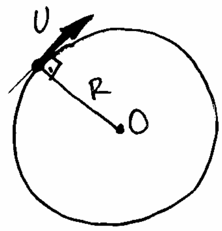
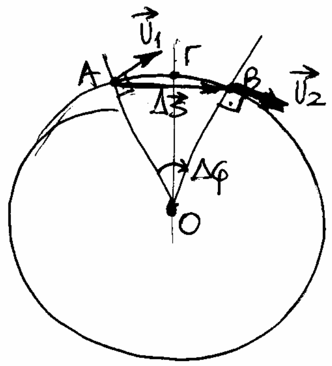
ΔΙΑΛΕΞΗ ②

Ομαλή κυκλική κίνηση :

Όταν το σώμα κινείται πάνω σε κυκλική τροχιά ακτίνας R με σταθερή εφαπτομενική ταχύτητα $υ$. Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει, όμως αλλάζει συνεχώς η διεύθυνσή της ώστε να είναι πάντα εφαπτόμενη στον κύκλο:

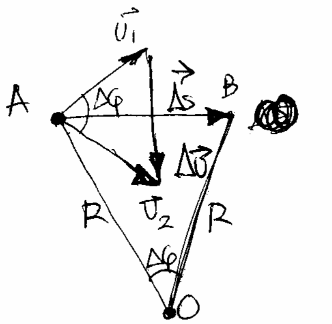
Σ. ΚΟΥΖΟΥΛΗΣ





Έστω τώρα ότι κατά την χρον. στιγμή A το σώμα βρίσκεται στο σημείο A και ότι κατά την χρον. στιγμή t_2 βρίσκεται στο σημείο B έχοντας διαγράψει γωνία $Δφ$ σε χρόνο $Δt = t_2 - t_1$, κινούμενο πάνω στο τόξο ΑΓΒ. Έστω $\Delta \vec{s}$ το διάνυσμα που ενώνει το A με το B.

Εάν μεταφέρουμε το διάνυσμα $\vec{u}_2$ έτσι ώστε η αρχή του να συμπίπτει με το A έχουμε το εξής σχήμα



Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα διανυσματική $\Delta\vec{u}$ είναι η διαφορά των $\vec{u}_2$ και $\vec{u}_1$ αφού

$$\vec{u}_1 + \Delta\vec{u} = \vec{u}_2 \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1}$$

Από το διάνυσμα είναι κάθετο στο $\Delta\vec{s}$. Από την καθετότητα των $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ στις ακτίνες AO και BO συμπεραίνουμε ότι τα ισοσκελή τρίγωνα AOB και από είναι σχηματίζουν τα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ είναι όμοια. Επομένως μπορώ να πάρω αναλογία πλευρών:

$$\frac{|\Delta\vec{u}|}{u_1} = \frac{|\Delta\vec{s}|}{R} \Rightarrow |\Delta\vec{u}| = \frac{u_1}{R}|\Delta\vec{s}|$$

Ο ορισμός της διανυσματικής επιτάχυνσης είναι

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$$ και έχει μέτρο $$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{u}|}{\Delta t}$$ ή

Σύμφωνα με τα παραπάνω

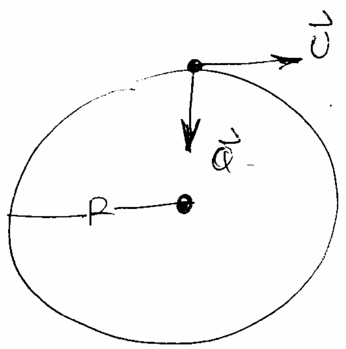
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u_1}{R} \frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t}$$

③

Όμως το $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$ είναι ο ορισμός της στιγμ. ταχύτητας του κινητού $\vec{υ}$. Επομένως το $|\vec{υ}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{s}|}{\Delta t}$ είναι το μέτρο υ αυτής της ταχύτητος το οποίο όπως είπαμε παραμένει σταθερό στην ομαλή κυκλική κίνηση. Άρα

$$a = \frac{υ}{R} υ = \frac{υ}{R} υ \Rightarrow \boxed{a = \frac{υ^2}{R}}$$

Άρα το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $υ^2/R$ στην ομαλή κυκλική κίνηση. Η φορά του $\vec{a}$ είναι η φορά του $\Delta \vec{υ}$ η οποία είναι ακτινική προς το κέντρο Ο. Παραστατικώς



$\vec{υ}$: ταχύτητα σταθερό μέτρο υ μεταβαλλόμενη διεύθυνση (σε κάθε σημείο εφαπτομένη.)

