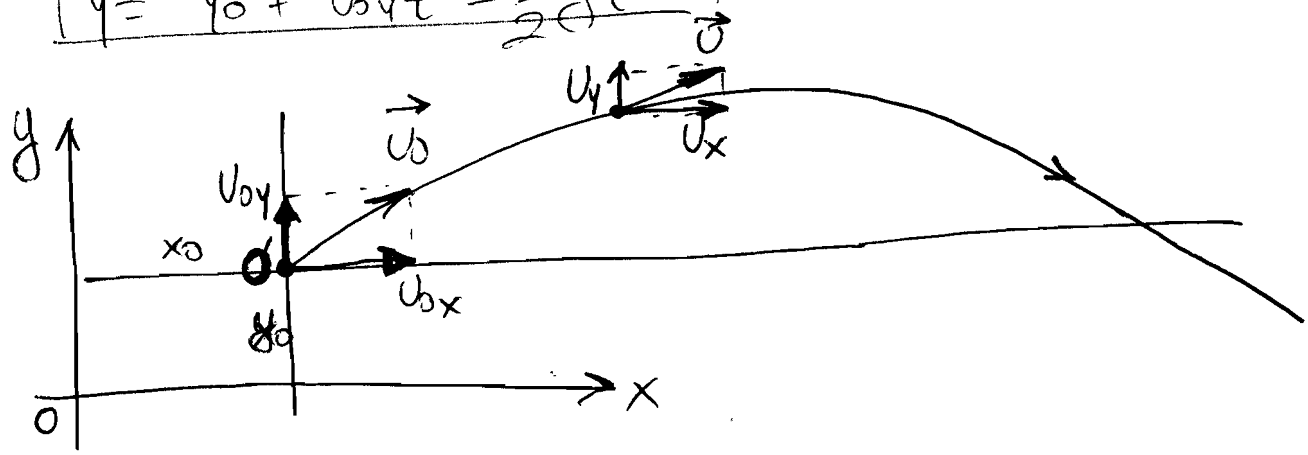
$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = v_0$ είναι

διάφορα του μηδενός, τότε αναγκαστικά στο πρώτο μέλος της 4 το $\cos\theta$ πρέπει να μηδενίζεται και άρα $\theta = \pi/2$, δηλαδή στην κυκλική κίνηση τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους (ενώ τα $\vec{a}$ και $\vec{r}$ είναι με αντίθετη φορά).

φ) Βολές.

Από το Λύκειο γνωρίζουμε ότι οι εξισώσεις των συντεταγμένων του κινητού είναι οι:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t \\ y &= y_0 + v_{0y} t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}} \quad (1)$$



Δ. Κουτούδης

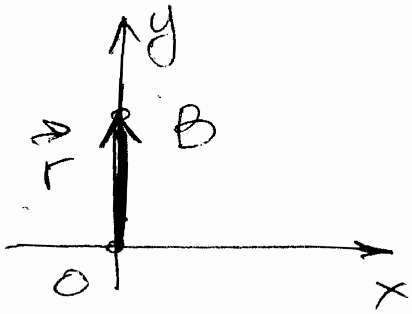
Για κινητό που εκτοξεύεται στο $t=0$ από το σημείο $O'(x_0, y_0)$ με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ με συνιστώσες v_{0x} και v_{0y}.

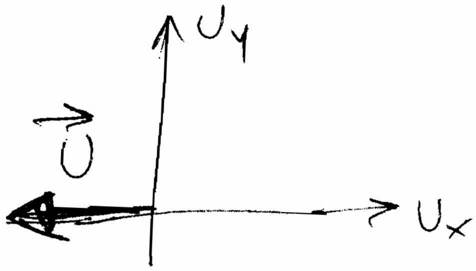
Για να βρούμε την ταχύτητα σε τυχαία χρονική στιγμή t παραγωγίζουμε τις εξισ. 1:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v_{0x} \\ v_y &= \dot{y} = v_{0y} - gt \end{aligned}} \quad (2)$$

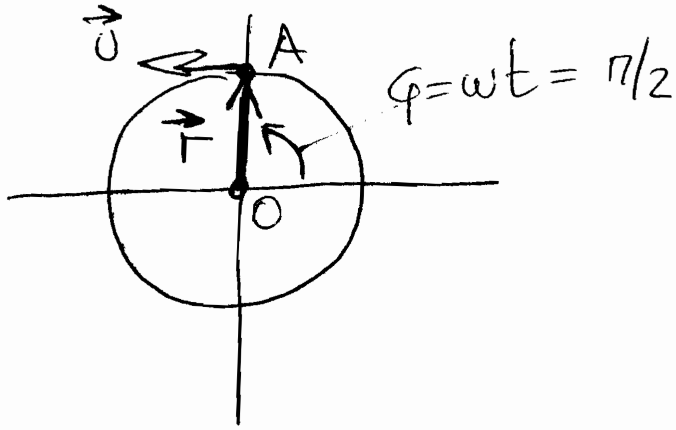
ομοίως για να βρούμε την επιτάχυνση, παραγωγίζουμε τις εξισ. 2:

$$a_x = \dot{v}_x = 0$$
$$a_y = \dot{v}_y = -g$$





Βλέπουμε ότι και πάλι η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη της ακτίνας:



Όσο για την επιτάχυνση σε τυχαίο σημείο μπορεί να βρεθεί από την παράγωγο της ταχύτητας (εξισώσεις 2)

$$a_x = \dot{v}_x = -v_0 \omega \cos\omega t$$
$$a_y = \dot{v}_y = -v_0 \omega \sin\omega t$$

Θέτω $a_0 = \omega v_0 = \omega^2 \rho$ και έχω:

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= -a_0 \cos\omega t \\ a_y &= -a_0 \sin\omega t \end{aligned}} \quad (3)$$

Δ. Κουζούδης