$\vec{a}$: επιτάχυνση σταθερό μέτρο $υ^2/R$ μεταβαλλόμενη διεύθυνση (σε κάθε σημείο κάθετη στην ταχύτητα $\Rightarrow // R$).

Δ. ΚΟΤΖΟΓΧΗΣ

Νόμοι κίνησης του Νεύτωνα:

(4)

1ος νόμος: Απουσία δυνάμεων ένα σώμα διατηρεί την κινητική του κατάσταση.

2ος νόμος:

$$\boxed{\underbrace{\Sigma\vec{F}}_{\text{Το άθροισμα των δυνάμεων (διανυσματικό άθροισμα) που δρουν σε ένα σώμα}} = \underbrace{m}_{\text{η μάζα του σώματος}}\ \underbrace{\vec{a}}_{\text{η (διανυσματική) επιτάχυνση του σώματος}}}$$

Η παραπάνω αναλύεται σε συνιστώσες:

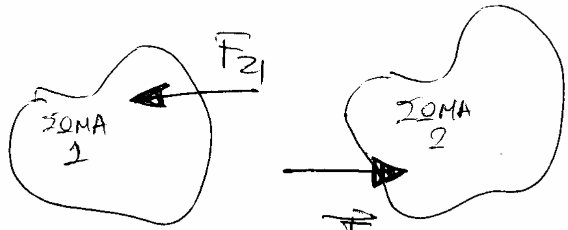
$$\Sigma F_x = m\, a_x$$
$$\Sigma F_y = m\, a_y$$
$$\Sigma F_z = m\, a_z$$

Οπότε στις 3 διαστάσεις είναι σαν να έχουμε τρεις ανεξάρτητους νόμους του Νεύτωνα.

3ος νόμος: Δράση – αντίδραση $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Δ. Κουζούδης

(5)



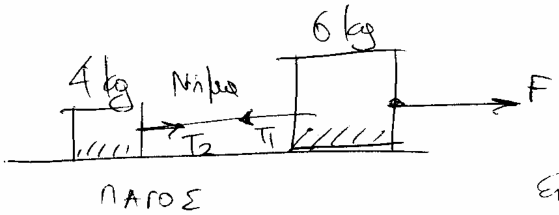
$\vec{F}_{12}$: Η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2

$\vec{F}_{21}$: η δύναμη που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1.

Χ. Κουζούδης

γ) Παράδειγμα.

Δυο κιβώτια δεμένα με νήμα πάνω σε πάγο. Το πρώτο έλκεται με δύναμη F. Εάν το σύστημα επιταχύνεται με $a = 2,5\ m/s^2$ πόση είναι η F. Πόση η τάση του νήματος;



Λύση: Τα δύο σώματα αλληλεπιδρούν μέσω του νήματος. Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα $T_1 = T_2$. Στο μικρό σώμα η T_2 είναι η μόνη δύναμη που εφαρμόζεται και έτσι ο 3ος νόμος του Νεύτωνα δίνει: $\Sigma F = ma \Rightarrow T_2 = ma \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_2 = 4kg \cdot 2,5 \frac{m}{s^2} = 10\ N$$

και επομένως $T_1 = T_2 = 10\ N$.

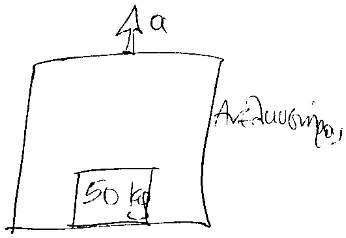
6

Στο μεγάλο σώμα ο 3ος νόμος του Νεύτωνα $\Sigma F' = m'a$ δίνει

$$F - T_1 = m'a \Rightarrow F = T_1 + m'a \quad \text{ή}$$

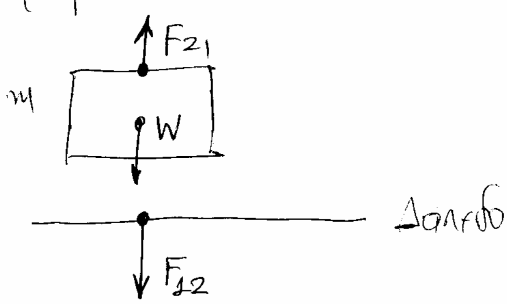
$$F_1 = 10\,N + 6\,kg \times 2{,}5\,\frac{m}{s} = 10 + 15 = 25\ N.$$

ii) Παράδειγμα.



Ανελκυστήρας επιβραδύνεται με σταθερή επιτάχυνση $a = 2\,m/s^2$.
Πόση δύναμη ασκεί η μάζα $m = 50\,kg$ στο δάπεδο;

Λύση: Σε πρώτη σκέψη μπαίνουμε στον πειρασμό να πούμε ότι η ζητούμενη δύναμη είναι το βάρος $W = mg \simeq 50\,kg \times 10\,\frac{m}{s^2} = 500\,N$. Αυτό όμως γίνεται μόνο στην ακινησία. Εάν δούμε το σύστημα μάζα-δάπεδο ως σύστημα δύο σωμάτων:



Σ. Κουζούδης

Τότε έστω F_{12} η δύναμη που (7)
ασκεί η μάζα στο δάπεδο (γιατί π.χ. το δάπεδο παραμορφώνεται τοπικά, π.χ. αν υπάρχει χαλί βυθίζεται ελαφρά σε αυτό) και έστω F_{21} αντίστοιχα η δύναμη που ασκείται από το δάπεδο στο σώμα. Λόγω δράσης αντίδρασης $F_{12} = F_{21}$. Εφαρμόζοντας τον 3ο νόμο του Νεύτωνα στην μάζα m (με θετική την προς τα πάνω φορά):

Δ. Κοτζούλης

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{21} - W = ma \Rightarrow F_{21} = W + ma$$

ή $F_{21} = 500\ N + 50\ kg \times 2\ \frac{m}{s^2} = 500 + 100 = 600\ N$

Άρα η ζητούμενη δύναμη είναι η

$$F_{12} = F_{21} = 600\ N$$

~~Τριβή~~

~~Η δύναμη της τριβής σε ένα σώμα ως γνωστόν αντιτίθεται στην κίνηση του και ισούται με~~

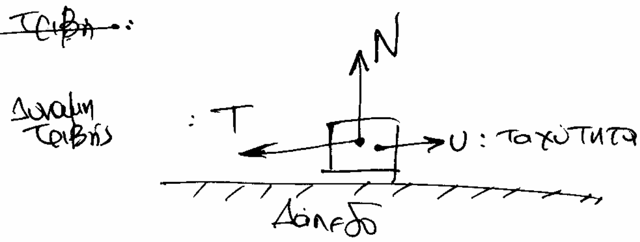
~~$T = \mu N$~~

~~όπου N είναι η κάθετη δύναμη που ασκεί το σώμα στο δάπεδο.~~

ΤΡΙΒΗ

Η τριβή εμφανίζεται σε δύο περιπτώσεις: όταν το σώμα κινείται, εμφανίζεται κινητική τριβή και αντιτίθεται στην κίνηση, και όταν το σώμα βρίσκεται σε ακινησία, εμφανίζεται στατική τριβή και βοηθάει το σώμα να ισορροπήσει μέχρι ένα όριο.

Κινητική τριβή:



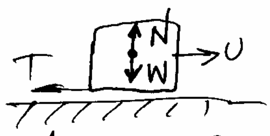
Ισχύει $T=\mu_k N$ όπου N η κάθετη δύναμη που ασκεί το δάπεδο στο σώμα (συνήθως η αντίδραση του βάρους αλλά όχι απαραίτητα) και μ_k ένας καθαρός αριθμός γνωστός ως "συντελεστής κινητικής τριβής" (τυπικές τιμές 0,2 έως 0,6).

Χ. ΚΟΥΖΟΥΧΗΣ

ο) Παράδειγμα. Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίστε την δύναμη της τριβής εάν η μάζα κινείται οριζόντια μέσα στον ανελκυστήρα εάν αυτός α. είναι ακίνητος και β. επιβραδύνεται με $a = 2\,m/s^2$. Δίνεται $\mu_\kappa = 0{,}4$

Λύση.

Όταν ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος η επιτάχυνση του σώματος είναι $a = 0$.

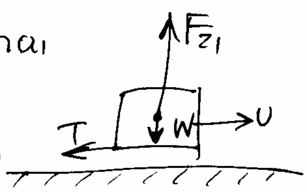


Δάπεδο ανελκυστήρα (ακίνητος)

Στο σώμα δρουν δύο δυνάμεις: Το βάρος του W και η δύναμη N από το δάπεδο. Αφού το σώμα ισορροπεί τότε $N = W = 500\,N$ και έτσι

$$T = \mu_\kappa N = 0{,}4 \times 500\,N = 200\,N$$

Όταν ο ανελκυστήρας επιταχύνεται έδαφος ότι η δύναμη F_{21} από το δάπεδο στο σώμα είναι μεγαλύτερη κατά μέτρο από το βάρος W λόγω της επιβράδυνσης. Έτσι



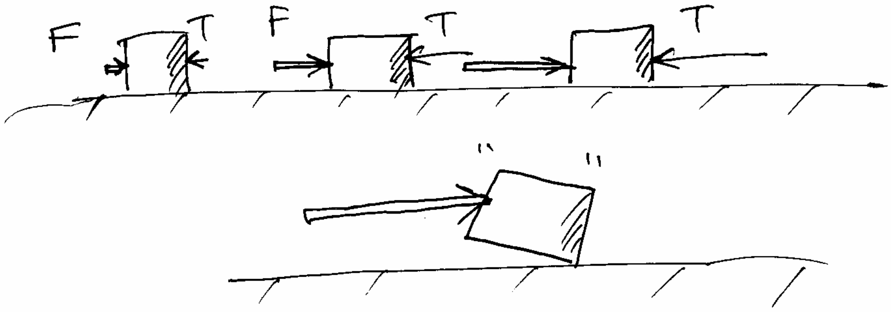
Δάπεδο ανελκυστήρα (επιβράδυνση)

$$T = \mu_\kappa N = 0{,}4 \times 600\,N = 240\,N$$

Δ. ΚΟΤΖΟΓΙΑΔΗΣ

Στατική τριβή.

Γνωρίζουμε από την καθημερινή μας εμπειρία ότι εάν εφαρμόσουμε μια μικρή σχετικά δύναμη F σε ένα σώμα που ηρεμεί πάνω σε ένα δάπεδο, τότε το σώμα αυτό μπορεί και να παραμένει ακίνητο. Συνεχίζοντας να εφαρμόζουμε μια αυξανόμενη δύναμη, κάποια στιγμή το σώμα αρχίζει να κινείται.



Αυτό που συμπεραίνουμε είναι ότι η στατική τριβή αυτοπροσαρμόζεται, έτσι ώστε να αυξάνει όσο αυξάνει η F για να ισχύει $T=F$ και να έχουμε ισορροπία. Όμως αυτό γίνεται μέχρι ένα όριο, μέχρι μια μέγιστη τιμή της T_{max} που δίνεται από την σχέση $T_{max} = \mu_s N$ όπου η N όπως και στην κινητ. τριβή και μ_s ένας συντελεστής γνωστός ως "συντελεστής στατικής τριβής" για τον, οποίο ισχύει $\mu_s > \mu_k$.

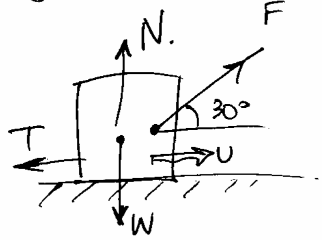
Έτσι η T αυξάνει μέχρι και την T_{max}. Συνεπώς όσο το σώμα ισορροπεί ισχύει

$$T \leq T_{max} \quad ή \quad \boxed{T \leq \mu_s N}.$$

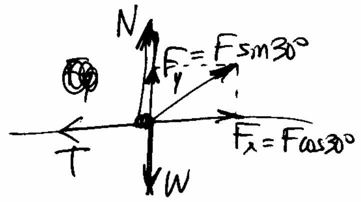
Αφού το σώμα αρχίζει και κινείται, εφαρμόζεται πλέον η κινητική τριβή στο σώμα.

ο) Παράδειγμα: Εργάτης σέρνει με σχοινί κιβώτιο υπό γωνία 30°: Εάν $W = 400\ N$ και $F = 200N$ και $\mu_k = 0,4$ να βρεθεί η T. και η N

Δ. ΚΟΚΖΟΥΛΗΣ



Λύση: Αναλύουμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες x και y.



Έχουμε $F_x = F\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_y = F\frac{1}{2}$

Στον άξονα y έχουμε ισορροπία οπότε

$$N + F_y = W \Rightarrow \boxed{N + \frac{1}{2}F = W} \quad (1)$$

Στον οριζόντιο άξονα υποθέτουμε ότι το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα ⇒ επιτάχυνση μηδέν.

Έτσι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει $\Sigma F = 0 \Rightarrow$

$$F_x - T = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}F = T} \quad (2)$$

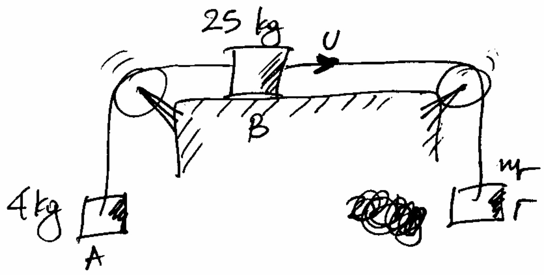
Έτσι $T = \frac{\sqrt{3}}{2} 200 = \sqrt{3}\,100\ N$ (12)

& $N = W - \frac{1}{2}F = 400 - \frac{1}{2}200 = 300\ N$

σ) Παράδειγμα:

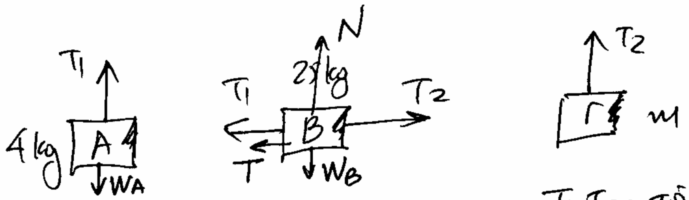
$\mu_k = 0,2$ α) Πόση m_Γ εάν επιτάχυνση $a = 2\ m/s^2$

β) Πόση η τάση των νημάτων;



Λύση:

Δυνάμεις:



T_1, T_2: τάσεις νήματος

T: τριβή $= \mu_k N = \mu_k W_B$

2ος Νόμος Νεύτωνα:

$-W_A + T_1 = m_A a$ (1α) $\quad -T + T_2 - T_1 = m_B a$ (1β) $\quad -T_2 + W_\Gamma = m_\Gamma a$ (1γ) (κοινή επιτάχυνση)

όπου $W_A = m_A g$ $\quad W_B = m_B g$ $\quad W_\Gamma = m_\Gamma g$

Από την (1α): $T_1 = m_A a + m_A g = m_A (a+g) = 4(10+2) = 48\ N$

-"- -"- (1β): $T_2 = m_B a + T_1 + \mu_k W_B = 25\cdot 2 + 48 + 0,2\times 25\times 10 = 148\ N$

-"- -"- (1γ):

$+T_2 = m_\Gamma (g-a) \Rightarrow m_\Gamma = \frac{T_2}{g-a} = \frac{148}{10-2} = 18,5\ kg$